DOI: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n3p236-244

Conhecimentos de Professores sobre a Probabilidade

Teachers' knowledge on Probability

Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro[a]; Angélica da Fontoura Garcia Silva[bc]; Ruy Cesar Pietropaolo[bd]*

[b]Secretaria Municipal de Educação de Inhuma. PI, Brasil.
[a]Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Educação Matemáticas. SP, Brasil.
[c]Unopar, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Metodologias para o Ensino de Linguagens e suas Tecnologias. PR, Brasil.
[d]Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Saúde. SP, Brasil.
*E-mail: ruy.pietropaolo@anhanguera.com

Resumo

Aqui se apresenta parte de um estudo em desenvolvimento em um contexto de formação continuada. Discutem-se ideias e conceitos que embasam o ensino de probabilidade para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental e analisam-se as respostas e as reflexões de um grupo de professores, pedagogos e licenciados em Matemática[1], envolvidos em uma atividade de uma das sessões de formação cuja base teórica se apoia em um programa de ensino desenvolvido por pesquisadores da Universidade de Oxford, na Inglaterra – Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi –, que aborda o conceito de probabilidade. Os professores, de maneira geral, apresentavam um conhecimento intuitivo sobre probabilidade e, consequentemente, certa instabilidade em relação ao domínio de conhecimentos de noções ligadas a esse conceito. O processo formativo tem direcionado os professores a aprofundar os conhecimentos relativos ao conteúdo comum e especializado e os conhecimentos do conteúdo e do ensino, o que vem sendo potencializado por meio da reflexão individual e coletiva.

Palavras-chave: Formação de Professores. Conhecimento Profissional Docente. Ensino de Probabilidade.

Abstract

This paper presents part of an undergoing study in the context of continued education. We discuss ideas and concepts that support the teaching of probability to students at the early years of elementary school, and analyze the replies and reflections of a group of teachers - tutors and licensured in mathematics - involved in one activity of one development session whose theoretical basis lays on a teaching program developed by researchers at the Oxford University, in England, namely Bryant, Nunes, Evans, Gottardis and Terlektsi, that works with the concept of probability. The teachers, in general, demonstrated some intuitive knowledge of probability and, hence, some degree of instability regarding the command of knowledge on notions related to that concept. The continued education process has directed teachers to increase their knowledge related to the common core and the specific ones and the knowledge related to content and teaching, which have been enhanced by means of individual and collective reflections.

Keywords*: Teacher Development. Professional Teaching Knowledge. Probability Teaching.*

1 Introdução

Nesta publicação apresentaremos o recorte de uma pesquisa de Doutorado em Educação Matemática que está sendo desenvolvida pela primeira da autora, em um contexto de formação continuada, com a colaboração de outros professores e investigadores. Os participantes desta investigação – cujo objetivo é analisar aspectos relativos à Probabilidade e ao seu ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental, que possam contribuir para o desenvolvimento profissional docente – são professores, pedagogos e licenciados em Matemática, que ensinam para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Neste estudo, analisamos as respostas e as reflexões desses professores, expressas durante o desenvolvimento de uma atividade apresentada em um dos instrumentos de formação e pesquisa. Procuramos perceber qual é a compreensão desses professores a respeito de ideias relacionadas ao conceito de probabilidade.

Descreveremos resultados de uma investigação desenvolvida no Brasil, com professores em contexto de formação continuada, e uma realizada, em Portugal, com professores em formação inicial, por meio dos quais pretendemos, sobretudo, discutir a relevância desta pesquisa. Apresentaremos a base teórica relativa à probabilidade – Nunes, Bryant, Evans e Barros (2011), Bryant e Nunes (2012) – e a elementos do conhecimento matemático para o ensino desse tema – Ball, Thames e Phelps (2008). Introduziremos também os participantes e o contexto de pesquisa, a atividade do instrumento de formação e pesquisa analisado e as informações produzidas – resoluções dos professores – e, por fim, nossas interpretações a respeito desses resultados.

1 No intuito de preservar o anonimato dos participantes de pesquisa, nesta publicação daremos nomes de pedras preciosas para nomear os professores.

2 Desenvolvimento

2.1 Estudos que nos Ajudaram a Refletir Sobre a Relevância Desta Pesquisa

A literatura ainda nos apresenta poucos estudos a respeito do conhecimento de professores sobre o ensino e a aprendizagem de Probabilidade. Neste texto apresentaremos brevemente, dois deles: um desenvolvido no Brasil por Campos e Pietropaolo (2013) e o outro realizado em Portugal, por Fernandes, Serrano e Correia (2016).

O estudo de Campos e Pietropaolo (2013) envolveu 27 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental da rede estadual paulista num contexto de formação continuada. No recorte desse estudo, os autores apresentaram uma análise das concepções e das práticas desses professores com relação aos processos de ensino e de aprendizagem de noções sobre o ensino de probabilidade nos 4.º e 5.º anos do Ensino Fundamental, identificados em um instrumento diagnóstico, aplicado com o intuito de delinear a imagem conceitual, segundo a perspectiva de Tall e Vinner (1981) constituída pelos professores em relação à probabilidade ... e em relação aos conhecimentos pedagógicos, segundo a perspectiva de Ball, Thames e Phelps (2008) concernentes a esse mesmo tema.

No que se refere aos resultados, os pesquisadores concluíram que as noções que sustentam o conceito de probabilidade não foram desenvolvidas pelos professores investigados em suas atividades docentes, pois eles não possuíam um repertório de conhecimento e situações e também porque desconsideravam a relevância desse tema. Segundo os pesquisadores, eles possuíam pouco conhecimento de conteúdo especializado para ensinar probabilidade; a imagem conceitual construída pelos professores em relação ao ensino de probabilidade nos anos iniciais tinha relação, principalmente, com a razão entre dois números inteiros positivos.

Assim, Campos e Pietropaolo (2013) chamam-nos a atenção para a necessidade de cursos de formação inicial e continuada que discutam a relevância das noções que dão sustentação ao conceito de probabilidade e as dificuldades de alunos, ao iniciarem a construção do conhecimento desse tema.

Na investigação desenvolvida por Fernandes et al. (2016) participaram 63 alunos do 2.º ano do Curso de Licenciatura em Educação Básica, de uma universidade do Norte de Portugal. Os investigadores, com o argumento de que "a formação do professor dos primeiros anos de escolaridade é determinante e crucial para garantir uma adequada formação do aluno" (Fernandes et al., 2016, p.84-85), estudam o desempenho de futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade em uma temática específica da probabilidade: acontecimentos certos, definidos num processo de extração (sem reposição) de bolinhas de gude (berlindes) de um saco[2].

Mediante o observado, os investigadores defendem a necessidade deque, durante sua formação, futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade vivenciem experiências aleatórias em que façam uso do raciocínio probabilístico em ambientes com eventos não necessariamente equiprováveis, para que tais experiências possam ser potencializadas na sala de aula.

Os estudos aqui descritos apontam para a necessidade de formações docentes e de investigações com professores, como alternativas para o desenvolvimento de propostas de ensino que contribuam para ampliar o conhecimento do professor a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem de probabilidade.

2.2 Base Teórica

O programa **"**Compreensão das crianças sobre probabilidade e risco" (Nunes et al., 2011)[3] propiciou-nos a base e as inspirações teóricas desta investigação, para fundamentar um processo de formação continuada para professores sobre questões didáticas referentes ao ensino de probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Esse programa foi desenvolvido com o objetivo de investigar formas de melhorar a compreensão de crianças do 5.º ano sobre o conceito de probabilidade e, consequentemente, desenvolver novos métodos de ensino a respeito desse tema.

A proposta do programa é um ensino que leve à compreensão de quatro "demandas cognitivas"[4] (Bryant & Nunes, 2012), cuja abordagem se relaciona às ideias que formam o conceito de probabilidade: "entendimento da aleatoriedade, elaboração do espaço amostral, comparação e quantificação de probabilidades e o entendimento da correlação ou (relação entre eventos)" (p.3-4).[5]

A respeito da aleatoriedade, Nunes, Bryant, Evans & Barros (2011) conjecturam que dificuldades surgem quando são apresentadas atividades de caráter probabilístico: não sabemos, por exemplo, num conjunto de eventos possíveis que conhecemos, quais deles vão acontecer ou quando um evento particular acontecerá ou em que ordem acontecerão.

2 Os resultados discutidos pelos autores são em relação às respostas dos professores à seguinte tarefa (atividade): "Num saco há 4 berlindes vermelhos, 3 verdes e 2 brancos. a) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor verde? Por quê? b) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor vermelha e outro de cor verde? Por quê? c) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cada cor? Por quê?" (Fernandes et al., 2016, p. 88).

3 Children's Understanding of Probability and risk (Nunes et al., 2011)

4 cognitive demands

5 "Understanding randomness, Working out the sample space, Comparing and quantifying probabilities, Understanding correlation (or relationships between events)" (Bryant & Nunes, 2012, p. 3-4).

A incerteza presente nesse tipo de acontecimento é devida à aleatoriedade.

Em relação ao espaço amostral, eles afirmam que o conjunto de eventos possíveis desempenha um papel importante que, muitas vezes, é subestimado. e que é preciso desenvolver a capacidade de se trabalhar com qualquer espaço amostral, em qualquer atividade, para compreender e calcular as probabilidades de eventos específicos. Assim, determinar o espaço amostral de um evento constitui-se como essencial para a resolução de qualquer problema de probabilidade "e em muitos é o mais importante, já que a solução é bastante óbvia para alguém que conheça todas as possibilidades" (Bryant & Nunes, 2012, p. 5)[6]. Nunes et al. (2011) argumentam que a determinação do espaço amostral em problemas de probabilidade depende tanto do raciocínio confractual – situações ou eventos que não aconteceram, mas que poderiam ter acontecido – como do raciocínio combinatório.

A quantificação de probabilidades refere-se ao cálculo da probabilidade de um evento específico – cálculos proporcionais (expressa por um número decimal, uma porcentagem ou uma proporção), visto que cada probabilidade é, em si, uma proporção entre um resultado específico e o conjunto de resultados possíveis (Nunes et al., 2011); refere-se também à comparação da força de duas ou mais probabilidades: "a probabilidade pode ser a mesma em amostras de diferentes tamanhos, porque as probabilidades baseiam-se inteiramente em proporções" (p. 5).

A correlação é uma forma de raciocínio, segundo os autores, envolvido na determinação da natureza e da força de uma relação mútua entre duas variáveis. "Esse raciocínio exige o reconhecimento que as relações entre variáveis não são absolutas, mas existem em graus (Ross & Primos, 1993) e, assim, envolvem raciocínio probabilístico" (Nunes et al., 2011). A compreensão do risco é vista como mais um aspecto do pensamento probabilístico e depende do raciocínio correlacional.

Para a análise dos conhecimentos observados no instrumento de formação e pesquisa que será apresentado nesta publicação, adotamos os estudos de Ball et al. (2008), segundo os quais categorias de conhecimentos sobre a Matemática devem ser consideradas por professores e pesquisadores: Conhecimento do Conteúdo – Comum e Especializado –; Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes; e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino.

Tais categorias chamam-nos a atenção para a necessidade de o professor conhecer os conteúdos da Matemática – "o que os professores necessitam saber sobre Matemática" (Ball et al., 2008) –, mas também compreender ideias envolvidas no conceito que está sendo proposto aos alunos; e, mais ainda, compreender o próprio aluno: como ele aprende, como raciocina matematicamente.

Foi nessa perspectiva nossa busca por refletir com os professores durante o processo formativo e analisar quais eram as suas percepções, "como e onde poderiam os professores usar esse conhecimento [no nosso caso, sobre probabilidade], na prática" (Ball et al., 2008).

2.3 Participantes e contexto da pesquisa

Participaram desta investigação 19 professores, pedagogos e licenciados em Matemática, pertencentes ao quadro efetivo da Rede Estadual de Ensino de São Paulo, que se propuseram a discutir e refletir sobre questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem de probabilidade, num contexto de formação e pesquisa, desenvolvido no âmbito do *Projeto Observatório da Educação*, um projeto – financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES e coordenado, no âmbito da universidade, por um dos autores desta publicação –, cuja finalidade é promover e analisar o desenvolvimento profissional de professores, quando esses estão inseridos em um processo de implementação de inovações curriculares a respeito do processo de ensino e aprendizagem de Matemática e de reflexão sobre as práticas docentes.

2.4 Instrumento de formação e pesquisa

Propusemos três atividade com bolinhas coloridas, registrado em protocolo – Figura 1.

Figura 1 - Protocolos exemplares: Atividades com bolinhas

Atividades com bolinhas

Nesta atividade, eu irei retirar bolinhas coloridas de um saco como se fossem num sorteio. Antes de cada retirada, você deve anotar na tabela abaixo suas previsões de cores e, em seguida, o sorteio real de cada retirada:

Atividades 1 e 2 - Sem reposição Atividade 3 - Com reposição										
Retiradas	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª
Previsões										
Sorteios										
O que fez você manter suas previsões?										
O que fez você mudar suas previsões?										

Fonte: Os autores.

As atividades – *Atividade 1*; *Atividade 2;* e *Atividade 3* – têm a seguinte estrutura geral:

Bolinhas coloridas (duas cores) são colocadas em um saco para serem sorteadas; os participantes são convidados a fazer previsões sobre quais as cores que serão retiradas do saco a cada sorteio – a quantidade de bolinhas de cada cor é informada antes que o jogo seja iniciado –; o jogo inicia quando os participantes fazem suas previsões sobre qual cor da bolinha é a mais provável de ser retirada, ou seja, qual das duas cores apresenta maior chance de ser retirada; eles devem

6 *"and in many it is the most important, since the solution is often quite obvious to someone who knows all the possibilities"* (Bryant & Nunes, 2012, p. 5).

anotar suas previsões antes que o sorteio seja realizado; em seguida, o professor que coordena a atividade, sorteia e retira uma bolinha por vez e mostra aos participantes, que, ao final de cada atividade (experimento) são motivados a justificar o porquê de manter ou não suas previsões anteriores, a cada sorteio (retirada); durante os sorteios o professor coordenador incentiva-os a dizer quantas chances existem para cada cor e a fazer comparações, antes de sua próxima previsão.

Essa atividade foi proposta por Bryant, Nunes, Evans, Gottardis e Terlektsi (2012) para ser desenvolvida com crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental, com o objetivo de desenvolver o raciocínio sobre eventos que são mais prováveis ou menos prováveis de acontecer. No nosso caso, o intuito, ao propor e desenvolvê-la com os professores, em um encontro de formação, foi levá-los a refletir sobre esse tipo de raciocínio e apresentar a possibilidade de utilizar a atividade em suas aulas.

Por meio dessas atividades é possível fazer algumas previsões globais, mesmo não sendo possível afirmar com certeza o que acontecerá em cada evento (resultado de cada sorteio). Pensar que, quando os eventos são aleatórios, *"(...) não significa necessariamente que todos os resultados são igualmente prováveis, já que alguns podem ser mais prováveis do que outros*[7] *"* (Bryant et al., 2012, p.31) – Atividades 1 e 2: sem reposição; pensar ainda na independência entre eventos – Atividade 3: com reposição.

Os autores avaliam que o mais importante, nessas atividades, é que, ao final, os alunos possam perceber ser possível pensar logicamente sobre eventos aleatórios.

Pretendíamos, portanto, explorar com os professores ideias associadas à probabilidade, como, por exemplo, a de "incerteza". Além disso, pretendíamos raciocinar sobre mudanças de probabilidades: nos dois primeiros jogos explora-se, inicialmente a incerteza, até chegar à certeza, quando há apenas uma cor no saco, e os participantes devem ter certeza sobre o resultado. Assim, eles devem ser motivados a explicar a mudança da incerteza para a certeza.

A terceira atividade permitiu explorar a equiprobabilidade entre eventos. A equiprobabilidade, nesse caso, é garantida, visto que a quantidade de bolinhas de cada cor é a mesma – elas são repostas no saco, após cada sorteio. Assim os professores foram levados a perceber que as probabilidades não mudariam e a pensar sobre a independência entre os eventos.

Dessa maneira, com o desenvolvimento dessas atividades, procuramos estimular reflexões que ajudam na construção do pensamento probabilístico.

Ressalte-se que, após os jogos, duas questões foram apresentadas aos professores (participantes), a fim de que eles refletissem sobre o ocorrido:

- *O que fez você manter suas previsões?*
- *O que fez você mudar suas previsões?*

A esse respeito e sobre os demais resultados, discutiremos na próxima seção.

2.5 Informações produzidas em duas sessões de formação

Reiteramos que essa atividade foi desenvolvida em sessões do processo formativo (4.ª e 5.ª) e, em sessões anteriores, havíamos desenvolvido outras atividades, por meio das quais discutimos com os professores sobre ideias relativas à probabilidade, envolvendo a noção de acaso, em que eles puderam refletir a respeito de alguns eventos do dia a dia e classificá-los, utilizando expressões ligadas à temática, como*:* "acontecerá com certeza"; "talvez aconteça"; "impossível acontecer"; "mais provável"; "menos provável"; "improvável".

Para esta comunicação apresentaremos uma síntese das discussões ocorridas durante o desenvolvimento dos jogos e, sobretudo, nos ateremos à análise dos protocolos gerados no *Jogo 1* e descreveremos também alguns registros, gravados em vídeo, de depoimento dos professores.

3 Discussão

3.1 Os professores vivenciam os jogos: primeira sessão

Para o Jogo 1, colocamos dez bolinhas no saco: seis vermelhas e quatro azuis; nesse caso, o sorteio foi realizado sem a reposição das bolinhas. Conforme orientação descrita anteriormente, antes de dar início ao jogo, informamos aos professores a quantidade de bolinhas de cada cor contidas no saco – diferentemente do que propunham Bryant et al., nós utilizamos um saco com um fundo falso[8] –; em seguida, os motivamos a fazer suas previsões a respeito de qual cor seria mais provável de ser retirada do saco e a anotá-las, antes que realizássemos o primeiro sorteio; após cada sorteio, incentivávamos a fazer novas previsões sobre as próximas bolas a serem retiradas e a refletir sobre as probabilidades de ocorrência de um ou outro resultado; por último, ao término do jogo, solicitamos que descrevessem o que os havia levado a manter ou mudar suas previsões, a cada retirada.

No que se refere à pergunta sobre manter as previsões, os professores registraram nos protocolos argumentos como:

> Intuição e probabilidade (aleatoriedade), conforme a **quantidade** maior [ênfase adicionada]. (Professoras Rubi, Diamante e Tanzanite)
> A certeza de que iria sair naquela cor, apoiada na **quantidade** [ênfase adicionada]. (Professora Alexandrita)
> A **quantidade** de bolinhas de uma determinada cor. Como a **quantidade** de **vermelha era mai*or*** *do que a de azuis, mantive minhas previsões nela* [ênfase adicionada]. (Professora Ametista).

Assim como essas, outros 13 professores se apoiaram principalmente na justificativa de que as previsões se mantinham, considerando a quantidade de bolinhas azuis ou

7 does not necessarily mean that all outcomes are equally likely, as some may be more likely than others (Bryant et al., 2012, p. 31).

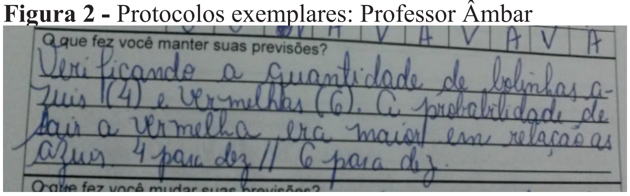
8 A utilização do fundo falso como recurso ajudou os pesquisadores a apresentar determinados resultados que favorecessem a discussão do grupo de professores a respeito da ocorrência de determinado evento ou não.

vermelhas contidas no saco. Esse tipo de resposta também foi observado em experimentos com crianças, realizados por Fischbein & Groosman (1997) e Piaget & Inhelder (1975).

Piaget e Inhelder (1975), em investigação com crianças em que elas tinham que decidir em qual de dois montes de cartas (contendo cartas com e sem cruz) apresentaria maior chance de tirar uma carta com cruz, ou se a chance seria a mesma nos dois montes, observaram que as crianças baseavam suas escolhas na quantidade absoluta de casos favoráveis e não estabeleciam relações entre os dois montes, a partir do número de cartas com cruz (casos favoráveis) e do número total de cartas em cada monte (casos possíveis).

Em nosso estudo, o professor Âmbar, diferentemente dos demais, nos pareceu apresentar um tipo de raciocínio relacionado à concepção clássica da probabilidade. Ele assim se expressa:

Figura 2 - Protocolos exemplares: Professor Âmbar

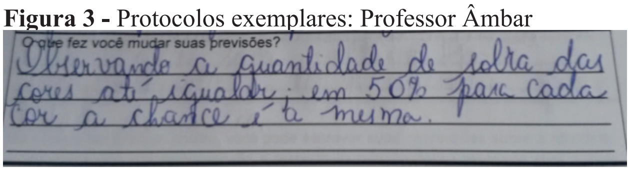

O que fez você manter suas previsões?
Verificando a quantidade de bolinhas azuis (4) e vermelhas (6). a probabilidade de sair a vermelha era maior em relação as azuis. 4 para dez // 6 para dez.
O que fez você mudar suas previsões?

Fonte: Dados da pesquisa.

O professor apresenta evidências de que ele identificou a relação de probabilidade entre os eventos, ou seja, a probabilidade seria dada pela razão entre o número de casos favoráveis (o número de casos favoráveis, na visão dele, estava diretamente ligada à quantidade maior de bolinhas vermelha contidas no saco) e o número total de casos possíveis. Pudemos observar que as ideias intuitivas desse professor se aproximam de uma definição formal de probabilidade.

Em relação à mudança de suas previsões – Figura 3 –, esse professor justifica também que a mudança ocorreu em virtude da quantidade de bolinhas restantes no saco; porém aqui ele observa que, em alguns momentos, as chances eram as mesmas para as duas cores.

Figura 3 - Protocolos exemplares: Professor Âmbar


O que fez você mudar suas previsões?
Observando a quantidade de sobra das cores até igualar; em 50% para cada cor a chance é a mesma.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em discussão, a professora Malaquita, da mesma forma que o professor Âmbar, percebeu que as chances iam sendo modificadas e, em alguns momentos, se aproximavam: "À medida que saíam as bolinhas vermelhas que tinham maior quantidade, mais iam se igualando as bolas azuis das vermelhas e aumentava a probabilidade da aleatoriedade (incerteza) [ênfase adicionada]".

Nesse caso, chama-nos a atenção que a professora destaca que o grau de incerteza aumenta, quando a chance de ocorrência dos eventos é a mesma. Segundo Santana (2011), apoiada em Novaes e Coutinho (2009), esse é um dos saberes necessários ao indivíduo para a compreensão da probabilidade: "pois há necessidade de o indivíduo compreender que muitas questões do cotidiano são de natureza aleatória, saber estimar o grau de probabilidade de cada uma delas e nortear suas tomadas de decisões" (p. 90).

Ainda a respeito da mudança de previsão, da mesma forma que justificaram a manutenção, sete professores fizeram referência às quantidades. A exemplo desses, as professoras Opala: *"Também de acordo com as quantidades"* e Peridoto: *"Quando percebi que o que realmente importava era a quantidade, eu mudei"*.

Uma professora, Jade, justifica sua mudança dada a sequência de retirada de bolinhas vermelhas.

A respeito dessa forma de pensamento, Bryant e Nunes (2012) afirmam: "Um erro comum cometido por adultos e crianças é ignorar a independência de eventos sucessivos em uma situação aleatória" (p. 4).[9] No caso da professora investigada, aconteceu o que os autores denominam de "recência negativa"[10] – comum entre adultos –, que acontece quando se julga "que, após uma série de resultados, um resultado diferente é mais provável na próxima rodada." (p. 4).[11]

O ocorrido favoreceu, portanto, a discussão e a reflexão do grupo a respeito de erros de efeito de "recência positiva" e de efeito de "recência negativa" (Bryant & Nunes, 2012, p. 4). A seguir, trechos dessa discussão:

> Pesquisadora: alguns pesquisadores, como, por exemplo, Bryant e Nunes, discutem a respeito de dois tipos de erros que normalmente ocorrem quando se trata de fenômenos aleatórios: erros de recência positiva, percebida em crianças, quando elas imaginam que, após uma sequência de resultados, esse mesmo resultado provavelmente ocorra na próxima vez; e o erro de recência negativa.
>
> A Professora Safira hipotetizou: mesmo sendo pouco provável, é possível que as seis bolas vermelhas sejam retiradas na sequência; por serem mais, isso pode acontecer.
>
> A Professora Ametista confirma: É! É difícil, mas não é impossível.
>
> Pesquisadora: em ambos os casos, segundo esse estudo que eu citei, apresentam erros comuns que ocorrem em razão de que adultos e crianças ignoram a independência de eventos sucessivos em uma situação aleatória.

Quando argumentamos, com base nas pesquisas desenvolvidas por Bryant e Nunes e outros pesquisadores, como Gilovich et al. (1985) e Chiesi & Primi (2009), citados por Bryant &Nunes (2012) sobre o fato de as crianças, normalmente, pensarem diferente dos adultos nesse tipo de evento, alguns professores disseram que gostariam de ver na sala de aula deles como seria.

9 A common mistake made by adults and children, is to disregard the independence of successive events in a random situation.

10 negative recency

11 that, after a run of one kind of outcome, a different outcome is more likely the next time round.

Nesse sentido, acreditamos *a priori*, que neste episódio temos evidências de que o contato com resultados de pesquisa, aliado à reflexão individual e coletiva sobre o experimento, estimulou nos professores o desejo de ampliar seus conhecimentos a respeito do conteúdo e do estudante (Ball et al., 2008). A esse respeito consideramos que o ocorrido permite aproximar a formação desenvolvida para a coleta de informações para esta pesquisa ao que é sugerido por Serrazina (2013) e Zeichner (1993). Os autores defendem a oferta de formação a professores, favorecendo-lhes o cultivo da reflexão individual e coletiva, ao relacionar resultados de pesquisa à prática.

3.2 Os professores vivenciam os jogos: segunda sessão

Na segunda sessão, quando retomamos as discussões da sessão anterior, o grupo de professores sugeriu que desenvolvêssemos mais uma vez o jogo, mas dessa vez sem truque algum, ou seja, que realizássemos os sorteios com um saco sem o fundo falso. Segue, nos próximos parágrafos, a descrição do ocorrido:

Para certificá-los de que não haveria segredos, a pesquisadora mostra o saco aos professores e as bolinhas que serão sorteadas: seis verdes e quatro amarelas – Figuras 4 – e esclarece que os sorteios ocorrerão sem reposição das bolinhas.

Figuras 4 – Sequência de imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

Em seguida, a pesquisadora dá início ao sorteio; antes, porém, ela os incentiva a fazer suas primeiras previsões – Figuras 5.

Figuras 5 - Sequência de imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

Os professores, com exceção da professora Alexandrita (que comemora o acerto), apostaram na bolinha verde, porém a primeira bola retirada foi de cor amarela – Figuras 6.

Figuras 6 – Sequência de imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

Após a primeira retirada, os professores pediram que um deles sorteasse a próxima bolinha, e assim o fizeram duas vezes consecutivas – Figuras 7.

Figuras 7– Sequência de imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

A segunda bolinha sorteada pela professora Azurita foi de cor amarela; antes do sorteio da próxima bolinha, que foi retirada pela professora Tanzanite, a professora Turquesa afirma ter apostado na cor verde, mas diz: *"Se sair amarela eu vou querer ver todas as bolinhas."*. Mas isso não ocorreu, e assim ela acertou na sua previsão, pois a terceira bola retirada foi da cor verde.

A pesquisadora retira a quarta bolinha, também verde – Figura 8.

Figura 8 – Imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

Antes da retirada da próxima bolinha, a pesquisadora questiona: *"Vocês sabem quantas bolinhas ainda tem aqui?* [referindo-se às bolinhas que restavam no saco]". Os professores respondem: *"Quatro verdes e duas amarelas"*. A pesquisadora questiona ainda: *"Vocês vão mudar o palpite? Ou vocês vão permanecer com as apostas?"*.

Dessa vez, a maioria dos professores apostou na cor verde. E essa foi a cor sorteada novamente (quinta bola retirada do saco) – Figura 9.

Figura 9 – Imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

O sorteio segue; os professores apostam na bolinha verde para a sexta retirada, e a pesquisadora retira uma bolinha verde. Nesse momento, a professora Safira chama a atenção: *"Tem muita verde"*.

A pesquisadora pergunta: *E agora?* [referindo-se às bolinhas contidas no saco]. Os professores respondem: *Tem duas e duas, 50% pra cada*. As previsões divergiram nesse momento: alguns apostaram na amarela, outros na verde; saiu verde (sétima retirada).

E o jogo continua; os professores seguem apostando na amarela. Ao serem questionados eles apresentaram argumentos apoiados mais uma vez na comparação entre as quantidades, observando aquela cor cuja quantidade de bolinhas era maior.

A oitava bola retirada do saco foi na cor amarela; em seguida, a Professora Turquesa alerta: *Voltou a 50% novamente, né?*. E a pesquisadora questiona: *E agora?*. As previsões divergiram mais uma vez. Esperávamos que nesse momento, alguém chamasse a atenção para o fato de que o a ocorrência do próximo evento não dependia dos eventos anteriores.

Terminado o jogo, buscamos sintetizar os conceitos que foram vivenciados, conforme registro de áudio e vídeo, a seguir: inicialmente questionamos o que eles haviam percebido durante o desenvolvimento da atividade. A professora Esmeralda afirma: "*Que o resultado foi aleatório"*.

Questionamos, em seguida, se a retirada de uma bolinha esteve condicionada à retirada da outra. Os professores afirmaram negativamente. Diante disso, questionamos o que mais eles haviam percebido; pois esperávamos que eles chegassem à conclusão de que para aquela experiência, existiam relações entre os eventos; que eles percebessem que alguns eventos, em determinados momentos tinha maior ou menor chance de ocorrência.

As professoras Diamante e Painite se manifestam e afirmam: *Que em alguns momentos tinha mais chance de sair uma bolinha verde e* não saia. Embora as chances fossem maior, saía *a amarela.* Questionamos, por fim sobre as ideias que envolvem eventos certos; sobre o fato de que, inicialmente sabíamos quais eventos possíveis, mas não tínhamos a certeza de qual seria o resultado do sorteio; e que isso levou um tempo até podermos afirmar, com certeza, qual seria o resultado. A Professora Malaquita, conclui: *Isso só aconteceu no final. Teve alguns momentos que tinha a mesma chance, quando tinha duas de cada cor: duas verdes e duas amarelas.*

Nessa discussão, encontramos evidências de resultados relativos à ampliação da base de conhecimento dos professores em relação ao conteúdo (Ball et al., 2008), pois no que se refere à linguagem, as falas dos professores já referenciaram expressões que, anteriormente ao processo formativo, pareciam não fazer parte de seu repertório de conhecimento. No entanto, ainda não estávamos certos se, naquele momento, eles tinham a compreensão de que tais expressões traduzissem ideias subjacentes ao conceito de probabilidade.

Diante disso, demos continuidade às discussões, reafirmamos que conceitos como aleatoriedade, independência entre eventos, incerteza ou certeza são conceitos probabilísticos e que seriam retomados em sessões futuras para melhor aprofundamento e compreensão:

> Pesquisadora: Gostaria de chamar a atenção para um aspecto que nós observamos durante a formação: quando vocês falam "Eu aposto na verde porque tem mais bolinhas verdes; eu não aposto na amarela porque tem menos", o que estamos percebendo [referindo-se às discussões realizadas entre a pesquisadora e sua orientadora]: que vocês estão apostando naquela cor, pensando apenas na quantidade, é isso?
> Professora Safira: Eu olhava o que tinha mais.
> Professor Citrino: Mas eu comparava os dois. [esse professor parece ter percebido a relação]
> Pesquisadora: Alguém mais pensou na relação?
> Professores: [Silêncio].
> Nesse momento, o professor Âmbar chama e pede a palavra – Figura 10:
> Professor Âmbar: Eu fiquei pensando agora na questão do dois

> pra dez. Eu posso dizer então que a probabilidade de sair amarela aqui é de 4 pra 10? Eu posso usar esse termo? Eu tô percebendo; eu tô com dúvida um pouco maior em qual sentido? É que eu tô percebendo um conceito maior em relação a esse jogo. Um conceito que eu possa entender melhor; por exemplo, no caso dessas aqui: a certeza da incerteza; a gente começa com uma incerteza em relação à quantidade, mas nós vamos ter essa visão da quantidade em relação à cor também.

Figura 10 – Imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

A pesquisadora deixa que ele continue expressando suas interrogações: *eu tenho uma incerteza porque pode ser que seja retirada uma verde ... em relação ao conceito: tem algum conceito da aleatoriedade? Que diga o que é? Como é? Como é feito, calculado?* (Professor Âmbar).

A esse respeito, assim nos expressamos:

> Pesquisadora: A aleatoriedade é um dos conceitos discutidos no estudo de probabilidade; apresenta-se em experimentos em que não podemos determinar com certeza quais resultados serão obtidos; a aleatoriedade... como pudemos ver nas atividades que já desenvolvemos até agora, como aquela do Computer Game[12] [referindo-se a um jogo anterior vivenciado pelo grupo], nela nós não podíamos garantir que determinado resultado viria; nem que obedeceria a uma determinada ordem.

O professor Âmbar afirma: Por isso a questão da incerteza, né?. Reafirmamos que a aleatoriedade e a incerteza são ideias associadas ao conceito de probabilidade.

A professora Malaquita conclui: Mesmo que tenha cinco verdes e cinco amarelas, não existe a certeza de que vai sair ou verde ou amarela; vai sair uma ou outra, mas não tem como ter a certeza. – Figura 11:

Figura 11 – Imagens exemplares de vídeo

Fonte: Os autores.

Parece-nos, aqui, que os professores começam a familiarizar-se com a probabilidade, percebendo tratar-se de um conceito no qual estão envolvidos experimentos que, embora não possibilitem determinar com certeza os resultados que serão obtidos, pode-se prever os resultados possíveis.

Assim a discussão avança:

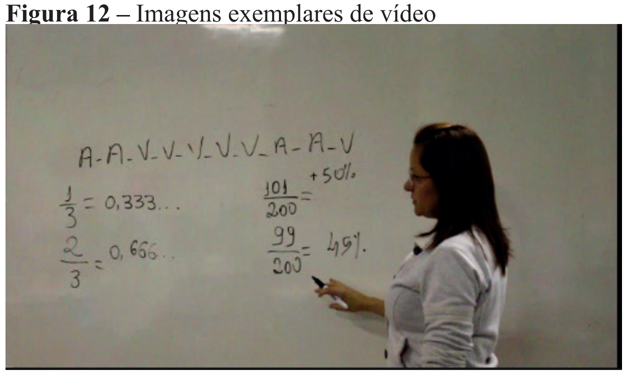
> Professor Âmbar: Tem que fazer uma correspondência, né? Um para dez; quatro para dez...Tem essa coisa de seis para dez. Tem essas questões ainda.
> Professora Ametista: É! É fração, não é porcentagem.

Diante dessas reflexões, observamos que os professores perceberam a necessidade de olhar para aquela situação mais profundamente; eles pareciam começar a compreender que em situações que envolvem conceitos probabilísticos há a necessidade de olhar para as relações associadas a cada experimento; eles apresentaram indicações de que naquele momento eles percebiam que cada evento estava associado uma probabilidade de ocorrência.

> Âmbar**:** Sim. É aí que eu quero chegar também; eu tenho quatro para dez; se você vai discutir; essa é uma questão que eu queria entender mais também.

Diante dos questionamentos, sentimos a necessidade de aprofundar um pouco mais, no que se refere à quantidade e às relações, conceitos intrínsecos à probabilidade. A Figura 12 é ilustrativa desse momento, cuja discussão descreveremos a seguir.

Figura 12 – Imagens exemplares de vídeo



Fonte: Os autores.

Nesse momento, encaminhamos a discussão no sentido de que os professores pudessem perceber que há uma diferença entre olhar para a quantidade numérica e olhar para a relação envolvida entre as quantidades:

> **Pesquisadora:** Se considerarmos, por exemplo, a diferença entre as quantidades analisadas duas a duas [referindo-se às quantidades 1 e 2 dos numeradores do primeiro par de frações e às quantidades 101 e 99, relativas ao segundo par], são muito próximas: no primeiro caso, a diferença é de 1 e, no segundo, é de 2. Se formos comparar essas quantidades, elas até parecem próximas. Mas, se vocês olharem para a fração ou relação entre as quantidades presentes no numerador e denominador ou, então, para as razões, teremos quais valores?
> **Realizando o cálculo com o auxílio da calculadora, o professor** Âmbar **responde:** para $\frac{1}{3} = 0,3\ ...$; $\frac{2}{3} = 0,666...$. e as razões $\frac{101}{200} = +50\ \%$ $\frac{9}{200} = 49\ \%$.

12 Trata-se de uma atividade sobre aleatoriedade, composta por seis jogos, com o objetivo de trabalhar com sequências aleatórias e padrões proposta no manual *Teaching primary school children about probability*, de Bryant et al. (2011).

Pesquisadora: Olhando para esses resultados, observamos que os percentuais são?
Professora Diamante: No primeiro par de razões são de 33% e aproximadamente 67%, respectivamente, e no segundo caso é maior que 50% na primeira razão; e na segunda, 49%.
Pesquisadora: Ou seja, embora nos dois casos a diferença numérica das quantidades seja praticamente a mesma, se considerarmos a relação envolvida nessa situação, podemos perceber que essa diferença percentual, no primeiro caso é de 33% e, no segundo, de apenas 1%.

Acreditamos que a experiência vivenciada nessas sessões de formação durante o desenvolvimento dessa atividade favoreceu a compreensão de noções sobre o acaso e a incerteza, manifestadas intuitivamente pelos professores, a partir da observação dos eventos ocorridos nesse experimento.

3.3 Nossas reflexões acerca do observado: uma primeira interpretação

Numa primeira análise, concluímos que os professores, no geral, apresentaram argumentos similiares àqueles apresentados pelas crianças investigadas por Bryant et al. (2012), ou seja: suas justificativas estavam sustentadas no número maior de bolas – no caso deles, vermelhas ou verdes – contidas no saco. Esse fato nos permitiu discutir questões ligadas ao ensino dessa temática.

No geral, os professores perceberam as mudanças de probabilidades; e referiram-se à presença da equiprobabilidade entre os eventos em alguns momentos do jogo – *"A probabilidade agora é a mesma"* (Professora Jade) – e, embora não tenham feito qualquer referência à incerteza entre os eventos, quando havia apenas três bolas no saco (duas azuis e uma vermelha), eles sinalizaram que, dependendo da cor sorteada, o evento poderia ser classificado como "certo" – *"Agora não pode tirar vermelho, se não o jogo morre"* (Professora Turquesa).

4 Conclusão

Assim, concluímos que os professores possuíam, naquele momento, ideias intuitivas em relação à probabilidade e outras ideias associadas a esse conceito, como por exemplo, sobre o acaso, sobre eventos certos e dependência entre eventos. Portanto, consideramos ser necessário desenvolver outras atividades para que, analisando coletivamente as estratégias intuitivas dos professores, pudéssemos ajudá-los na transição do conhecimento intuitivo para o conhecimento explícito a respeito da probabilidade.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008r). Content knowledge for teaching: what makes it special? *J Teacher Educ 59*(5), 389-407. doi: 10.1177/0022487108324554.

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: A literature review*. London: Nuffield Foundation.

Bryant, P., Nunes, T., Evans, D., Gottardis, L., & Terlektsi, M. E. (2012).*Teaching primary school children about probability. Teacher Handbook.*

Campos, T. M. M., & Pietropaolo, R. C. (2013). Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. In R. Borba, & C. Monteiro (Orgs.), *Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática* (pp. 55-91). Recife: UFPE.

Fernandes, J. A., Serrano, M. M. G., & Correia, P. F. (2016). Definição de acontecimentos certos na extração de berlindes de um saco. *Acta Scientiae – Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, *18*(1), 83-100.

Fischbain, E., & Groosman, A. (1997). Schemata and Intuition in combinatorial reasoning. *Educ. Studies Mathem.*, 34(1), 27-47.

Nunes, T., Bryant, P., Evans, D., & Barros, R. (2011). *Children's understanding of probability and risk.* Oxford: Department of Education, University of Oxford.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1975). *The origin of idea of chance in children*. New York: Norton.

Santana, M. R. M. (2011). *O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Serrazina, M. L. (2013). O Programa de Formação Continuada em Matemática para professores do 1º ciclo e a melhoria do ensino da matemática. *Da Investigação às práticas*, *3*(2), 75-97.

Zeichner, K. (1993). *Formação reflexiva de professores: ideias* e práticas. Lisboa: Educa.