INVESTIGAÇÃO COM ALUNOS DO 5º E 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL ACERCA DA RESOLUÇÃO DE UMA SITUAÇÃO QUOCIENTE: UM OLHAR PARA OS ESQUEMAS E REPRESENTAÇÕES

Angélica da Fontoura Garcia Silva [1]
Universidade Anhanguera de São Paulo
Maria Gracilene de Carvalho Pinheiro[2]
Universidade Anhanguera de São Paulo
Tânia Maria Mendonça Campos[3]

RESUMO

Este estudo foi desenvolvido visando analisar a compreensão de estudantes do 5º e 9º Ano do Ensino Fundamental acerca do conceito de fração em situações quociente. Para tanto, foi proposta uma situação elaborada por Nunes e sua equipe por meio da qual esse significado é explorado. Trata-se de alunos de professores que lecionam em escolas da Rede Estadual de Ensino de São Paulo, participantes de um curso de formação continuada desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação. Para análise das informações coletadas buscou-se apoio na Teoria dos Campos Conceituais, de Gerard Vergnaud. De maneira geral, este estudo concluiu que os estudantes do 5º e 9º Ano adotaram, predominantemente, dois esquemas de resolução: a divisão em quartos e/ou em quartos e meios, prevalescendo o uso da linguagem natural e da representação icônica. Nos casos em que houve a representação fracionária das quantidades, assim como nas demais resoluções, os alunos não apresentaram indícios de reconher a fração como um quociente.

Palavras-Chave: Frações. Teoria dos Campos Conceituais. Esquemas. Representações.

[1] angelicafontoura@gmail.com
[2] gracilenepinheiro@gmail.com
[3] taniammcampos@hotmail.com

ABSTRACT

This study was developed with the aim of analyzing 5th and 9th graders of elementary school regarding the concept of fraction in quotient situations. For this purpose, one situation developed by Nunes and her team was proposed, and used to explore this meaning. The subjects are students of public school teachers - working for the State of São Paulo’s school network - who participate in a continued education course developed within the Project Education Observatory. For the analysis of data collected in this study, we used Gerard Vergnaud's Theory of Conceptual Fields. As a whole, this study found that 5th and 9th graders adopted two resolution schemes, predominantly: division in quarters and/or quarters and halves, with natural language and iconic representation being prevalent. In the cases where fraction representation of quantities was used, as well as in the remaining resolutions, the students did not show signs of recognizing fractions as a quotient.

Keywords: Fractions. Theory of Conceptual Fields. Schemes. Representations.

INTRODUÇÃO

Estudos como os de Ball, Thames e Phelps (2008), dentre outros, tem se dedicado a investigar o conhecimento profissional docente. Esses autores consideram a necessidade de o professor conhecer não só os conteúdos da Matemática, como também a compreensão dos alunos sobre idéias envolvidas no conceito. Nesse sentido, devemos considerar a necessidade de se investigar os esquemas de resolução adotados por alunos em uma dada situação, antecipando também possíveis equívocos que podem ser cometidos. Consideramos que a divulgação de tais resultados pode auxiliar o professor a refletir e intervir, em sua prática, de maneira adequada.

Partindo desse pressuposto, neste artigo apresentamos a análise dos resultados de um estudo que buscou investigar a compreensão de alunos do 5º e 9º Ano do Ensino Fundamental acerca da resolução de problemas envolvendo números racionais em sua representação fracionária[4], explorada em situações quociente por meio da compreensão da equivalência entre quantidades fracionárias.

Trata-se de uma das atividades desenvolvidas no decorrer de uma formação continuada[5], realizada no contexto de um projeto de formação e pesquisa – Projeto Observatório da Educação[6] - que envolveu pesquisadores em Educação Matemática e professores dos anos iniciais da rede pública estadual de São Paulo, durante a qual refletimos sobre os processos de ensino e aprendizagem do conceito de fração e de seus invariantes.

No decorrer desse processo, aprofundamos a discussão, sobretudo, acerca do significado quociente a partir de uma Sequência de tarefas, elaborada pela Professora

[4] Nossa opção, neste artigo, para facilitar a leitura do texto, será a utilização do termo “fração” para designar os números racionais na representação fracionária.

[5] A referida formação constitui uma das fases de uma pesquisa em Educação Matemática, realizada por Pinheiro, 2014 sob o título: *Formação de Professores dos Anos Iniciais: conhecimento Profissional Docente ao explorar a introdução do conceito de fração.*

[6] Projeto Observatório da Educação Auxílio número 99/2010: Educação Continuada e Resultados de Pesquisa em Educação Matemática: uma investigação sobre as transformações das práticas de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental, financiado pela CAPES e coordenado na Universidade Anhanguera de São Paulo pela Professor Dra. Tânia Maria Mendonça Campos.

Terezinha Nunes e sua equipe na Universidade de Oxford. Tal sequência foi inspirada num programa desenvolvido por Streefland em 1991. Esses autores argumentam que a proposta de introduzir o ensino das frações pelo significado quociente permite à criança se apropriar desse conceito a partir da resolução de situações que envolvam a ideia, já conhecida, de divisão, estimulando-as a utilizar as estruturas intuitivas já conhecidas por ela.

Informamos que a Sequência é composta por quatro situações, mas devido à nossa preocupação com o detalhamento dos resultados, trazemos para este artigo a análise das produções de alunos referentes a uma das situações apresentadas no protocolo. Escolhemos uma situação que envolve a ideia de equivalência.

Ressalte-se que a Sequência foi analisada também pelas professoras dos educandos investigados, em uma das sessões de formação. Todavia não nos ateremos a essa temática nesta publicação.

Nas seções que seguem apresentamos outras investigações que nos inspiraram na realização deste estudo, expondo a sua importância, enquanto área de interesse de estudiosos que se dedicam a investigar sobre o objeto matemático em questão. Descrevemos, de maneira breve, o referencial teórico que nos auxiliaram tanto na escolha da atividade como também na análise das informações coletadas dos estudantes investigados. Em seguida, apresentamos os procedimentos metodológicos; a situação proposta aos alunos, e as discussões dos dados coletados no desenvolvimento do estudo. Finalmente, nossas reflexões acerca da análise dos resultados observados.

RELEVÂNCIA DO ESTUDO: UM OLHAR PARA AS INVESTIGAÇÕES

Na literatura encontramos inúmeros estudos que apontam dificuldades apresentadas por educandos quanto à compreensão das ideias que formam o conceito de fração. Nunes e Bryant (1997), por exemplo, evidenciaram que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentam dificuldades em relação à conservação da unidade de referência, em reconhecer a equivalência entre quantidades fracionárias e a relação inversa entre denominador e a quantidade representada – relação de ordem.[7]

Esses mesmos pesquisadores apontam, em estudos posteriores, que os invariantes – equivalência e ordem - são ideias importantes para a compreensão de frações e que, portanto, necessitam ser exploradas pelos professores e seus alunos quando estudam esse tema (NUNES; et al., 2003 e NUNES; BRYANT, 2009). Partindo desses pressupostos, sugerem, com base em Vergnaud, que o ensino desse conceito deva ocorrer a partir de diferentes situações: parte-todo, quociente, operador e quantidades intensivas. Defendem, ainda que algumas situações podem favorecer a compreensão dos invariantes da fração, como é o caso de situções que exploram o significado quociente.

Em relação às pesquisas que procuraram investigar o conhecimento dos professores sobre o tema (CAMPOS; et al., 1995; GARCIA SILVA, 2007; Campos, et al. 2011; PINHEIRO, 2014, dentre outros), elas constaram que esse é um assunto que merece ser discutido, uma vez que *"O ensino (…) de frações constituem um obstáculo considerável para professores (…)"* (CAMPOS et al. 2011, p.1). Em relação aos invariantes, Pinheiro (2014) constatou em pesquisa realizada com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental dificuldades tanto em relação à compreensão das ideias de ordem e equivalência como também com a unidade de referência, o que fez com que concluísse que isso, possivelmente, refletiria na forma como essas ideias são abordadas em contexto de aula e na forma como os alunos compreendem tal invariante.

Outro argumento para a importância em estudar o tema está relacionado ao fato de que o significado parte-todo é o único explorado por muitos professores em situação de ensino - *"Percebemos que, inicialmente, elas* [referindo-se às professoras, participantes da pesquisa] *desconheciam os diferentes significados e ainda acreditavam, que todas as situações com frações eram resolvidas somente por meio do significado parte-todo."* (PINHEIRO, 2014, p. 165) - o que nos faz inferir que isso reflete diretamente no aprendizado do aluno, comprometendo, dessa maneira, a sua compreensão das ideias que formam o conceito de fração.

[7] Resultados semelhantes são evidenciados também por Campos, 2011; Garcia Silva, 2007; Canova, 2013; Cervantes, 2014, dentre outros investigadores.

Em contrapartida, Streefland já vinha afirmando desde 1991 que situações em que são feitas distribuições equitativas favorecem a compreensão, por parte dos alunos, da ideia de representação fracionária e, particularmente, da ideia da equivalência de frações.

Pelo exposto, parece-nos relevante analisar as estratégias adotadas por alunos na resolução de situações com as quais propõe introduzir frações pelo significado quociente, numa perspectiva de colaborar com reflexões sobre o tema.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Uma das bases teóricas que fundamentou esta investigação, a Teoria dos Campos Conceituais, preocupa-se com o estudo do desenvolvimento cognitivo do aluno, procurando compreender ligações e rupturas entre conhecimentos que ocorrem no decorrer da construção e compreensão de um conceito (VERGNAUD, 1993).

Esse autor defende que não podemos reduzir um conceito à sua definição, visto que três conjuntos – conjunto das referências, dos significados e dos significantes – devem ser considerados na formação de um conceito.

Vergnaud (1993) considera que as referências se constituem como o conjunto das situações que garantem o sentido atribuído ao conceito; o significado são os invariantes que orientam o uso dos esquemas – o pensamento mobilizado e organizado pelo aluno, numa dada classe de situações. Já o significante, refere-se ao conjunto das representações simbólicas de um conceito: linguagem, propriedades, situações, procedimentos.

Nesse sentido, Vergnaud (1993) argumenta que, para compreender do ponto de vista cognitivo, determinado conceito, deve-se analisar a gama de comportamentos e esquemas desenvolvidos pelo sujeito, em diferentes situações que podem ser representadas de diferentes maneiras, o que ele o define como Campo Conceitual.

No caso do conceito analisado em nosso estudo – fração – algumas relações, segundo esse teórico, estão envolvidas nesse significado: a de parte-parte, parte-todo e proporcionalidade. Mas, segundo ele, essas, na sua maioria, encontram-se, apenas no âmbito das ideias implícitas.

Nessa perspectiva, entendemos que o conceito de fração somente terá significado para o aluno, se lhe for permitido explorá-lo em diferentes situações, a partir das quais ele poderá desenvolver a compreensão do conceito e dos invariantes que lhes atribuem sentido, bem como expressar o conjunto de símbolos que utilizará, em uma determinada situação, para representar esse conceito.

Nessa direção Nunes *et al.* (2003) e Nunes e Bryant (2009), ao considerarem, na análise do conceito de fração, a Teoria de Vergnaud, sugerem que a construção do conceito seja iniciada por meio das ideias mais simples, aprofundando-as de modo a identificar *“qual é o invariante central desse conceito* [referindo-se às frações] *quais são as situações nas quais ele é usado e quais são os diferentes tipos de representação relacionados a ele”* (NUNES *et. al*., 2003).

Reiteramos que esses autores sugerem uma classificação para a construção do conceito de fração formada por quatro situações: parte-todo, quociente, operador e quantidades intensivas. De acordo com eles, esse conjunto de situações (S) dará significado às frações, determinará a compreensão dos invariantes (I) – ordem, equivalência e unidade de referência – e possibilitará a construção do conjunto das representações (R) possíveis da quantidade: decimal, razão, percentual e fracionária.

Ressalte-se que em nosso estudo, iremos analisar a compreensão de alunos explorada em uma situação quociente, a qual segundo Nunes e Bryant (2009), apoiados também em Behr *et al*. (1992) são aquelas em que está presente a ideia de partilha na divisão. Nelas duas quantidades se apresentam: o dividendo e o divisor. Esses representam tanto a divisão como o resultado dessa divisão. Se tomarmos, por exemplo, 3 chocolates divididos por 5 crianças, a representação $\frac{3}{5}$ indica tanto a divisão, 3 dividido por 5, como a quantidade que cada criança irá receber.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Reiteramos que neste artigo traremos a análise de uma das atividades desenvolvidas durante um curso de formação continuada, ofertado pelo Projeto desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação em que foi abordado o tema *Representação fracionária do número racional*, no qual aprofundamos a discussão, sobretudo, sobre o significado quociente a partir de uma Sequência de Tarefas.

As produções[8] que serão apresentadas são de alunos da *Professora Marcela e da Professora Lorena*[9]*,* participantes do processo formativo. Tratam-se de alunos do 5º e 9º Ano do Ensino Fundamental, respectivamente. Participaram dessa atividade vinte alunos do 5º Ano e vinte e oito alunos do 9º Ano.

Para preparar as professoras para o desenvolvimento dessa atividade em sala de aula, realizamos, em um dos módulos de formação, discussões acerca das ideias propostas na Sequência.

No desenvolvimento da Sequência os alunos foram dispostos em carteiras individuais; cada estudante recebeu um caderninho contendo as ilustrações das questões propostas; nele, cada aluno, individualmente, registrava sua resposta aos itens que lhes foram apresentados em *power point* e lidos pela professora. Em um momento da atividade, os participantes deste estudo eram estimulados a refletir sobre suas respostas e as compará-las com as do seu colega ao lado. Durante a realização das atividades também fizemos registros com a utilização de recursos áudio visual.

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

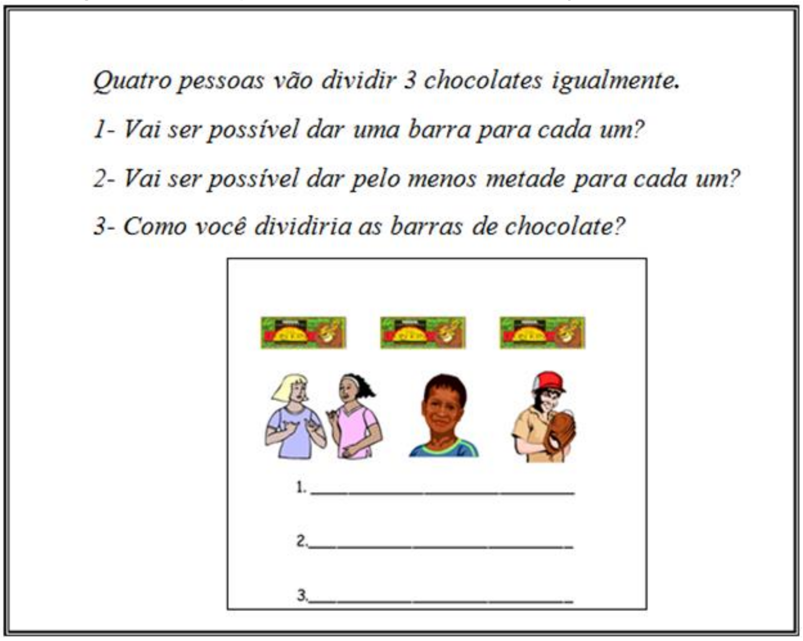
Para melhor compreensão do leitor, apresentamos, inicialmente, a situação proposta – Figura 1. Em seguida, exemplos de esquemas de partição – Tabela 1 – e tipos de representações – Tabela 2 –. Posteriormente, ampliaremos nossa análise, com o olhar voltado para os esquemas de resolução e para as representações, que

[8] Cabe salientar que essas produções foram amplamente discutidas durante o Processo Formativo. Entretanto, as reflexões e discussões dos professores sobre esses protocolos não serão foco de análise deste artigo.

[9] No intuito de preservar a identidade dos nossos sujeitos de pesquisa, os nomes aqui apresentados são fictícios.

podem se apresentar por meio da linguagem natural, de desenhos, do registro da fração, porcentagem e/ou escrita decimal.

Figura 1 - Sequência de Tarefas: Situação Quociente



Quatro pessoas vão dividir 3 chocolates igualmente.

1- Vai ser possível dar uma barra para cada um?

2- Vai ser possível dar pelo menos metade para cada um?

3- Como você dividiria as barras de chocolate?

1.____________________

2.____________________

3.____________________

Fonte: dados da pesquisa.

Essa situação, segundo Nunes *et al*. (2003), foi elaborada com a finalidade de introduzir o conceito de fração por meio do processo de divisão indicada, com o intuito de levar o aluno a apoiar-se no seu conhecimento informal.

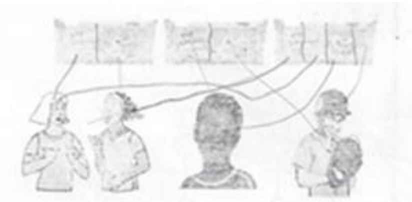
Consideramos que por meio dessa situação é possivel perceber, ainda, se os alunos estabelecerão relações entre as quantidades de chocolate e de pessoas com as quais os chocolates serão divididos igualmente.

Numa análise geral dos protocolos, inicialmente, encontramos poucos indícios de que os alunos reconheceram essa situação como quociente, uma vez que a grande maioria representou a partição e apenas, aproximadamente, 21% apresentaram uma representação fracionária da quantidade. Além disso, é importante lembrar que, essa representação não é garantia da compreensão da ideia de quociente, pois em entrevistas nenhum aluno se referiu a esse significado. Isso nos parece preocupante visto que todos esses alunos já haviam estudado o tema frações na escola. Entretanto, também precisamos chamar a atenção para o fato de que mesmo que a situação fosse reconhecida como quociente o aluno precisaria apresentar ainda um esquema de partição para responder ao item 3: *“como você dividiria as barras de chocolate”.*

Os esquemas de partição e as representações explicitadas

Para melhor compreender o ocorrido, apresentamos os esquemas de partição adotados pelos alunos investigados – Tabela 1.

Tabela 1 – Esquemas de partição adotados pelos alunos investigados 5º e 9º Ano

Esquema de partição	Exemplo	Nº de alunos	
		5º Ano	9º Ano
Dividiu duas barras de chocolate ao meio e uma em quartos. Em seguida distribuiram entre as quatro pessoas; utilizando-se de correspondência entre as quantidades – partes de chocolate e pessoas.		13	7
Dividiu cada barra de chocolate em quatro partes iguais e distribuíram uma parte de cada barra para cada pessoa, utilizando-se de correspondência entre as quantidades – partes de chocolate e pessoas.		4	14
Dividiu cada chocolate em três partes e subdividiu o último terço em quartos		-	1
Dividiu dois chocolates em cinco partes e o terceiro em seis partes e indicou que cada um receberia 4 pedaços, mas não indicou o tamanho		1	-
Dividiu cada chocolate ao meio		1	3

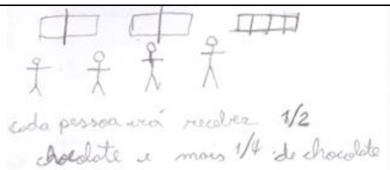
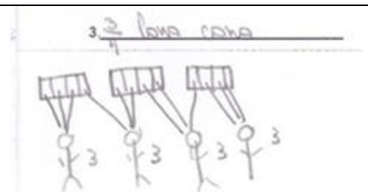
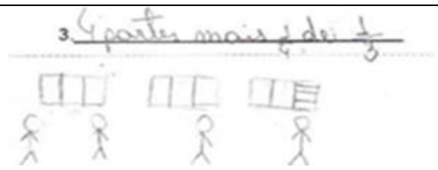
Fonte: dados da pesquisa.

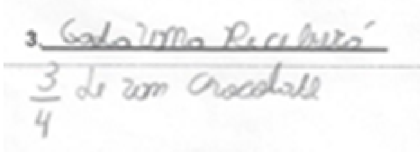
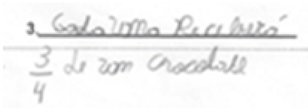
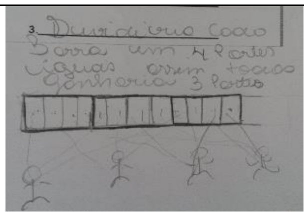
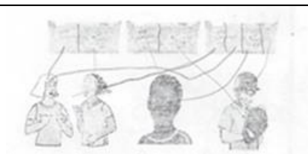
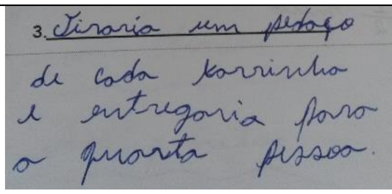
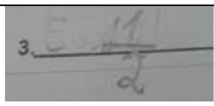
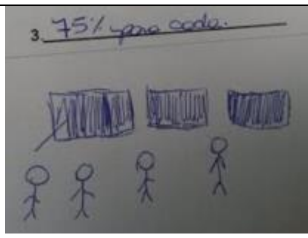
Analisando os esquemas de partição adotados pelos estudantes notamos haver predominância da utilização de metades e quartos. Observamos que a maioria dos alunos ou repartiu todos os chocolates em quartos ou optou por repartir os dois primeiros em metades e o ultimo em quartos.

Mais especificamente, é possível observar que para os estudantes do 5º Ano, diferentemente do ocorrido com os do 9º Ano, não pareceu ser natural repartir todos os chocolates em quartos. Os alunos do 5º Ano optaram, em sua maioria, em dividir em meios e quartos. Resultados semelhantes são discutidos por Nunes e Bryant (1997). Esses autores, ao analisarem diferentes investigações acerca da quantificação das frações desenvolvidas dentro e fora das escolas, observaram que a resolução de situações envolvendo frações por crianças de 6 e 7 anos emerge, no geral, de tarefas focadas na ideia de metade.

Quanto aos tipos de representações encontramos nos protocolos analisados: linguagem natural, representação icônica (desenho), representação fracionária ou uma combinação delas. Na tabela 2 trazemos os tipos de representações apresentadas pelos alunos investigados.

Tabela 2 – Representação apresentadas pelos alunos investigados 5º e 9º Ano

Tipo de Representação	**Exemplo**	**Nº de alunos**	
		5º Ano	**9º Ano**
Fez uso de desenhos e da representação fracionária – tomando como base a divisão do chocolate em meios e quartos.		1	1
Fez uso de desenhos e da representação fracionária – tomando como base a divisão do chocolate em quartos.		1	4
Fez uso de desenhos e da representação fracionária, sugerindo a adição das quantidades fracionárias.		1	2

Fez uso da linguagem natural e da representação fracionária.		3	5
Fez uso da linguagem natural, do desenho e da representação fracionária	 	3	5
Fez uso da linguagem natural e de desenhos		11	7
Fez uso somente do desenho		3	2
Fez uso somente da linguagem natural.		2	8 - 4 erros
Fez uso somente da representação fracionária.		1 (erro)	1
Fez uso da representação em percentual.		-	1

Fonte: dados da pesquisa.

Observando os registros apresentados na tabela, percebemos que houve predominância, tanto entre os alunos do 5º Ano quanto os do 9º Ano, do uso da linguagem natural e da representação icônica. Analisando a penúltima linha da tabela, é possível perceber fortes indícios de que os estudantes não reconheceram se tratar de uma situação quociente que poderia ser representada por uma fração.

Investigando os registros de cada item

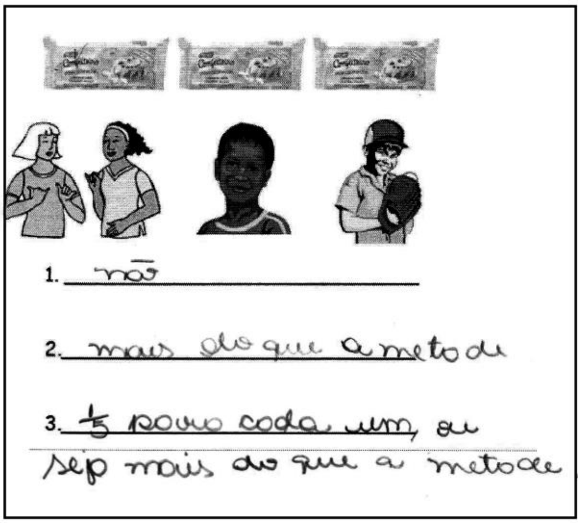
Analisando as respostas dos estudantes observamos que as vinte crianças do 5º Ano, afirmaram, de maneira assertiva, *não ser possível dar uma barra de chocolate para cada pessoa*. O mesmo ocorreu com todos os alunos do 9º Ano. Esse resultado observado nesse primeiro item da situação já era esperado, uma vez que acreditávamos, assim como Nunes et al. (2005), apoiados em Streefland (1991) que eles iriam fazer uso do pensamento intuitivo.

No que se refere as respostas à pergunta constante no segundo item, dezenove estudantes do 5º Ano, e vinte e três do 9º Ano disseram ser possível dar a cada pessoa pelo menos metade do chocolate. Essas informações levaram-nos a inferir que esses alunos compreendiam a situação proposta e certamente já possuíam a ideia de metade do inteiro.

Isso nos remete novamente a Nunes e Bryant (1997). Esses autores, com base nos estudos de Spinillo e Bryant (1991), já chamavam a atenção para a importância que tem o referencial "metade" quando a proposta é a quantificação de fração. Ao apresentar suas conclusões os autores afirmam: *"as primeiras quantificações que elas* [crianças de 6 e 7 anos] *resolvem nesse domínio* [frações] *parecem emergir de tarefas nas quais a noção de metade pode ser usada"* (NUNES; BRYANT, 1997, p. 216). Tal fato, segundo esses autores, favorece a compreensão de algumas relações que caracterizam os números racionais ligadas às ideias de parte-todo e parte-parte. Esse fato também é discutido em estudos recentes como os de Brizuela (2006) e Spinillo e Cruz (2008), por exemplo. Nesse mesmo sentido é importante ressaltar que segundo Vergnaud essas relações e as de proporcionalidade estão presentes de forma significativa na construção do conceito de fração.

Ainda em relação a esse item, verificamos que uma estudante do 9º Ano, possivelmente se referindo à quantidade total que cada pessoa receberá do chocolate respondeu, de maneira assertiva, *"mais do que a metade"* (Jéssica) – Figura 2. Porém, tal afirmativa é justificada, de maneira equivocada, na resposta dada ao terceiro item da situação, uma vez que ela afirma (em vez de $\frac{3}{4} ou\ 3\ pedaços\ de\ \frac{1}{4}$) ser $\frac{1}{5}$ maior do que a metade.

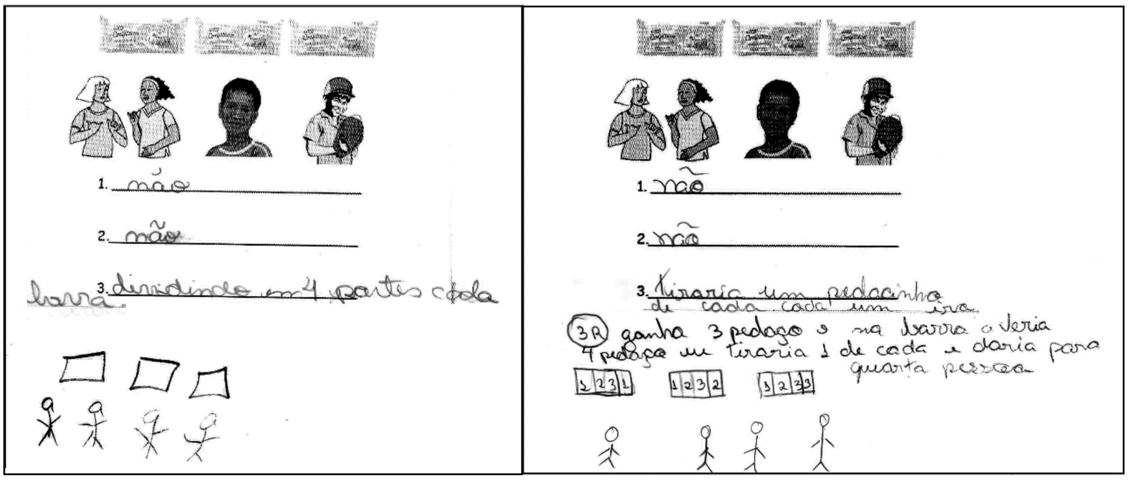
Figura 2 - Protocolo da *Aluna Jéssica* - 9º Ano



Fonte: dados da pesquisa

Ainda relacionado ao segundo item, dos demais alunos do 9º Ano, quatro responderam *"não"*. Buscamos indícios de como esses alunos chegaram a tal conclusão e observamos que dois deles disseram, no item três da situação, que dividiriam cada chocolate em quatro partes/pedaços – Figura 3. Como essas estudantes utilizaram um esquema de partição válido para a situação, inferimos que possivelmente elas levaram em conta cada parte de quartos destinado a cada uma das pessoas, ou seja, elas se referiram a cada um dos três pedaços, considerando ser ele menor do que a metade.

Figura 3 - Protocolo das *Alunas Vitória e Ananda* - 9º Ano



Fonte: dados da pesquisa.

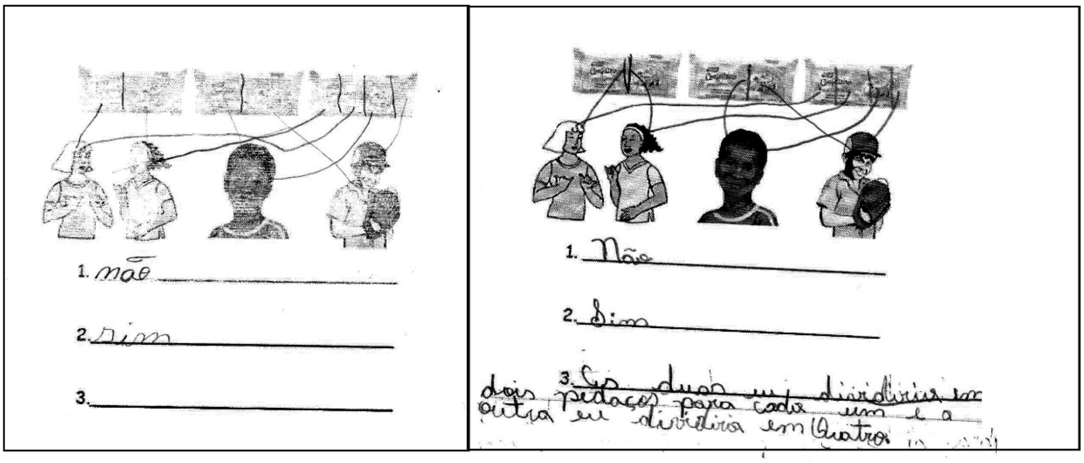
Como vimos anteriormente – Tabela 1 – na análise das respostas apresentadas pelos alunos do 5º Ano ao terceiro item da situação, em que era solicitada a demonstração da maneira como dividiria as três barras de chocolates entre as quatro pessoas, verificamos, dentre os estudantes que apresentaram uma resposta válida, que eles se apoiaram em dois esquemas de partição, utilizando-se de correspondência entre as quantidades – partes de chocolate e pessoas:

- dividiram duas barras de chocolate ao meio e uma em quartos. Em seguida distribuíram entre as quatro pessoas;
- dividiram cada barra de chocolate em quatro partes iguais e distribuíram uma parte de cada barra para cada pessoa.

Esses mesmos esquemas foram apresentados por alunos participantes de uma pesquisa realizada por Campos, Nunes, Bryant, Garcia Silva, Canova e Cervantes (2014). Assim como os alunos participantes dessa pesquisa, também esses dividiram os chocolates e os relacionaram ao número de pessoas por meio da utilização de desenhos. Quanto a esse fato, Campos *et al.* (2014) afirmam que "*Como os racionais são baseados em relações, o uso de correspondências entre quantidades nos diagramas expressa uma noção intuitiva dessas relações"* (CAMPOS *et al.,* 2014).

O primeiro esquema de partição em que foi estabelecida a correspondência entre a metade e quartos de chocolate e a quantidade de pessoas, foi utilizado pela maioria desses estudantes: treze. O que pode ser verificado, por exemplo, nos protocolos dos alunos *Artur* e *Mateus* – Figura 4.

Figura 4 - Protocolos dos *Alunos Artur e Mateus* - 5º Ano



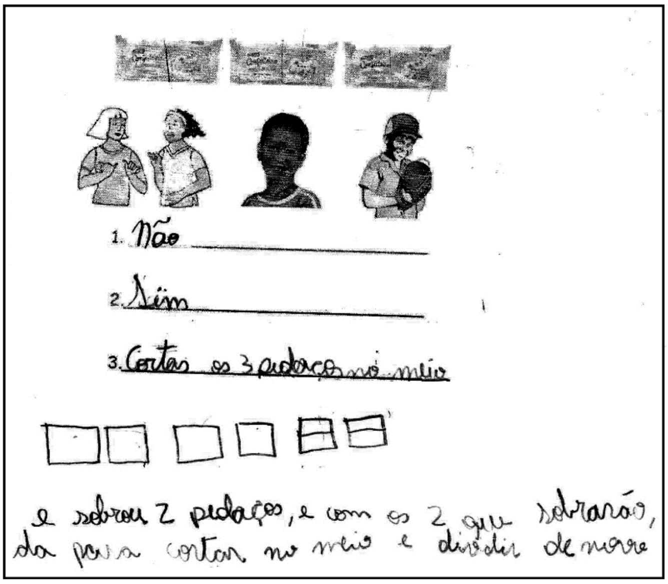
Fonte: dados da pesquisa.

Ao percebermos ser esse esquema recorrente, resolvemos questionar o *Artur* sobre sua forma de pensar, e ele justificou: *"esse daqui divide; tora no meio aí divide* *para essas duas pessoas* [referindo-se ao primeiro chocolate e às duas meninas]*; esse daqui divide com esses dois* [referindo-se à segunda barra de chocolate e aos meninos] *e esse daqui tora em quatro pedaços para dividir com eles* [referindo-se ao terceiro chocolate e às quatro pessoas]*"* (ARTUR).

Assim como *Artur* e *Mateus*, outro estudante justifica *"eu divido no meio, mas vai sobrar mais um inteiro e dá para cortar em 4 pedaços para cada um"* (CAIO). A partir das justificativas dos estudantes, podemos ratificar que eles compreendem a relação entre metades e inteiros. É importante salientar que todos esses alunos fizeram uso de desenhos e/ou da linguagem natural para representarem, em suas resoluções, a quantidade de chocolate que cada pessoa receberia.

Dentre os alunos do 5º Ano que se valeram de tal esquema de partição, qual seja, dividiram duas barras de chocolate ao meio e uma em quartos e realizaram a distribuição entre as quatro pessoas, observamos que *João* – Figura 5 –, por exemplo, ao dividir o último chocolate, embora tenha apresentado, ao final, a mesma partição apresentada por *Artur* e *Mateus*, não dividiu a última barra de chocolate em quartos de forma imediata. Esse estudante, inicialmente, dividiu os três chocolates ao meio e percebeu a necessidade de dividir as duas últimas metades (referentes ao último chocolate) novamente ao meio, ou seja, o esquema desenvolvido por ele foi que cada pessoa iria receber meio chocolate mais metade de meio chocolate, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$.

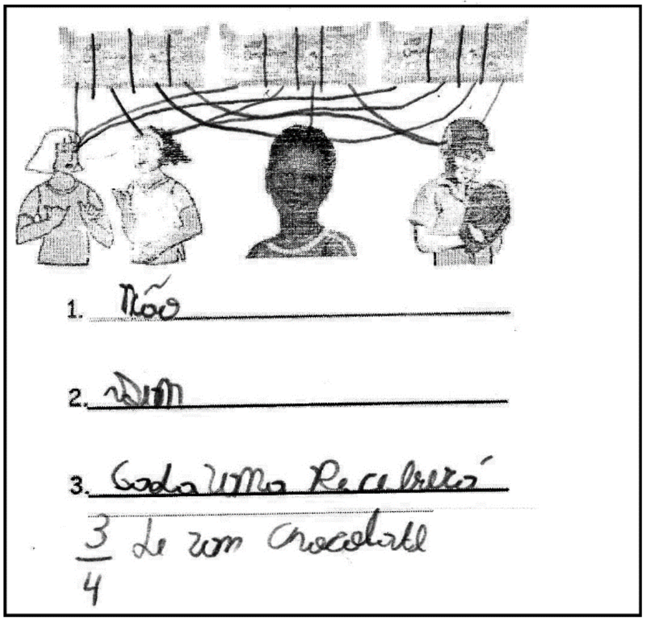
Figura 5 - Protocolo do *Aluno João* - 5º Ano



Fonte: Dados da pesquisa

Ressalte-se que outro esquema, utilizado por quatro alunos do 5º Ano, foi dividir cada uma das três barras de chocolate em quatro partes iguais e distribuir uma parte de cada uma das barras para cada pessoa, ou seja, $\frac{1}{4}$ de barra para cada pessoa – Figura 6.

Figura 6 - Protocolos do *Aluno Ubiraci* - 5º Ano

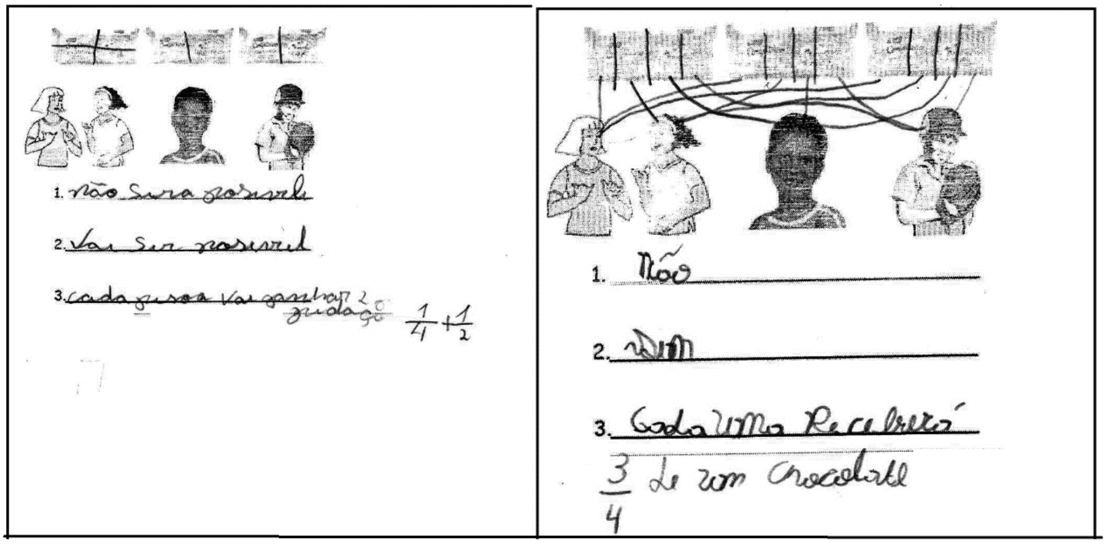


Fonte: Dados da pesquisa

Observando os esquemas utilizados pelas crianças, pudemos perceber que eles são os mesmos indicadas por Garcia Silva (2007). A autora apoiada nos estudos de Carperter (1994) observou também os dois esquemas aqui identificados.

É importante notar que, mesmo não sendo perguntado sobre qual fração representava a fatia que cada pessoa iria ganhar, dois alunos do 5º Ano apresentaram também a fração de chocolate correspondente ao que cada pessoa receberia – Figura 7. O aluno *Wesley* representou $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ e *Ubiraci* respondeu $\frac{3}{4}$. Como não entrevistamos os dois alunos, não pudemos inferir se *Wesley* reconheceu a fração $\frac{3}{4}$ como a adição $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$ uma vez que o estudante indicou as duas frações de chocolate distribuídas, mas não a fração total que representava os dois pedaços; já *Ubiraci* ao dividir o chocolate em quartos verificou o que cabia a cada pessoa.

Figura 7 - Protocolos dos *Alunos Wesley e Ubiraci* - 5º Ano



Fonte: Dados da pesquisa

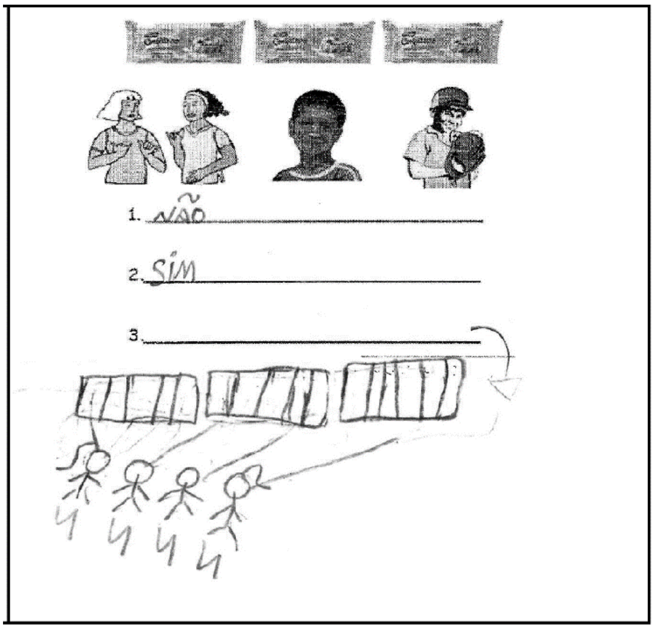
Três alunos do 5º Ano não apresentaram uma resposta válida para o item: dois deles dividiram os chocolates em meios, como por exemplo, a Aluna Paloma – Figura 8 –, possivelmente por acreditar que deveriam encontrar uma forma de dividir todos os chocolates em "partes iguais" (mesma área).

Figura 8- Protocolo da *Aluna Paloma* - 5º Ano

Fonte: Dados da pesquisa

A outra resposta equivocada, apresentada pelo estudante *Ubirajara*, foi dividir cada chocolate em cinco pedaços – Figura 9.

Figura 9- Protocolo do *Aluno Ubirajara* - 5º Ano



Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a estratégia utilizada pelo estudante *Ubirajara,* observamos que ele, possivelmente, utilizou-se da ideia de que deveria fazer quatro cortes no chocolate para que pudesse dividi-lo em quatro partes. Ao realizar os cortes, cada chocolate ficou dividido em 5 pedaços e não em 4, como era, talvez, o esperado pelo aluno. Ao fazer a distribuição, percebeu que faltou um pedaço; então ele dividiu uma das partes do último chocolate ao meio, de modo a garantir que cada pessoa recebesse 4 pedaços. Dessa forma, pudemos inferir que o aluno não percebeu que a divisão foi desigual.

Chamamos a atenção para o fato de que a divisão de uma grandeza contínua parece trivial, mas não é. Já em 1960, Piaget, Inhelder e Szeminska afirmavam que a compreensão de frações implicava a construção de invariantes que serviriam como base para a organização das ações da criança. Dos invariantes citados pelos autores, um deles diz respeito à necessidade de saber a relação existente entre o número de partes e o número de cortes necessários para obter as partes, ou seja, que para dividir um todo contínuo em quatro partes iguais serão necessários apenas três cortes. Nesse sentido, como apontado por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), o estudante precisa antecipar o número de cortes que irá produzir e também prever onde esses cortes devem ser feitos de forma a garantir que todas as partes tenham a mesma área (conservação de área).

Em relação às resoluções apresentadas pelos estudantes do 9º Ano, observamos que sete dos vinte e oito se utilizaram do primeiro esquema de partição adotado pelos alunos do 5º Ano, ou seja: dividiram duas barras de chocolate ao meio e uma em quartos e depois distribuíram os pedaços de maneira equitativa entre as quatro pessoas. Vale destacar que desses, dois fizeram uso da correspondência entre as quantidades.

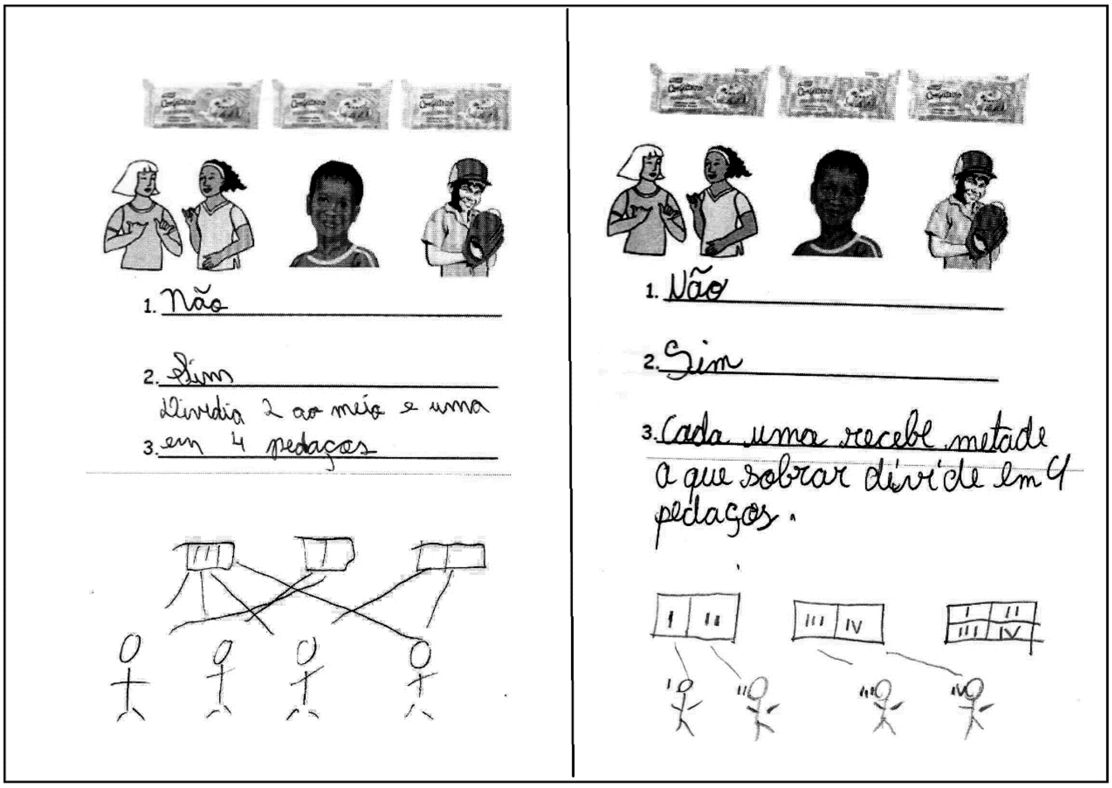
Já a outra estratégia adotada pelos alunos do 5º Ano – divisão de cada chocolate em quartos – foi também utilizada por quatorze estudantes do 9º Ano.

Acreditamos ser importante chamar a atenção para alguns aspectos que observamos na análise dos protocolos desses estudantes, como por exemplo, o fato de que muitos deles – doze de vinte e um que adotaram os dois esquemas citados anteriormente – referiram-se, assim como a maioria das crianças investigadas no 5º Ano, apenas à quantidade de pedaços, ao responderem o item três da situação. Esse fato já era esperado, uma vez que não solicitamos a representação por meio da fração.

Destacamos que para classificar a resposta consideramos o registro apresentado pelos estudantes e, algumas vezes utilizamos nossas interpretações, pois nem todos esses estudantes fizeram a representação icônica do esquema. *Marisa*, por exemplo, afirma que *“Cortaria os pedaços e como tem 3 barras eu divido ela para os 4”* (MARISA). Essa resposta nos dá indícios de que ela se utilizou do esquema de partição em quartos, fazendo a distribuição equitativa do chocolate entre as quatro pessoas indicadas na situação.

Entretanto, vale destacar que, dentre aqueles que dividiram os chocolates em meios e quartos, quatro utilizaram as expressões “meio” e “metade”, como por exemplo, os alunos *Cássio* e *Rebeca* – Figura 10 – referindo-se aos pedaços maiores. Já para referirem-se aos pedaços menores não utilizaram expressões como “quartos” ou “um quarto”.

Figura 10 - Protocolo dos *Alunos Cássio e Rebeca* - 9º Ano

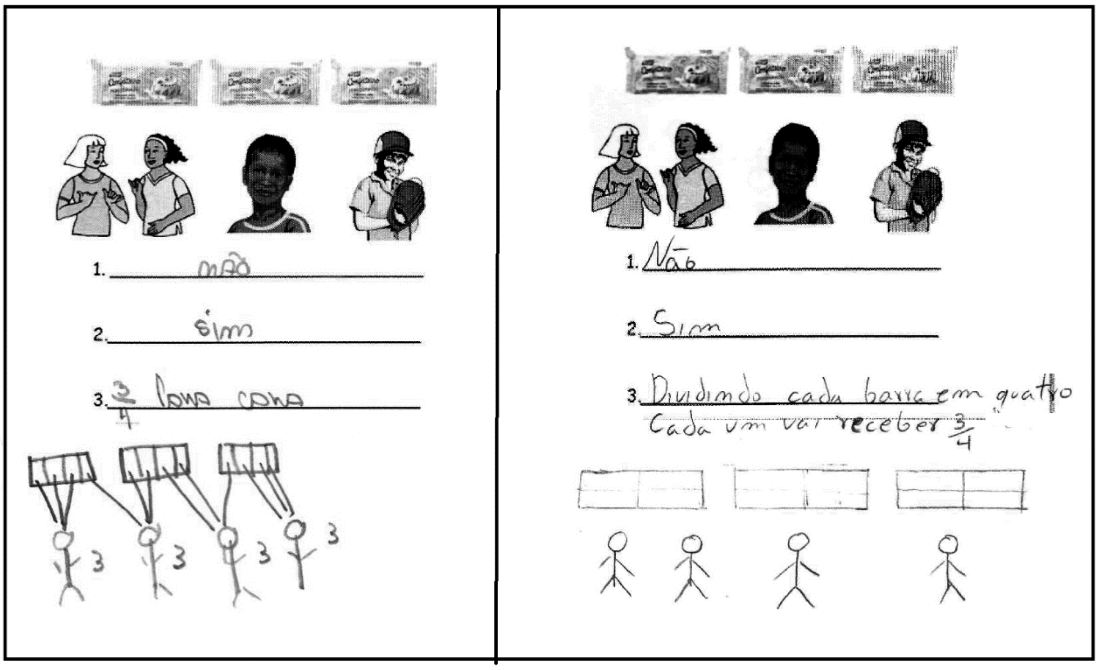


Fonte: Dados da pesquisa

Vale ressaltar que desses alunos citados, dois não representaram a solução por meio de desenho. O aluno *Marcos*, por exemplo, respondeu com a afirmação: *"Cada um come 1 pedaço e meio"* (MARCOS). Nesse caso, ao interpretarmos sua resposta, entendemos que o aluno se refere à divisão dos chocolates em meios e quartos e que, dessa forma, cada pessoa recebe 1 pedaço de metade, mas meio pedaço da metade. Essa interpretação também foi realizada ao analisar a resolução de *Bruno*: *"duas corta no meio e uma corta em quatro partes. Assim fica dividido igualmente"* (BRUNO).

Outro aspecto que, a nosso ver, merece atenção é que três estudantes do 9º Ano representaram a fração $\frac{3}{4}$, dos quais dois, assim como fez o Aluno *Ubiraci* do 5º Ano, apoiaram-se na divisão de cada chocolate em quartos – Figura 11 – e um representou somente a fração, o que nos levou a inferir que resolveu a situação mentalmente.

Figura 11 - Protocolo dos *Alunos Fernando e Jane* - 9º Ano

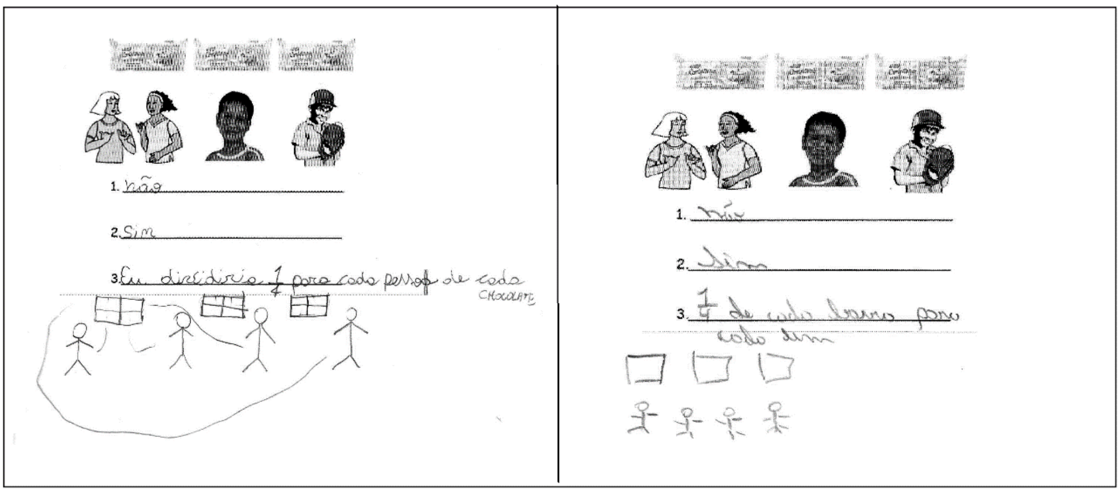


Fonte: Dados da pesquisa

Campos et al. (2014), em pesquisa realizada com crianças inglesas que cursavam 4º e 5º Anos, observaram que algumas delas também se referiam à quantidade de pedaços e outras escreviam a fração. Esses autores afirmam que o fato de alguns alunos referirem-se à fração e outros, a pedaços independe da escolaridade (CAMPOS, *et. al*., 2014, p. 117).

Dois outros alunos, também do 9º Ano, representaram a fração em quartos. Um desses estudantes, apoiando-se no desenho de quartos, argumenta: *“Eu dividiria $\frac{1}{4}$ para cada pessoa de cada chocolate”* (CARLOS). Percebemos aqui o registro da representação da quantidade fracionária, assim como na resolução apresentada pelo aluno *Eduardo* – Figura 12. Esse, embora, não tenha deixado explicitado no desenho, provavelmente resolveu o problema mentalmente e, ao responder a situação, sugere a divisão do chocolate em quartos.

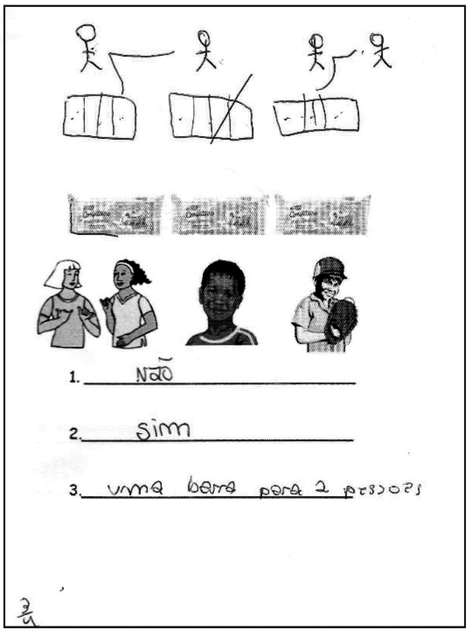
Figura 12 - Protocolo dos *Alunos Carlos e Eduardo* - 9º Ano



Fonte: Dados da pesquisa

Dentre os esquemas de partição em quartos, também o apresentado pelo estudante *Michel* – Figura 13 – merece ser destacado, pois analisando as representações – desenhos e linguagem natural – adotadas por ele, concluímos que a distribuição dos chocolates foi realizada de maneira diferenciada daquelas apresentadas pelos outros estudantes: a primeira pessoa receberá os $\frac{3}{4}$, que caberia a ela, da primeira barra de chocolate; já a segunda pessoa receberá $\frac{1}{4}$ do primeiro chocolate mais $\frac{2}{4}$ do segundo chocolate; a terceira pessoa receberá também $\frac{2}{4}$ do segundo chocolate e mais $\frac{1}{4}$ do terceiro chocolate. Por fim, a quarta pessoa receberá os $\frac{3}{4}$ do último chocolate. Isso fica melhor evidenciado em sua justificativa quando afirma *"Uma barra para 2 pessoas"* (MICHEL), referindo-se ao fato de que as fatias de cada uma das barras de chocolate foram destinadas sempre para duas pessoas.

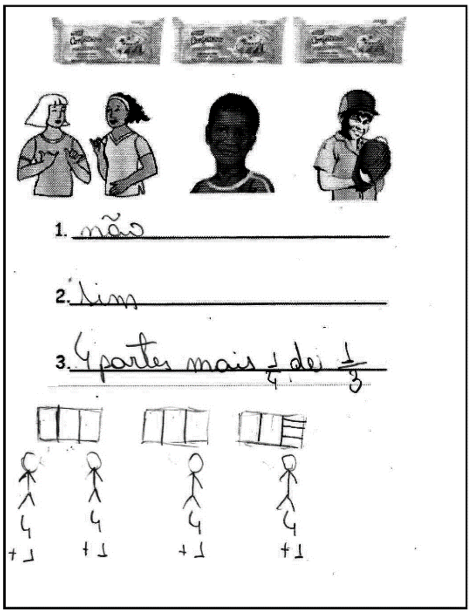
Figura 13 - Protocolo do *Aluno Carlos Michel* - 9º Ano



Fonte: Dados da pesquisa

O esquema de resolução apresentado a seguir – Figura 14 –, foi utilizado somente por um dos estudantes investigados – *Diogo*, aluno do 9º Ano.

Figura 14 - Protocolo do *Aluno Diogo* - 9º Ano

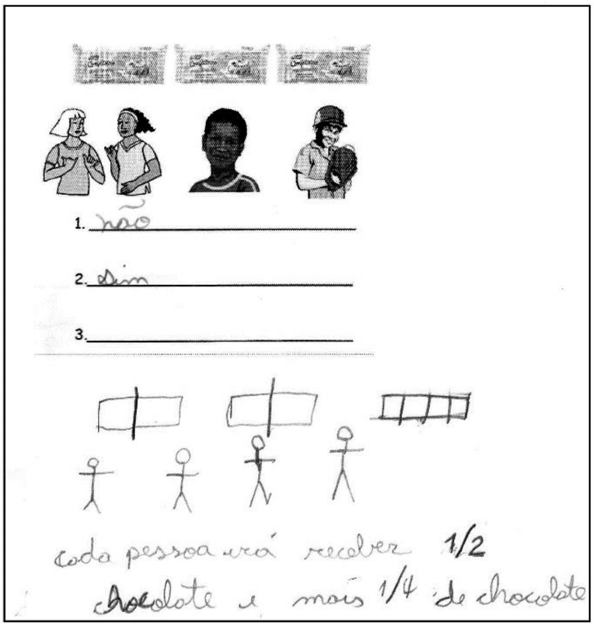


Fonte: Dados da pesquisa

Podemos observar que ele representou também de maneira assertiva, embora tenha se equivocado ao afirmar que cada pessoa receberia 4 partes do chocolate mais $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$. O esquema de partição que ele apresenta revela que esse estudante, inicialmente, dividiu cada chocolate em três partes, de modo que caberia dois pedaços de terços a cada pessoa, restando um terço, que ele dividiu em 4 partes de mesma área, o que resultaria $\frac{3}{4}$ de chocolate para cada pessoa. Todavia inferimos que esse aluno, possivelmente, ao fazer a correspondência confundiu a quantidade de fatias com a quantidade de pessoas.

Chamou-nos a atenção, também, o fato de o estudante *Douglas* justificar sua solução ao item três, fazendo uso da linguagem fracionária, com indicação de adição entre frações – Figura 15. Observamos que ele representou a adição das frações, mas não realizou o cálculo. Dessa forma, temos uma evidência do que nos afirma Llinares (2003) *"Las ideas de suma y equivalencia aparecen de manera natural em este tipo de situaciones* [referindo-se a situação quociente]*"* (LLINARES, 2003, p. 194). Não podemos afirmar que esse estudante tem a compreensão de que a adição dessas quantidades resultaria na fração $\frac{3}{4}$, mas observamos que ele explicita o conhecimento de que caberia a cada pessoa a soma resultante da adição $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Vale ressaltar que um estudante do 5º Ano – *Wesley*, Figura 7 – apresentou uma solução semelhante.

Figura 15 - Protocolo do *Aluno Douglas* - 9º Ano

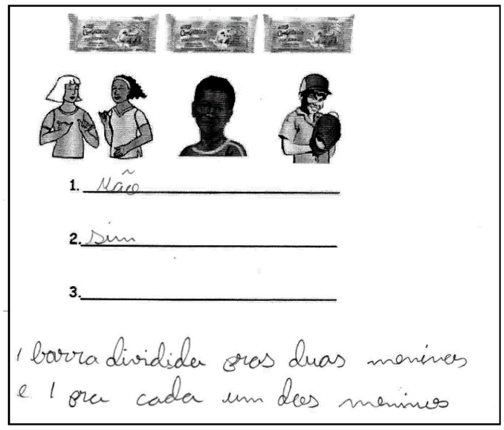


Fonte: Dados da pesquisa

Por fim, destacamos a resposta apresentada pelo estudante *Roberto* que, apoiando-se também na divisão de cada chocolate em quartos, concluiu, em percentual: *“75% para cada”* (ROBERTO).

Em relação aos equívocos cometidos pelos estudantes do 9º Ano, cinco, não responderam adequadamente e um estudante respondeu *“não sei”* ao item 3 da situação. Destes, os estudantes *Marta* e *Guilherm*e – Figura 16 – apresentaram as seguintes respostas:

Figura 16 - Protocolo da *Aluna Marta* - 9º Ano



Fonte: Dados da pesquisa

As respostas desses alunos mostram indícios de que eles não levaram em consideração uma das ideias fundamentais quando se trata de quantidades fracionárias: a ideia de que as “coisas”, no caso cada chocolate teria que ser dividido *“em um número determinado de partes iguais, de modo que esgote completamente o todo considerado”* (NUNES et al. 2012, p.107). Neste caso, eles também dividiram em pedaços iguais (mesma área), porém, diferentemente do que ocorreu com a estudante *Paloma*, do 5º Ano – Figura 8 –, citada anteriormente, eles não esgotaram completamente o todo.

Em relação às respostas apontadas pelos outros três estudantes, não conseguimos fazer nenhuma inferência acerca do esquema de partição que eles utilizaram, pois apenas apresentaram as seguintes respostas:

> “Um terço para cada”. (JÚLIA).
>
> “Eu chamaria mais uma pessoa pra ficar dividido certo com 5 pessoas irá ficar certo cada um com um pedaço.” (MARCELO).

"$\frac{1}{5}$ para cada um, ou seja, mais do que a metade." (JÉSSICA).

Ainda em relação ao item 3, observamos que nenhum aluno se aproxima do caminho descrito por Behr *et. al*. (1992), ou seja, as três barras são unidas, formando uma unidade que é dividida em quatro.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo buscou analisar e discutir a compreensão de estudantes do 5º e 9º Ano do Ensino Fundamental acerca do conceito de fração em situação quociente. Nessa perspectiva, procurou-se refletir, sobretudo, em questões ligadas ao ensino e à aprendizagem desse conceito.

Analisando os resultados podemos concluir que a situação apresentada favorece, como o descrito em Nunes et al. (2003), a utilização da ideia de proporcionalidade, uma vez que os estudantes estabeleceram relações entre as quantidades de chocolate e a de pessoas com as quais eles foram divididos. Além disso, observamos ainda que tal situação possibilitou a utilização de conhecimentos informais dos estudantes, sobretudo, acerca da ideia de metade e quartos. Entretanto, não notamos, haver por parte dos estudantes investigados a utilização do conhecimento informal sobre o processo de divisão indicado como apoio para representar a fração como esperado por Nunes et al. (2003). Acreditamos que isso não ocorreu porque o tema frações, possivelmente, já havia sido tratado com os estudantes investigados apenas na perspectiva parte-todo.

Os resultados desta pesquisa apontam para indícios de que o significado quociente parece ser pouco explorado na escola, visto que o ensino de fração tem início ainda nos anos iniciais do Ensino Fundamental – 4º e 5º Ano – sendo que nesta investigação o que pudemos observar é que, de maneira geral, tanto os esquemas como as representações adotadas por alunos do 9º Ano – quando se espera que o aluno já tenha um conhecimento mais elaborado – foram semelhantes e/ou iguais àqueles utilizados pelos alunos do 5º Ano. Ao final desta investigação, concluímos que, via de regra, os alunos participantes não reconheceram o significado quociente presente na situação proposta.

Assim sendo, consideramos relevante refletir também sobre a importância da mediação do professor[10]. Sob o nosso ponto de vista, apoiados em estudos como os de Ball, Thames e Phelps (2008) e Vergnaud (1993), o papel do professor é fundamental, uma vez que sua intervenção poderá potencializar as reflexões dos estudantes, estimulado-os a fazer uso de esquemas que lhes possibilitem desenvolver novas competências a partir da exploração e de tentativas e erros, estabelecendo relações importantes entre conhecimentos advindos de seu repertório e desenvolvendo competências ainda não adquiridas, por meio das quais compreenderá novas ideias.

REFERÊNCIAS

BALL, D.L.; THAMES, M.H.; PHELPS, G. Content knowledge for teaching: what makes it special? In: **Journal of Teacher Education**, v.59. p.403, 2008

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, proportion‖. In: D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. *New York: Macmillan*, p. 296-333. 1992.

BRIZUELA, B.M. Young children's notations for fractions. **Educational studies in Mathematics**, v. 62, p.281-305, 2006.

CAMPOS, T.M.M.; et al. ***Lógica das equivalências***. Relatório de pesquisa não publicado. São Paulo: PUC. 1995.

CAMPOS, T.M.M.; et al. **Sobre o ensino e aprendizagem de frações**. In: XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, 2011, Recife. *Anais XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, 2011. Disponível em: <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2896/1194>Acesso em: 25 março. 2013, às 20:02h.

CAMPOS, T.M.M.; et al. Uso de Situações Quociente no Ensino de Frações. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**. v. 7. n. 3. p. 102 – 128. 2014. Disponível em: <http://pgsskroton.com.br/seer/index.php/jieem/article/view/72/63> Acesso em: 27 outubro. 2015, às 17:29h.

CANOVA, R. F. **Um estudo das situações parte-todo e quociente no ensino e aprendizagem do conceito de fração.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNIBAN, São Paulo, 2013.

[10] É importante lembrar que no desenvolvimento dessa atividade, as professoras foram orientadas a não oferecer qualquer tipo de intervenção, visto te tínhamos o intuito de discutir, numa sessão da formação, como os alunos compreendem o conceito de fração por meio da exploração de uma situação quociente.

CARPENTER, T. P. Teaching and learning rational numbers: proposed framework for CGI teacher development in the upper elementary grades.Wisconsim Center for Education **Research. School of Education**, University of Wisconsin-Madson. 1994.

CERVANTES, P. B. M. **Uma formação continuada sobre as frações**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNIBAN, São Paulo. 2010.

GARCIA SILVA, A.F. **O desafio do desenvolvimento profissional docente:** Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações*.* Tese (Doutorado em Educação Matemática) – PUC/SP, São Paulo, 2007.

LLINARES, S. **Fracciones, decimales y razón**. *Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional*. 2003

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1997.

NUNES, T.; et al. **The effect of situations on children´s understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics, Oxford, Reino Unido. 2003.

NUNES, T.; et al. ***Educação matemática: números e operações numéricas***. São Paulo: Cortez. 2005.

NUNES, T.; et al. **Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação**. Petrópolis: Vozes. 2012.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Key understandings in Mathematics learning, *Paper 3*: Understanding rational numbers and intensive quantities**. Nuffield Foundation. 2009. Disponível em: nuffield foundation.org/reports. Acesso em 15 jun. 2013.

PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. **The child's conception of geometry**. London: Routledge, Kegen Paul, 1960. p.40-127.

PINHEIRO, M.G.C. **Formação de Professores dos Anos Iniciais: conhecimento profissional docente ao explorar a introdução do conceito de fração**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN-SP, São Paulo, 2014.

SPINILLO, A.G.; BRYANT, P. Children's proportional judgments: The importance of "half". **Child Development**, v.62, n.3, p.427-440, 1991.

SPINILLO, A.G.; CRUZ, M.S.S. **Crianças usando o referencial de metade e de inteiro na adição de frações**. In: 2º SIPEMAT, Recife: UFRPE, 2008. http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/CD-ROM%202%20SIPEMAT/artigos/CO-10.pdf.

STREEFLAND, L. **Fractions in Realistic Mathematics Education***:* A Paradigm of Developmental Research. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers. 1991.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. In: Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática* do Rio de Janeiro. p.1-26. 1993.

Submetido: fevereiro de 2016

Aceito: abril de 2016