CORPORIFICAÇÕES PROCEDIMENTAIS E SUAS CONSEQUÊNCIAS PARA A TRANSIÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES PARA QUADRÁTICAS

Rosana Nogueira de Lima[1]
Universidade Bandeirante de São Paulo, Brasil
David Tall[2]
Universidade de Warwick, Reino Unido
Lulu Healy[3]
Universidade Bandeirante de São Paulo, Brasil

RESUMO

Neste artigo, consideramos como alunos que desenvolveram métodos procedimentais de resolver equações lineares, transpondo símbolos pelo uso de regras tais como 'muda de lado, muda de sinal' passam a lidar com equações quadráticas. Apresentamos o construto de corporificação procedimental – a atribuição de significado corporificado à manipulação simbólica – que desenvolvemos para interpretar as atividades de alunos em situações envolvendo equações lineares. Nossos resultados sugerem que, uma vez desenvolvidas, tais corporificações procedimentais continuam a caracterizar as estratégias que os alunos usam para equações quadráticas. Como conseqüência, apenas poucos desses alunos puderam resolver equações quadráticas usando a fórmula de Bhaskara, enquanto outros usaram métodos como 'passar a potência para o outro lado, e transformá-la em uma raiz' para obter uma única solução para equações como $x^2 = 9$, ou uma combinação de corporificações procedimentais que, frequentemente, levam a erros. Argumentamos que, para entender a preferência dos alunos pelas corporificações procedimentais em detrimento do uso de qualquer modelo conceitual corporificado (tal como a balança para representar uma equação) ou atribuindo significado para símbolos que reconheçam a dualidade deles como processos e objetos, precisamos considerar tanto aspectos de cognição

[1] rosananlima@gmail.com
[2] davidtall@mac.com
[3] lulu@baquara.com

corporificada quanto idéias desenvolvidas nas teorias de encapsulação de processos em objetos. Dessa forma, interpretamos nossos resultados e revisitamos resultados de estudos anteriores como parte do desenvolvimento de um quadro teórico mais amplo, que incorpora corporificação humana e manipulação simbólica, levando em consideração as experiências que os alunos já encontraram.

Palavras-chave: Equações lineares, Equações quadráticas, Corporificações procedimentais, Simbolismo.

ABSTRACT

In this paper we consider how students who had developed procedural methods of solving linear equations by shifting symbols using rules such as ‘change sides, change signs’ went on to deal with quadratic equations. We present the construct of procedural embodiment – the attribution of embodied meanings to symbol manipulations – which we developed to interpret the activities of students within situations involving linear equations. Our results suggest that once developed, such procedural embodiments continue to characterise the strategies students used for quadratic equation. As a consequence only a few students could solve quadratic equations using the formula, while other used methods such as ‘passing the power over the other side and changing it to a root’ to get a single solution for an equations such as $x^2 = 9$ or a combination of procedural embodiments that often led to error. We argue that to understand students preferences for procedural embodiments over the use of any conceptual embodied model (such as a balance to represent an equation) or by attributing meaning to symbols which recognise their duality as processes and objects, we need to attend both to aspects of embodied cognition and to ideas developed in theories of process-object encapsulation. In this vein, we interpret our results and revisit the results of previous studies as part of the development of a wider theoretical framework incorporating human embodiment and symbolic manipulation, taking account of the experiences that the students had met before.

Keywords: Linear equations, Quadratic equations, Procedural embodiment, symbolism.

INTRODUÇÃO

Em um artigo anterior (LIMA; TALL, 2008), apresentamos uma análise do trabalho de alunos brasileiros com equações lineares à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Este quadro foi um elemento chave para trazer novas interpretações para as estratégias usadas por estudantes para resolver equações, e em particular enfatizar que, enquanto as ações dos alunos não podem ser consideradas sem significados – eles realmente dão significado aos símbolos matemáticos que usam para resolver equações –, tais significados tendem a não ser baseados em princípios algébricos, mas sim nas ações corporificadas dos alunos com os símbolos. Em particular, essas ações dependem das experiências que os alunos encontraram anteriormente, relacionadas com a análise de 'já-encontrados'[4] (MCGOWEN; TALL, 2010) que enfatizaram não apenas o efeito de experiências anteriores dos estudantes, mas também dos professores e dos teóricos que formulam teorias de aprendizagem. As ações empregadas pelos alunos envolviam transposição de símbolos na imaginação e também no papel, de acordo com rotinas tais como 'mover um termo para o outro lado e mudar o sinal'. Nomeamos tais operações de 'corporificações procedimentais' porque os procedimentos envolvem o movimento corporificado de símbolos como entidades mentais, com regras adicionais para obter a 'resposta correta'.

Duas regras específicas dominaram:

1) 'muda de lado, muda de sinal'

Com a qual, por exemplo, se opera sobre a equação $3x - 1 = 3 + x$ passando 1 para a direita e x para a esquerda e mudando os sinais para obter:

$$3x - x = 3 + 1$$

$$2x = 4$$

2) 'muda de lado e coloca embaixo'

Com a qual o 2 associado com a expressão 2*x* na equação acima é movido de um membro da equação para o outro e então colocado embaixo

[4] Do inglês: 'met-before', tradução nossa.

$$x = \frac{4}{2} = 2.$$

Em uma tentativa de usar tais regras, alguns estudantes cometeram erros, tais como mudar $2x = 4$ para

(a) $x = 4 - 2$ (b) $x = \frac{4}{-2}$ (c) $x = \frac{2}{4}$

Em (a) 2 passa para o outro membro e o sinal é trocado; (b) corretamente ‘passa o dois para o outro lado e coloca embaixo’ mas também ‘troca o sinal’; (c) passa o 2 para o outro lado e coloca o 4 embaixo. Isso revela a fragilidade de usar as corporificações procedimentais desenvolvidas pelos alunos, e mostra como, apesar de elas às vezes permitirem que os alunos produzam soluções corretas, a “mágica” foi frequentemente lembrada de maneira errônea, resultando em uma ampla gama de erros bem conhecidos na literatura.

Outra conclusão dos resultados relatados nos artigos anteriores é que os alunos participantes desta pesquisa tendem a se engajar em procedimentos de transposição similares sem considerar a natureza da equação com a qual estão trabalhando. Isto é, o amplamente relatado “corte didático”, primeiro documentado por Filloy e Rojano (1989) aparentemente não se manifestou. De acordo com Filloy e Rojano, estudantes experienciam dificuldades em negociar a passagem de resolver equações com a incógnita em apenas um membro (que os autores chamam de equações aritméticas) para resolver o que chamam de equações não-aritméticas, nas quais a incógnita ocorre em ambos os membros. Filloy e Rojano argumentam que, quando a incógnita aparece em apenas um membro, muitos estudantes são capazes de resolver a equação com sucesso antes de receber instrução a respeito dos métodos de resolução de equações. Os alunos participantes desta pesquisa estudaram métodos de resolução de equações lineares antes de fazerem parte do estudo, e, talvez por esta razão, todas as soluções escritas e verbalizadas, sejam bem-sucedidas ou não, foram feitas de uma maneira consonante com o uso de corporificações procedimentais que *poderiam* funcionar para ambos os tipos de equações, e, portanto, a localização da incógnita na equação não pareceu emergir como um ponto central para estes estudantes: eles trataram ambos os tipos de equação da mesma forma.

Portanto, ao invés de nos focarmos na posição da incógnita em uma equação, achamos útil fazer uso da categorização da Álgebra feita por Thomas e Tall (2001) em três tipos, álgebra de avaliação, álgebra de manipulação e álgebra axiomática. Conjecturamos que as equações aritméticas de Filloy e Rojano podem ser vistas, em tese, com equações de avaliação, já que, sendo da forma $ax + b = c$, tais equações podem ser resolvidas "desfazendo" as operações efetuadas sobre a incógnita para obter o valor dela (isto é, efetuando as operações inversas), enquanto as equações não-aritméticas parecem, novamente de um ponto de vista teórico, mais relacionadas com álgebra de manipulação, ou o que pode ser chamado de equações de manipulação (LIMA, 2007).

Em um artigo mais recente (LIMA; HEALY, 2010), esta categorização de equações como equações de avaliação e equações de manipulação foi analisada em mais detalhes em relação a pesquisas relacionadas com a idéia do corte didático. Em particular, questionamos se a manifestação dele de fato tem suas raízes necessariamente na estrutura das próprias equações, e no fato de a incógnita estar presente em um ou ambos os membros. Talvez essa manifestação tenha raízes no relacionamento entre o aluno e as equações que foram dadas a eles para trabalhar e com os significados que ele associa às estratégias que usadas para resolvê-las. De fato, notamos que na pesquisa de Filloy e Rojano, um fator impactante nas tentativas dos estudantes de resolver equações foi como as equações foram relacionadas ou não ao uso de modelos concretos – especificamente, quando tais modelos foram introduzidos para ensinar os alunos a resolver equações não-aritméticas, eles pareciam ter tido uma perda de habilidade de resolver equações aritméticas.

Em Lima e Healy (2010), nossa busca por um entendimento do fenômeno do corte didático foi ligeiramente diferente daquela de Filloy e Rojano, pois precisávamos entender por que tal corte não se manifestou em nossa pesquisa. Começamos analisando nossa categorização de equações em equações de avaliação e de manipulação, e comparando-a com a classificação de Filloy e Rojano e a de Vlassis (2002), e as relações delas com o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática. Nossa conjectura é a de que um entendimento do relacionamento entre os mundos simbólico e corporificado pode também ser útil no entendimento das interações dos alunos com equações de avaliação e equações de manipulação. Além disso, conjecturamos que as raízes para o corte didático não estão na posição da incógnita na equação, mas nas conexões entre os mundos corporificado e simbólico. Isto é, os alunos do estudo brasileiro não necessariamente acharam mais difícil resolver equações nas quais a incógnita ocorre em ambos os membros do que aquelas nas quais a incógnita ocorre apenas em um membro, porque suas experiências anteriores em sala de aula os encorajaram a ver ambos os tipos de equação como se fossem um único. Por outro lado, usar unicamente corporificações procedimentais para resolver equações lineares guiou alguns alunos ao erro, já que as corporificações procedimentais trazem ao estudante uma (falsa) sensação de habilidade para trabalhar com equações – e fazem com que todas elas sejam tratadas como equações de manipulação. De fato, com a movimentação de símbolos, os estudantes não consideraram a possibilidade de buscar um valor para a incógnita que pudesse resultar em uma afirmação verdadeira (outra forma de avaliação), e havia no trabalho deles com equações pouco significado associado ao mundo simbólico, já que eles procuram significado no mundo corporificado.

À luz dos resultados associados com as tentativas dos estudantes de resolver equações lineares, neste artigo, passamos a analisar o trabalho dos mesmos alunos com equações quadráticas. Consideramos como os alunos resolveram equações quadráticas, os métodos que usaram para resolvê-las, as relações entre estes e os métodos usados para resolver equações lineares, e se as mesmas corporificações procedimentais ainda dominam as estratégias de resolução empregadas. Também discutimos como equações quadráticas podem ser categorizadas como equações quadráticas de avaliação e equações quadráticas de manipulação, e procuramos diferenças em resolver esses tipos de equações no trabalho dos alunos, que nós tentamos interpretar usando o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2008) e também os aspectos desse quadro relacionados com os já-encontrados dos participantes (LIMA; TALL, 2006; MCGOWEN; TALL, 2010).

REVISÃO DE LITERATURA

A literatura considerada nesta seção envolve dois ramos distintos: a literatura específica sobre equações quadráticas, e quadros teóricos relevantes associados a corporificação e simbolismo, incluindo teorias de processo-objeto e cognição corporificada.

Pesquisas relacionadas a equações quadráticas

As pesquisas relacionadas à resolução de equações quadráticas por estudantes não é tão vasta quanto aquelas relacionadas a equações lineares. Vaiyavutjamai e Clements (2006) relatam ter encontrado poucos estudos direcionados aos desafios cognitivos com os quais os alunos se deparam ao trabalhar com equações quadráticas, indicando uma necessidade urgente de pesquisa que considera esse tipo de trabalho. A pesquisa deles sobre os efeitos da instrução em sala de aula em relação ao entendimento de equações quadráticas envolveu a análise de testes escritos feitos por 231 alunos da 9ª série na Tailândia e entrevistas com 18 deles antes e depois de 11 aulas dedicadas a ensinar os alunos a resolver equações quadráticas completando quadrados, fatorando e usando a fórmula de Bhaskara, no que eles chamaram de abordagem tradicional. Nessa pesquisa, os alunos participantes não foram capazes de resolver a equação $(x-3)\cdot(x-5)=0$ como ela está. Foi preciso multiplicar os fatores, fatorá-la novamente e então obter as soluções para esta equação. Além disso, para checar se as soluções encontradas estavam corretas, eles substituíram o *x* do primeiro parênteses por 3 e o *x* do segundo parênteses por 5, o que foi interpretado pelos autores como uma falta de entendimento da incógnita, já que eles pareciam tratar o *x* nessa equação como se ele tivesse dois valores diferentes. Para a equação $x^2=9$, os alunos disseram que "naquela equação, *x* aparece apenas uma vez, e portanto só há uma solução" (VAIYAVUTJAMAI; CLEMENTS, 2006, p.72). E também, muitos não entenderam a lei de que se o produto de dois fatores é zero, então um deles deve ser zero, isto é, se $(x-a)\cdot(x-b)=0$, então $x-a=0$ ou $x-b=0$. Em conclusão, os autores acharam que apesar dos estudantes terem conseguido produzir soluções corretas, eles podem ter sérias concepções errôneas.

Em uma linha similar, Thorpe (1989) relatou que mesmo quando os estudantes são bem-sucedidos em encontrar soluções para equações quadráticas, o sinal '±' em expressões tais como $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ podem não ser entendidas significativamente por eles.

Radford e Guérette (2000) apresentaram "uma sequência de ensino cujo propósito é levar os alunos a reinventar a fórmula que resolve uma equação quadrática genérica" (p.69). Para isso, eles apresentaram o que chamaram de Modelo Geométrico Babilônico, no qual alunos trabalharam com quadrados e retângulos para entender geometricamente a idéia de completamento de quadrados. Depois de trabalhar com o modelo, os estudantes foram encorajados a encontrar uma fórmula algébrica genérica para resolver equações da forma $x^2 + bx = c$, que é o tipo de equação relacionada a este modelo. Os alunos devem, então, pensar algebricamente para encontrar, primeiro, a fórmula para equações como $x^2 + bx + c = 0$ e, em seguida, para $ax^2 + bx + c = 0$. Os autores sugerem que esta é uma boa maneira de introduzir a fórmula de Bhaskara para os alunos por causa das relações entre a Álgebra e a Geometria, tendo por objetivo "proporcionar um contexto útil para ajudar os estudantes a desenvolverem significado para os símbolos" (p.74). Entretanto, quando os alunos chegam à fórmula para o primeiro tipo de equações, $x^2 + bx = c$, eles devem deixar de lado o significado geométrico que estavam usando para pensar algebricamente em como mudar a fórmula para obter solução para uma equação quadrática mais geral $ax^2 + bx + c = 0$. Os autores também relataram que os alunos podem precisar de tempo para abandonar o modelo babilônico e usar a fórmula. Nossa opinião é a de que muitos alunos podem permanecer conectados ao modelo, e não serem capazes de obter a fórmula ou fazer as manipulações simbólicas para lidar com ela.

Gray e Thomas (2001) relataram uma abordagem de ensino para equações quadráticas usando papel e lápis e calculadoras gráficas, aplicada a 25 alunos da 10ª série em Auckland (Nova Zelândia). Esta abordagem envolveu o uso de representações simbólica, tabular e gráfica. Foi pedido aos alunos que traçassem os gráficos das funções associadas à equação, e que encontrassem as soluções da equação de várias maneiras. Os autores observaram que não houve progresso nas habilidades procedimentais para resolver equações quadráticas; os estudantes pareciam não entender o princípio de efetuar a mesma operação em ambos os membros de uma equação, e usavam procedimentos sem compreender seus fundamentos. Tais alunos foram capazes de efetuar uma gama de tarefas individuais e ainda assim não tinham flexibilidade de passar facilmente de uma representação para outra, mesmo de maneira procedimental, envolvendo o uso de gráficos para resolver equações associadas a eles.

Isso sugere que pesquisas anteriores enfatizaram dificuldades que estudantes tiveram em dar significados apropriados aos procedimentos que lhes foram ensinados para resolver equações quadráticas – talvez um resultado não tão diferente do caso das equações lineares. Argumentamos que os alunos que participaram de nosso estudo já têm um histórico de falta de flexibilidade com manipulação simbólica e entendimento de procedimentos para resolver equações. Ao invés de qualquer entendimento conceitual, tal como uma balança ou qualquer uso consistente de um princípio geral de 'fazer a mesma coisa em ambos os membros', eles movimentam símbolos de uma maneira procedimentalmente corporificada, numa tentativa de simplificar a equação para chegar na solução. Antes de analisar o trabalho deles com equações quadráticas, vamos enfocar aspectos da literatura relacionada à corporificação e à manipulação mental de símbolos, e então traçar o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática.

Teorias de desenvolvimento cognitivo

Teorias de processo-objeto afirmam que os indivíduos aprendem pela *encapsulação* (DUBINSKY, 1991) ou *reificação* (SFARD, 1991) de um processo em um objeto. A teoria APOS (DUBINSKY, 1991), afirma que essa transformação vai de Ações para Processos para Objetos, que são, então, organizados em Esquemas; enquanto a teoria da reificação (SFARD, 1991) sugere que concepções operacionais são condensadas e reificadas em concepções estruturais. Ambas as teorias observam que a encapsulação (reificação) pode não ocorrer, de forma que o estudante continue apenas a usar procedimentos manipulando símbolos que Sfard chama 'objetos pseudo-estruturais' pois lhe faltam significado flexível (LINCHEVSKI; SFARD, 1991).

As soluções errôneas que observamos nas resoluções de equações lineares certamente envolvem o que Matz (1980) chamou de mal-rules. Entretanto, subjacente a essas regras, estão atos mentais de movimentar símbolos de forma a envolver o pegar um termo e colocá-lo em outro lugar, com um ingrediente extra (por exemplo 'trocar o sinal') para obter a resposta correta. Isso, por sua vez, envolve uma ação de movimentar objetos agora efetuados imaginadamente na mente do indivíduo, e o resultado transferido para o papel. Dessa forma, acreditamos que não é um simples uso dos objetos pseudo-estruturais de Sfard que acontece no trabalho desse alunos com equações, mas os alunos estão dando, para os símbolos, significados que não estão relacionados com os próprios símbolos, mas sim mais relacionados com uma corporificação funcional de movimentar símbolos com regras adicionais, de forma que esses movimentos dêem a resposta correta.

O termo 'cognição corporificada' refere-se a teorias cognitivas que dão prioridade a experiências corpóreas como fontes de significado conceitual (LAKOFF, 1987; LAKOFF; NÚÑEZ, 2000). Lakoff e Núñez (2000, p. xii) afirmam que *"as idéias humanas são em uma grande extensão, enraizadas em experiências sensório-motoras"*. Isso sugere que o raciocínio matemático, que envolve idéias humanas, também é enraizado em experiências sensório-motoras.

Lakoff e seus colegas argumentam que a relação entre raciocínio matemático e experiências corpóreas é feita por metáforas conceituais *"um mecanismo cognitivo que permite que raciocinemos sobre um tipo de coisa como se ela fosse outra"* (LAKOFF; NÚÑEZ, 2000, p.6); eles propõem que é por meio dessas metáforas que os indivíduos aprendem *todos* os conceitos matemáticos, o que deve envolver equações lineares e quadráticas.

Na resolução de equações lineares, os alunos de nosso estudo realmente parecem usar um procedimento relacionado com movimento sensório–motor de símbolos como objetos, que às vezes permite que eles cheguem na solução correta. Esta estratégia poderia ser integrada em um método perfeitamente coerente de resolver equações que sempre resulta em resultados corretos, mas frequentemente isso não acontece. Quando os processos de resolução procedimentais não estão conectados a qualquer significado conceitual apropriado, parecem ser frágeis e a atenção dos alunos pode ser focada principalmente em tentar lembrar as variações de mudar de lados e sinais que eles deveriam adotar para qualquer equação dada.

Teorias de processo-objeto e teorias de cognição corporificada são, cada uma delas, capazes de trazer novas reflexões para algum aspecto dos processos de pensamento envolvidos. Entretanto, as teorias de processo-objeto focam em interpretações de símbolos na mudança de processos para objetos com muito menos atenção a experiências corpóreas em aprendizado. Ao mesmo tempo, a corporificação de Lakoff e seus colegas não se refere explicitamente à compressão dos processos em objetos mentais por meio da encapsulação.

Como podemos ver em nossa própria pesquisa e no corpo da literatura relacionada ao trabalho de alunos com equações, aspectos combinando características de ambos, processos para resolver equações e movimento de símbolos, estão presentes nas atividades deles. Para analisar nossos dados de maneira a oferecer novas reflexões nos significados que os alunos dão para equações e como eles entendem as regras que usam para resolvê-las, nós, portanto, fazemos uso de um quadro teórico que integra corporificação com teorias de encapsulação de processos em objetos.

OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

Este quadro teórico, integrando corporificação, encapsulação de processos em objetos e demonstração formal em Matemática tem suas origens no início dos anos 1990, como desenvolvimento do livro “Advanced Mathematical Thinking”[5] (TALL, 1991). No último capítulo deste livro, Tall propôs a existência de (pelo menos) três diferentes tipos de Matemática, um (como na Geometria Euclidiana) enfocando em propriedades de objetos e relacionamentos entre essas propriedades, um encapsulando processos em conceitos como em Aritmética e Álgebra, e um terceiro sendo a visão formalista de Hilbert da Matemática baseada em definições de teoria de conjuntos e demonstrações. Isso foi subsequentemente desenvolvido em um quadro teórico prático para explicar o desenvolvimento cognitivo de Matemática de indivíduos desde o nascimento até a fase adulta, enfocando três maneiras distintas de pensar que amadurecem com o tempo (e.g. GRAY; TALL, 1994; TALL, 1995; GRAY; PITTA; PINTO; TALL, 1999; GRAY; TALL, 2001; WATSON; SPIROU; TALL, 2003; TALL, 2004; TALL, 2006; TALL, 2008).

[5] Pensamento Matemático Avançado

O primeiro tipo de Matemática é nomeado ‘corporificação conceitual’, e se refere à maneira com a qual um indivíduo começa interagindo com objetos físicos e amadurece por meio de pensar sobre eles como experimentos de pensamento, focando nas propriedades deles e construindo relacionamentos. Por um lado, resulta o mundo conceitual corporificado, construído em direção à Geometria de Euclides e além. Por outro lado, ações são enfocadas, inicialmente em objetos físicos, mas mais tarde em objetos mentais, tais como contagem, divisão, adição, subtração, multiplicação. Esses processos são simbolizados como operações matemáticas e podem ser comprimidos em conceitos pensáveis (proceitos) tais como número, soma, produto, fração, expressão algébrica, entre outros. Isso resulta em um novo tipo de Matemática que se desenvolve a longo prazo por meio do que foi inicialmente nomeado ‘mundo proceitual simbólico’ (e.g. em TALL, 2004). Em tal mundo, incorpora-se o desejo de construir pensamento *flexível* com símbolos como processos ou objetos manipuláveis, mas, como vemos nesse estudo, muitos estudantes não desenvolvem maneiras flexíveis de operar. Eles desenvolvem maneiras procedimentais que envolvem passos sucessivos de um procedimento aprendido, frequentemente suportado por uma corporificação procedimental subjacente. Então, o mundo do simbolismo em Aritmética e Álgebra é mais apropriadamente definido em termos de ambos pensamento proceitual (flexível) e operações procedimentais, e, por isso, foi renomeado “mundo operacional simbólico’ para refletir a realidade de seu desenvolvimento.

Enquanto alguns estudantes continuam a ver o crescimento da Aritmética e da Álgebra de maneira simples e flexível, comprimindo operações sequenciais em conceitos flexíveis e manipuláveis, outros constroem procedimentos cada vez mais complicados, que são prováveis de se tornar cada vez mais instáveis. É esse último que acontece com a maioria dos alunos neste estudo.

Os dois mundos de corporificação (conceitual) e simbolismo (operacional) interagem por toda a matemática escolar. No que segue, esses dois mundos de desenvolvimento da Matemática serão chamados ‘corporificado’ e ‘simbólico’, com o entendimento de que esses termos são usados com os significados estendidos dados acima. Quando dizemos ‘corporificado’, queremos dizer ‘conceitual corporificado’ e quando dizemos ‘simbólico’, queremos dizer ‘operacional simbólico’.

Nossa preocupação principal nesse estudo se refere à combinação de corporificações procedimentais e simbolismo procedimental que aparecem no trabalho dos referidos alunos.

Em resumo, o modelo dos três mundos é representado na Figura 1 com o crescimento cognitivo começando no canto inferior à esquerda com a criança interagindo com o ambiente e construindo descrições e definições cada vez mais sofisticadas, subindo até alcançar uma forma corporificada de demonstração caracterizada, por exemplo, pela Geometria Euclidiana.

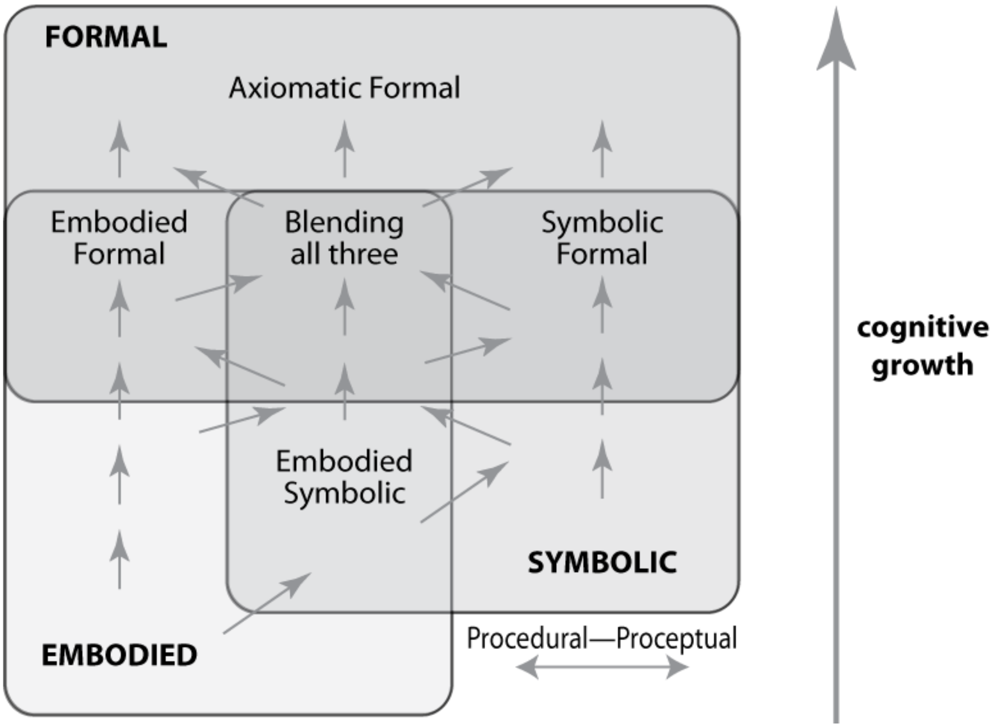


Figura 1: Os Três Mundos da Matemática

Ações corporificadas como contagem operam em uma combinação de corporificação e simbolismo que pode passar para a encapsulação de entidades simbólicas tais como o número. Do lado direito, encapsulações cada vez mais sofisticadas de processos em objetos mentais dão várias formas sucessivas de número: números naturais, frações, números com sinal, racionais, números reais e assim por diante, e processos de aritmética generalizada trazem a tona a Álgebra e uma forma simbólica de demonstração baseada em 'regras de aritmética' especificada.

O mundo formal é caracterizado por deduções a partir de definições, de pelo menos três maneiras diferentes, como corporificado formal na Geometria Euclidiana, baseado em definições de figuras e princípios tais como congruência e linhas paralelas; como simbólico formal em Álgebra, baseado em regras de Aritmética; e como axiomático formal, baseado em definições de teoria dos conjuntos e demonstração em Matemática. Algumas formas de prova unem duas ou mais formas, por exemplo, geometria esférica é uma união da corporificarão do espaço com o simbolismo da trigonometria esférica.

Este quadro teórico está em consonância com o ponto de vista do Grupo de Pensamento Matemático Avançado (Advanced Mathematical Thinking Group) do PME[6] (TALL, 1991), no qual idéias formais introduzidas na matemática escolar podem funcionar como uma transição para o formalismo matemático completo da Matemática pura da universidade. Ele também traz o uso do termo 'formal' próximo daquele usado por Fischbein (1987), que incorpora aspectos corporificados, simbólicos e formais.

Neste estudo, vemos que o desenvolvimento da solução algébrica de equações poderia ser baseado formalmente no princípio de 'fazer a mesma coisa em ambos os membros'. Entretanto, poucos dos estudantes envolveram uso de tal princípio; ao invés disso, eles tentaram usar manipulação de símbolos para resolver equações, mas o que realmente aconteceu foi que eles basearam suas resoluções em ações corporificadas de movimentação dos símbolos, com um aspecto adicional para produzir a resposta desejada.

O que os alunos já encontraram

Ao considerar o desenvolvimento de equações lineares para quadráticas, precisamos examinar como o aprendizado anterior tem impacto nas experiências posteriores. Tall (2008) introduziu o termo 'já-encontrado' para descrever 'uma estrutura mental que temos agora como resultado de experiências que já encontramos'. Para lidar com uma tarefa não-familiar, diferentes já-encontrados

[6] Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (The International Group for the Psychology of Mathematics Education)

podem ser fundidos[7] (TALL, 2008; LIMA; TALL, 2008). Entretanto, tal fusão pode levar a dois efeitos muito diferentes. Pode haver aspectos da fusão que proporcionam cada vez mais poder a partir de novas idéias, dando grande prazer ao aprendiz. Por outro lado, pode haver aspectos que não se encaixam perfeitamente, e que causam ansiedade e confusão. Então, esta fusão pode oferecer tanto vantagens positivas quanto impedimentos negativos, resultando em um amplo espectro de desempenho possível, a partir da construção dessas idéias poderosas com prazer, até aqueles que lutam para superar conflitos, e até aqueles que não conseguem dar sentido à situação.

Fauconnier e Turner (2002) focam principalmente no lado positivo da fusão, que leva à criatividade e desenvolvimento contínuo de novas idéias matemáticas. Entretanto, a fusão de experiências antigas que não se encaixam é conhecida há muito tempo como obstáculo epistemológico (Bachelard, 1938). A noção de 'já-encontrado', portanto, inclui ambos os aspectos colaborativos e os problemáticos.

A transição da Aritmética para Álgebra envolve já-encontrados de ambos os mundos corporificado e simbólico. Já-encontrados simbólicos vêm da familiaridade com as operações da Aritmética e de um sentido de operações generalizadas da Aritmética que são simbolizadas em Álgebra. Aspectos problemáticos emergem de várias fontes, tais com o já-encontrado de que uma expressão aritmética é sempre uma deixa para calcular uma resposta, enquanto uma expressão algébrica não pode dar uma resposta a não ser que os valores numéricos da variável sejam conhecidos (o obstáculo da 'falta de fechamento[8]', Collis, 1978). Outro já-encontrado é a experiência que o sinal de igual envolve uma expressão no primeiro membro para ser avaliada para dar uma resposta no segundo membro (como observado por Kieran, 1981). Já-encontrados corporificados podem emergir do uso de representações físicas ou mentais, tais como a noção de balança para representar uma equação linear, ou os retângulos geométricos descritos por Radford e Guérette (2000). Enquanto a noção da balança com frequencia é útil no início, ela pode se tornar problemática quando se lida com equações com termos negativos que não se encaixam mais na corporificação específica. Esse efeito foi percebido por Vlassis (2002) quando a idéia da balança foi geralmente útil nos primeiros estágios de

[7] Do inglês, "blend".
[8] Do inglês 'Lack of closure'.

equações simples, mas tornou-se problemática a medida que as equações foram ficando mais complexas. No caso do completamento de quadrados para se obter a fórmula de Bhaskara para resolver equações quadráticas, estudantes tinham que lidar com o símbolo que eles acham difícil e complexo, para encontrar a fórmula geral para resolver equações na forma $ax^2 + bx + c = 0$, já que a fórmula que eles acham estudando o Modelo Geométrico Babilônico serve, na realidade, para resolver equações como $x^2 + bx = c$. À primeira vista, estas equações parecem muito similares, e não deveria ser muito difícil para os alunos mudarem a fórmula disponível para o caso mais simples de forma a fazer com que ela seja válida para uma mais complexa. Entretanto, lidar com manipulação simbólica pode não ser uma tarefa fácil, e o modelo geométrico pode acabar por sendo problemático de ser adaptado.

Neste estudo, veremos a influência de já-encontrados colaborativos e problemáticos a medida que os estudantes passam de equações lineares que já têm aspectos problemáticos, para equações quadráticas que introduzem novas características. Isso se relaciona diretamente com a teoria geral de já-encontrados em McGowen e Tall (2010).

Equações quadráticas de avaliação e de manipulação

Em Lima e Tall (2008), denominamos *equações de avaliação* aquelas “da forma $3x + 2 = 8$ em que uma expressão é avaliada para resultar em um número” (p.7). Com tais equações, é possível desfazer as operações efetuadas na incógnita para encontrar o seu valor, sem de fato ter que operar com a incógnita. Por outro lado, equações nas quais a incógnita aparece em ambos os membros, assim como em $3x - 1 = 3 + x$, não é possível desfazer operações para achar o valor da incógnita. Este tipo de equação foi denominada *equação de manipulação* (Lima, 2007).

Seguindo esta categorização de equações lineares, em Lima (2007), também caracterizamos equações quadráticas em equações de avaliação e equações de manipulação. Nosso entendimento é o de que equações quadráticas na forma $ax^2 = b$ são equações de avaliação, já que é possível desfazer as operações efetuadas sobre a incógnita, para se chegar à solução. O mesmo ocorre com equações na forma $a(x+b)^2+c=d$, enquanto equações na forma $a(x-x_1)\cdot(x-x_2)=0$ podem ser avaliadas para se obter suas soluções. Entretanto, não é sempre possível fazer o mesmo raciocínio para se obter ambas as soluções para equações na forma $ax^2+bx+c=0$, já que elas exigem manipulação simbólica. Dessa forma, elas foram nomeadas equações de manipulação.

Nossa categorização de equações em equações de avaliação e de manipulação foi baseada no quadro teórico de Thomas e Tall (2001) que é incorporado no desenvolvimento dos Três Mundos da Matemática. Como apresentado em Lima e Healy (2010), uma equação é formada por símbolos e habitam o mundo simbólico. Entretanto, a nossa visão é de que todos os conceitos matemáticos eventualmente desenvolvem características de todos os três mundos (em que o mundo formal inclui não somente formalismo axiomático, mas também altos níveis de dedução desenvolvidos a partir de corporificações e simbolismos). Em nossa classificação de equações lineares e quadráticas como equações de avaliação e equações de manipulação, entendemos que equações de avaliação são intimamente relacionadas com o mundo corporificado, já que a possibilidade de "desfazer" operações permite que se pense aritmeticamente – tratando a equação como um tipo de lista de cálculos que ocorrem sobre algum objeto – e não necessariamente por meio de símbolos e incógnitas. Entretanto, é importante notar que, quando se lida com uma equação tal como $(x-1)^2=6$, desfazendo as operações, se chega a $x-1=\pm\sqrt{6}$, e lidar com $\pm\sqrt{6}$ é parte do mundo simbólico, o que pode ser a razão pela qual Thorpe (1989) relatou dificuldades dos estudantes em lidar com esses números. Por outro lado, quando se lida com equações de manipulação, é impossível ter o mesmo tipo de pensamento, e é essencial lidar com símbolos de forma intimamente relacionada ao mundo simbólico. É necessário entender o significado matemático dos símbolos, como manipulá-los para preservar as raízes da equação. Por exemplo, ao lidar com a equação $a^2-2a-3=0$, é necessário completar quadrados ou usar a fórmula para obter as duas soluções. De certa forma, é vendo símbolos matemáticos como proceitos que os indivíduos podem usar o mundo simbólico como um todo e entender o uso de proceitos ao resolver equações (quadráticas) de maneira significativa.

Além disso, nossa visão é a de que, quando uma equação é resolvida efetuando a mesma operação em ambos os membros, incluindo completamento de quadrados, uma característica formal de resolver equações está sendo usada.

A PESQUISA

Esta pesquisa emergiu de um estudo combinado com a primeira autora compartilhando idéias com um grupo de professores de ensino médio com o objetivo de examinar as práticas de ensino daqueles professores para buscar maneiras de melhorar o ensino. A pesquisadora encorajou os professores a desenvolver suas próprias idéias e compartilhar a elaboração dos instrumentos de coleta de dados e a própria coleta. Os dados vieram de 80 alunos em três grupos de ensino médio, um grupo de 32 alunos e outro de 28 alunos de 1º ano de uma escola pública da cidade de Guarulhos/SP, e um grupo de 20 alunos de 2º ano, de uma escola particular em São Paulo/SP; todos já haviam sido ensinados a resolver equações lineares pelo menos dois anos antes de esta pesquisa acontecer, e equações quadráticas pelo menos um ano antes da pesquisa.

No estudo, havia três instrumentos de coleta de dados, cada um aplicado pelo professor da classe em uma aula de 100 minutos. O primeiro convidava os alunos a construir um mapa conceitual dos conhecimentos deles sobre equações; o segundo era um questionário; e o terceiro, uma tarefa de resolução de equações. Depois de uma análise inicial dos dados, 20 alunos foram selecionados para entrevistas, conduzidas pela pesquisadora, na presença de um observador, e áudio-gravadas para análises posteriores. Estudantes que participaram das entrevistas foram escolhidos pelo tipo de trabalho que eles apresentaram – incluindo erros típicos ou respostas corretas. Nas entrevistas, queríamos investigar por que os alunos se desempenharam da forma que apresentaram. Em particular, foi pedido a eles que explicassem que tipo de manipulação simbólica eles efetuaram e por que eles acreditaram que aquela era uma maneira apropriada para resolver uma equação. Neste artigo, focamos especificamente no trabalho dos alunos ao resolver equações quadráticas (Análises detalhadas de outras partes do estudo podem ser encontradas em Lima e Tall, 2006a; Lima e Tall, 2006b; Lima, 2007; Lima e Tall, 2008, Lima e Healy, 2010).

Tarefas com equações quadráticas

Os dados usados para investigar as concepções dos alunos sobre equações quadráticos vieram de dois instrumentos, uma tarefa de resolução de equações, com três equações lineares, analisadas em Lima e Tall (2008) e Lima e Healy (2010), e quatro equações quadráticas:

$$3l^2 - l = 0;\ r^2 - r = 2;\ a^2 - 2a - 3 = 0;\ m^2 = 9$$

e um questionário que incluiu duas equações quadráticas:

$$t^2 - 2t = 0;\ (y-3)\cdot(y-2=0).$$

O questionário também incluiu uma questão em que se pedia para analisar a solução de uma equação quadrática como apresentada por um aluno imaginário "Joãozinho":

> Para resolver a equação $(x-3)\cdot(x-2)=0$ no conjunto dos números reais, Joãozinho respondeu em uma linha:
>
> "$x = 3$ ou $x = 2$"
>
> A resposta está correta? Analise e comente a resposta de Joãozinho.

Figura 2: Problema do Joãozinho (Questão 8 do questionário).

Entrevistas com os alunos selecionados deram adicionais comentários pessoais sobre como eles interpretaram as tarefas e suas soluções, que nos ajudaram a compreender como eles podem ter pensado. Na próxima seção, consideramos dados relacionados com as seis equações e o "Problema do Joãozinho", bem como as falas dos alunos nas entrevistas.

DADOS E RESULTADOS

Um total de 68 alunos deu suas respostas para a tarefa de resolução de equações, e 77 alunos responderam ao questionário, devido a ausências no dia em que cada instrumento foi administrado. A partir de uma análise de todos os instrumentos, nossos resultados revelam que esses alunos principalmente interpretam uma equação como um cálculo, construído a partir das experiências deles ao trabalharem com números. Por exemplo, quando perguntamos a eles "O que é uma equação?" no questionário, 36 dos 77 alunos responderam que *"é uma conta em matemática"* ou alguma resposta equivalente a esta. Menos da metade dos estudantes mencionou a incógnita. Ao invés disso, as respostas frequentemente focaram o sinal de igualdade interpretado como um sinal para fazer uma conta (denominado *sinal operacional* por Kieran, 1981) consistente com as experiências anteriores deles em usar o sinal de igualdade em cálculos em Aritmética.

Em nossa visão, tal entendimento de equações, relacionado a números e cálculos em aritmética com números naturais ou inteiros, é conectado com operações relacionadas com o mundo corporificado. A não consideração da incógnita indica falta de conexões significativas da visão que os alunos têm de equação com o mundo simbólico.

Especificamente para as quatro equações quadráticas na tarefa de resolução de equações e as duas quadráticas no questionário, é importante notar que: *nenhum aluno completou quadrados* para resolver qualquer uma das equações quadráticas; *nenhum aluno usou fatoração*, nem mesmo no caso das equações $t^2 - 2t = 0$ ou $3l^2 - l = 0$; *poucos alunos usaram a fórmula de Bhaskara* para resolver equações e ainda *menos alunos usaram-na de maneira bem-sucedida*.

Somente esses resultados já mostram que as dificuldades dos estudantes em lidar com manipulação simbólica apresentadas em todos esses métodos que nenhum ou poucos deles usaram. Além disso, algumas características formais de equações apresentadas nestes métodos sugerem que esses alunos podem ter dificuldades em lidar com o mundo formal também.

É importante notar que o completamento de quadrados e a fatoração não foram evocados como já-encontrados no trabalho desses alunos – talvez esses métodos nunca tenham sido experienciados no contexto de resolver equações quadráticas e, apesar de sabemos que os alunos tiveram contato com a fórmula de Bhaskara em aulas de Matemática anteriores, para a maioria deles ela não se tornou um já-encontrado útil para ser evocado para a geração de boas soluções. No total, 18 alunos de 77 tentaram usar a fórmula em pelo menos uma das seis equações contidas nos dois instrumentos. Essa frequência de uso foi maior em equações completas, mas não garantiu sucesso. A Tabela 1 mostra como muitos estudantes (de mais de 70 alunos no total) usaram a fórmula corretamente ou incorretamente em cada equação da tarefa e do questionário.

Equação	Corretamente	Incorretamente	Total
$a^2 - 2a - 3 = 0$	4	6	10
$r^2 - r = 2$	2	5	7
$3l^2 - l = 0$	3	3	6
$m^2 = 9$	1	2	3
$t^2 - 2t = 0$	6	11	17
$(y-3) \cdot (y-2) = 0$	8	7	15

Tabela 1: Uso da fórmula para resolver equações lineares

Entendemos que alguns desses estudantes acreditam que a fórmula é o meio "correto" de resolver equações quadráticas (apesar das dificuldades deles em aplicá-la). Evidências para isso emergiram nas respostas para o "Problema do Joãozinho" (Figura 2). Trinta alunos de 77 afirmaram que essa solução estava correta. Três mencionaram a fórmula dizendo coisas como *"Ele deve ver usado a fórmula em sua mente"*. Onze alunos declararam que *"Joãozinho não resolveu a equação"* essencialmente *"porque ele não usou a fórmula"*. Quatro alunos usaram a fórmula para resolver a equação e compararam os resultados com a solução de Joãozinho. Um deles usou a fórmula incorretamente e obteve valores diferentes dos de Joãozinho, insistindo que ele estava errado (Figura 3).

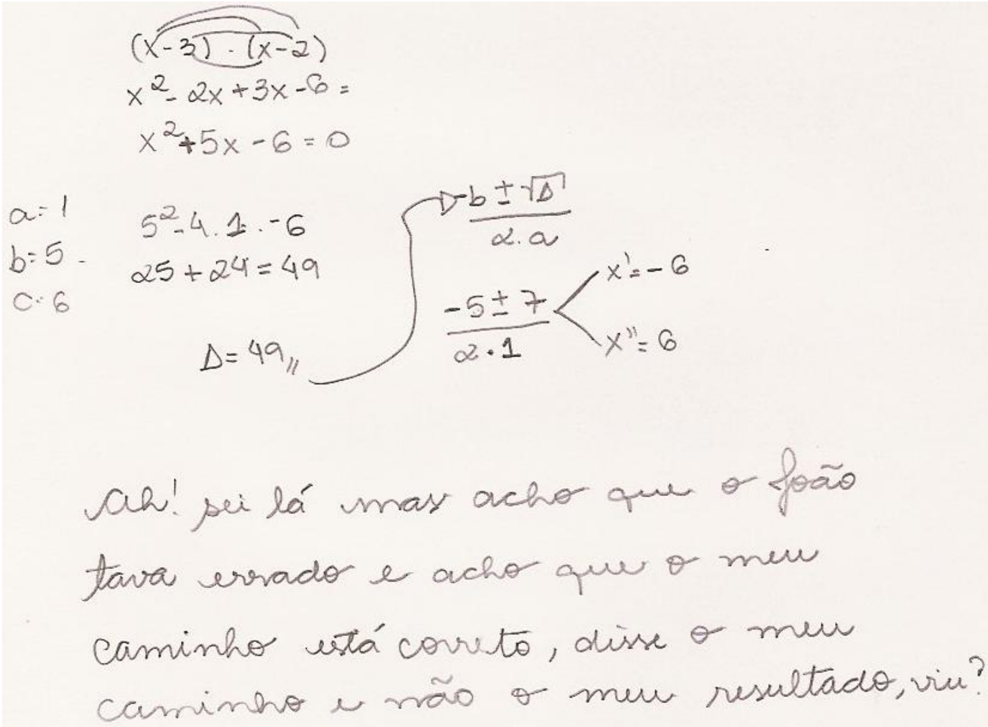
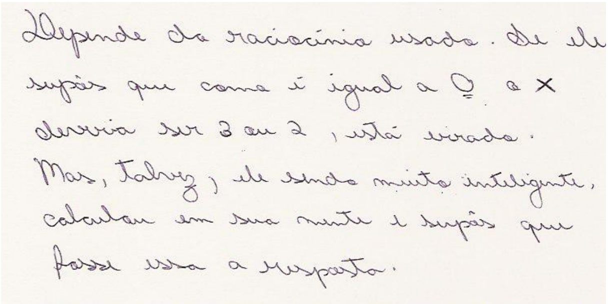


Figura 3: O uso da fórmula de Bhaskara por um aluno e seus comentários

Entendemos que os estudantes que acreditam que precisam usar a fórmula para obter as soluções para uma equação quadrática não têm flexibilidade para lidar com símbolos como proceitos e podem não estar confortáveis com meios de trabalho no mundo simbólico. As experiências anteriores desses alunos parecem ter resultado em um já-encontrado que reconhece o uso de apenas um procedimento, uma "conta" envolvendo a fórmula, nesse tipo de situação, e isso limita as maneiras que eles são capazes de trabalhar com diferentes tipos de equações quadráticas.

Por exemplo, nenhum aluno disse que a resposta de Joãozinho é correta fazendo referência ao princípio de que quando um produto é zero, um dos fatores deve ser zero. Ao invés disso, algumas respostas explicitamente focam-se na *necessidade de desenvolver o cálculo* para testar se a solução pode ser julgada como correta, como apresentado na Figura 4.


Depende do raciocínio usado. Se ele supôs que como é igual a 0 o x deveria ser 3 ou 2, está errado. Mas, talvez, ele sendo muito inteligente, calculou em sua mente e supôs que fosse essa a resposta.

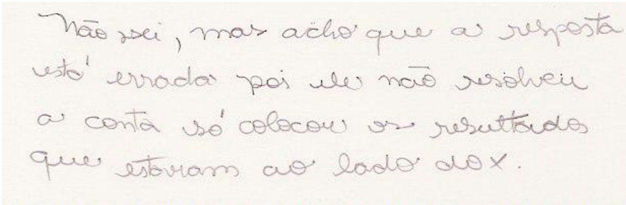
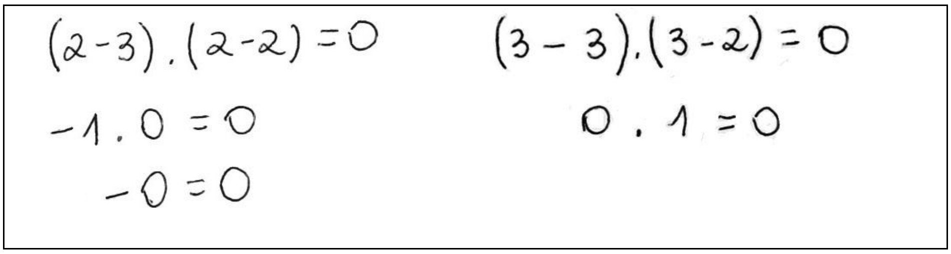

Não sei, mas acho que a resposta está errada pois ele não resolveu a conta só colocou os resultados que estavam ao lado do x.

Figura 4: Respostas para o Problema do Joãozinho – necessidade de calcular

Tais respostas desconsideram características do mundo formal, enfatizando o mundo corporificado ou as relações dele com o mundo simbólico no uso de corporificações procedimentais, por exemplo quando o aluno diz *"só **colocou** os resultados que estavam ao lado do x"* (grifo nosso).

Respostas satisfatórias apresentadas para o "Problema do Joãozinho" (Figura 2) envolvem movimento de símbolos. Em Lima e Tall (2008), evidenciamos que os alunos estavam "colocando" alguma coisa no outro membro da equação e "mudando o sinal". Desta vez, os alunos "colocam" valores numéricos para a incógnita "dentro da" equação. Quatro alunos (três no questionário e um durante a entrevista) disseram que Joãozinho está certo *"porque colocando* $x = 3$ *ou* $x = 2$ *dá o número zero"*, enquanto outros dois substituíram cada valor na equação (Figura 7).


$(2-3).(2-2)=0$

$-1.0=0$

$-0=0$

$(3-3).(3-2)=0$

$0.1=0$

Figura 5: Substituindo valores para *x* na equação

Um desses alunos efetuou a substituição explicando na entrevista:

> *"**A**: pra saber se a resposta estava certa, eu acho que deveria ter colocado três aqui [no lugar de x em* $(x-3)$*], três aqui [no lugar de x em* $(x-2)$*], e visto que resultado que dava, ou depois fazer uma outra conta substituindo com o 2.*
>
> *(...)*
>
> ***PR**: e por que que você pôs o 3 no lugar do x e depois o 2 no lugar do x?*
>
> ***A**: porque aqui está falando que x é igual a 3, então se o x é 3, então eu substituí os números para ver o que dá.*

__PR__: e quando der o resultado igual ao que tem lá?

__A__: é porque o x é, não é? Se aqui deu zero é porque o x é 3.”

Assim como em alguns dos trabalhos dos alunos com equações lineares, nesse caso, esta corporificação procedimental trouxe sucesso para os alunos que a usaram. Nossa conjectura é que “colocar” o valor de *x* no lugar de *x* pode ser relacionado com características formais dos processos de resolução de equação, já que quando um número é o valor da incógnita, a afirmação deve ser verdadeira quando a incógnita é substituída por ele.

Outro exemplo de corporificação procedimental encontrado no trabalho desses alunos com equações quadráticas é evidenciado nas tentativas deles de resolver $m^2 = 9$. Quinze alunos dentre 68 resolveram a equação $m^2 = 9$ para encontrar a solução $m = \sqrt{9}$ apresentando apenas a solução positiva. Apenas um aluno (de três alunos que usaram a fórmula para resolver esta equação) apresentou a solução negativa.

Muitos alunos responderam como apresentado na Figura 6. Em entrevista, um deles explicou *“a potência de dois passa para o outro lado como raiz quadrada”*. Com essa explicação, o aluno deixa claro que existe um movimento do expoente e uma transformação da potência em raiz quadrada. Notamos que, nem esse nem qualquer outro aluno que foi entrevistado mencionaram a possibilidade de outra raiz (negativa).

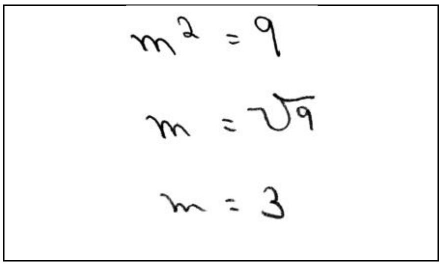


Figura 6: Passando o expoente para o outro membro como uma raiz quadrada

Assim como com equações lineares, o que parece estar acontecendo nas explicações desses estudantes é um movimento do símbolo e uma mágica adicional de mudar alguma coisa: a potência é o que passa para o outro lado, enquanto ela se transforma em uma raiz quadrada. É uma nova variação da familiar corporificação procedimental, trocar de lado, trocar de sinal, e talvez por esta razão os alunos ficaram satisfeitos em achar apenas um valor.

Além do uso da fórmula e da solução de $m^2 = 9$ transformando-a em $m = \sqrt{9}$, *todos os outros métodos que esses alunos usaram envolveram uma estratégia incorreta de transformar a equação quadrática em algum tipo de equação linear.*

Em uma tentativa de relacionar essas resoluções com experiências anteriores com equações lineares, esses alunos resolveram equações quadráticas convertendo de alguma forma a equação em uma forma linear. Nove alunos simplesmente substituíram m^2, r^2 ou a^2 respectivamente por *m*, *r* ou *a*, e então resolveram a equação como se ela fosse linear. Outros usaram o expoente do termo quadrado para elevar o coeficiente (Figura 7), e nove alunos substituíram m^2 por $2m$, frequentemente com um cálculo intermediário que sugere que m^2 representa 'dois grupos de *m*', que se tornam $2m$ (Figura 8).

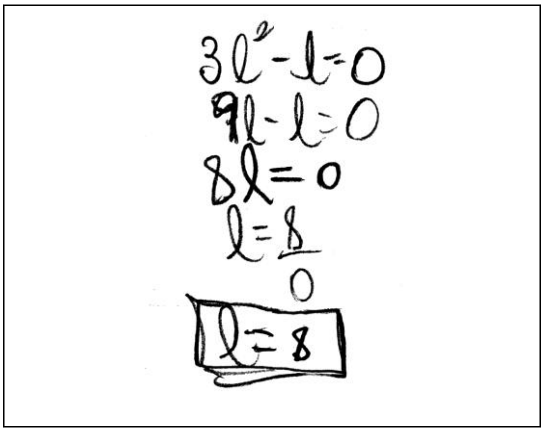


Figura 7: Uso da potência da incógnita no coeficiente

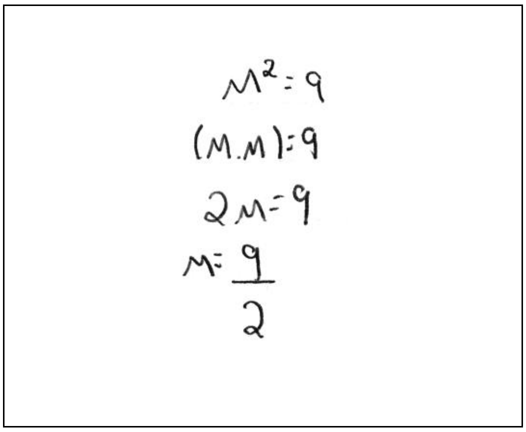


Figura 8: m^2 tomado como se fosse o mesmo que $2m$

Na Figura 7, é possível que os alunos estejam usando seus já-encontrados de Aritmética, e portanto usando a potência em um número, e não na incógnita, em uma maneira corporificada de resolver uma conta – como se fosse possível mover a potência da incógnita para o coeficiente dela, resultando em uma situação mais familiar.

Na Figura 8, existe outro tipo de corporificação no trabalho dos alunos. Quando um aluno transforma m^2 em $m \cdot m$, ele vê duas letras *m*, que são, portanto, relacionadas a $2m$, ao invés de a uma multiplicação de dois fatores da incógnita. Os dois grupos de *m* formam uma corporificação para a situação, e os alunos parecem acreditar que $m \cdot m$ pode ser substituído por $2m$, novamente uma situação familiar, na qual é possível usar um já-encontrado de equações lineares.

Em relação à nossa classificação de equações quadráticas em equações de avaliação e de manipulação, trataríamos as equações $a^2 - 2a - 3 = 0$, $r^2 - r = 2$, $3l^2 - l = 0$ e $t^2 - 2t = 0$ como equações de manipulação, e $m^2 = 9$ e $(y-3) \cdot (y-2) = 0$ como equações de avaliação. As primeiras são consideradas equações de manipulação porque é necessário fazer alguma manipulação simbólica para encontrar as duas raízes. Em relação às últimas equações, no caso de $m^2 = 9$, é possível desfazer operações efetuadas na incógnita para encontrar as raízes, ou buscar números que ao quadrado resultarão em 9, enquanto para $(y-3) \cdot (y-2) = 0$, é possível encontrar os valores sem necessitar de qualquer manipulação de símbolos, avaliando a expressão.

Ao analisar os métodos dos estudantes para resolver estas equações, existem algumas diferenças no trabalho dos alunos com equações lineares de avaliação e equacoes lineares de manipulação. Em Lima e Healy (2010), evidenciamos como o corte didático (FILLOY; ROJANO, 1989) está relacionado com a maneira que os alunos trabalham com as equações que têm à mão. Como argumentamos acima, percebendo equações lineares de avaliação e de manipulação como não tendo naturezas diferentes, eles conseguiram resolver ambos os tipos de equações sem perceber qualquer dificuldade especial em uma ou em outra. Isso não parece ser o que acontece com equações quadráticas.

Equações	$a^2 - 2a - 3 = 0$	$r^2 - r = 2$	$3l^2 - l = 0$	$m^2 = 9$
Correto	4	3	3	1
Uma raiz	0	9	0	15
Incorreto	41	31	40	27
Branco	23	25	25	25

Tabela 2: Solução de equações quadráticas na atividade

Analisando os dados da Tabela 2, encontramos que foi possível para um pequeno número de alunos encontrarem uma raiz para as equações $r^2 - r = 2$ e $m^2 = 9$. Isso era esperado em relação à última, já que ela é uma equação de avaliação. Entretanto, com $r^2 - r = 2$, classificada como uma equação de manipulação, esperávamos que os estudantes fizessem algum tipo de manipulação. Ao invés disso, eles puderam avaliar a expressão no primeiro membro e achar uma das raízes sem manipulação simbólica. Para eles foi fácil pensar que *"um número para a segunda potência que subtraído de si mesmo é igual a dois é o próprio dois"*, como eles explicaram em entrevistas. Isso significa que alguns alunos foram capazes de encontrar pelo menos uma raiz de uma equação quadrática de manipulação avaliando-a. Ao invés de desfazer as operações, eles encontraram valores adequados para a incógnita adivinhando, avaliando, talvez, ou "vendo" que um valor particular poderia ser usado.

Por outro lado, a equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$, que pode ser vista como uma equação de avaliação (por substituição), foi tratada por esses alunos como uma equação de manipulação. O que eles fizeram foi multiplicar as expressões entre parênteses para encontrar uma equação na forma que fosse possível usar a fórmula para resolver. Acreditamos que pode haver razões para isso. Primeiro, o trabalho anterior deles com produtos notáveis pode ter resultado em um já-encontrado no qual multiplicar as expressões entre parênteses é *o meio* de se obter a "resposta". Segundo, apesar de, quando lidavam com equações, eles talvez tenham visto que se um produto é igual a zero, então um dos fatores deve ser zero, eles não parecem reconhecer que isso poderia ser usado para localizar as raízes das equações: nenhum dos alunos em nosso estudo ofereceu tal resposta, enquanto Vaiyavutjamai e Clements (2006) relataram que os alunos na pesquisa deles acharam essa lei muito difícil. Eles também relataram os usos freqüentes, entre os alunos que participaram da pesquisa, da estratégia de primeiro multiplicar os parênteses numa tentativa de resolver equações quadráticas. Pode ser que esses alunos tanto no nosso estudo quanto no deles não tenham experiência suficiente em trabalhar com fatores que resultam em zero para ter resultado no desenvolvimento de um já-encontrado colaborativo, ou talvez o já-encontrado relacionado com o trabalho anterior deles com casos específicos mais simples foi mais forte e precedeu no pensamento deles.

Considerando as equações $a^2-2a-3=0$ e $3l^2-l=0$, se compararmos as Tabelas 1 e 2, podemos ver que todas as respostas corretas foram obtidas pelo uso da fórmula. Nenhum aluno foi capaz de encontrar qualquer uma das raízes para elas por meio de outros métodos. Sendo equações de manipulação que precisam de algum tipo de manipulação simbólica para se obter ambas as soluções, foi muito difícil para os alunos lidar com elas de maneira bem-sucedida. Além disso, a equação $3l^2 - l = 0$ tem o zero como uma das raízes, o que supostamente é fácil de encontrar avaliando a expressão. Nenhum dos alunos, entretanto, usou tal raciocínio. Podemos argumentar que o zero sendo o valor da incógnita é um fator de dificuldade para os alunos não apenas em equações lineares, como Freitas (2002) apontou e nós evidenciamos em Lima e Tall (2008), mas também para equações quadráticas.

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

O que é evidente a partir dos dados coletados neste estudo é que nossos alunos usam características do mundo corporificado na forma de operações procedimentais muito mais frequentemente do que usam elementos dos mundos simbólico e formal. No trabalho deles com equações lineares, eles não parecem fazer uso do princípio algébrico formal de efetuar a mesma operação em ambos os membros de uma equação e têm dificuldades em manipulação simbólica, que é vista em termos de movimentar coisas.

Quando o quadro passa para equações quadráticas, não é muito diferente. Esses alunos não completam quadrados nem fatoram as equações para obter as soluções. Eles criam novas corporificações procedimentais que podem levá-los a algum sucesso, como no caso de substituir 3 no lugar do *x* no “Problema do Joãozinho”, e encontrar uma das raízes da equação $m^2 = 9$ passando o quadrado para o outro lado e transformando-o em uma raiz quadrada. Corporificações também são usadas de maneiras inapropriadas, por exemplo, para transformar uma equação quadrada em uma linear, desconsiderando a potência da incógnita ou usando-a no coeficiente.

Mesmo o uso procedimental da fórmula para resolver a equação provou ser muito difícil para a maioria dos alunos. Ela quase não foi usada e as conseqüências de usá-la não foram melhores do que usar corporificações procedimentais. Existe uma gama de possíveis razões para isso. O uso da fórmula pode ter sido excessivamente enfatizado como um método geral para resolver *qualquer* tipo de equação quadrática; e pode ter sido o último método a ser ensinado e praticado e estava, portanto, mais fresco na memória dos alunos. Enquanto isso, em geral, os outros métodos são muito mais complicados. Para obter uma resposta, é mais rápido e fácil seguir a fórmula ao invés de, por exemplo, passar por todos os passos de completar um quadrado. Na prática, entretanto, a fórmula acabou por não ser um método particularmente eficiente, especialmente em casos em que ela requer manipulação que muitos alunos no estudo acham difícil.

Portanto, nossos resultados sugerem que os já-encontrados dos alunos relacionados com equações quadráticas são baseados essencialmente nas experiências deles em Aritmética, equações lineares e a fórmula de Bhaskara. Isso leva ao uso contínuo de corporificações procedimentais – juntamente com o desenvolvimento de novos – ao invés de estratégias que passam de corporificações para o uso flexível de simbolismo ou para técnicas formais de resolução de equações.

Se considerarmos a manipulação simbólica dos alunos com equações lineares e quadráticas então, podemos concluir que alunos trabalham de uma maneira muito similar com ambos os tipos de equações. Mas essa não parece ser a história toda. Se olharmos para como os alunos tratam equações lineares de avaliação e de manipulação e equações quadráticas de avaliação e de manipulação, percebemos que existem diferenças importantes e substanciais entre elas.

Os alunos que participaram desse estudo não estavam conscientes da distinção entre equações lineares de avaliação e de manipulação. Equações lineares foram tratadas como equações de manipulação, apesar de nem sempre de maneira bem-sucedida. Ao lidar com equações quadráticas, esses alunos não tratam equações quadráticas de avaliação e de manipulação como tendo a mesma natureza. A equação $m^2 = 9$ foi tratada como uma equação de avaliação e apenas uma raiz foi encontrada (a positiva). Quando eles efetuaram as operações inversas, desfazendo as operações sobre *m*, eles encontraram apenas uma raiz, e não parecem procurar por outra.

No caso da equação $r^2 - r = 2$, que estruturalmente é classificada como uma equação de manipulação, ela foi tratada por esses alunos como uma equação de avaliação, na qual o primeiro membro foi avaliado para resultar no segundo membro.

Novamente, eles não conseguiram encontrar a raiz negativa, mas eles avaliaram a situação para encontrar uma solução. Isso se relaciona com uma experiência não enfatizada no trabalho com equações lineares: a idéia de que é possível encontrar um número para "colocar" no lugar da incógnita, e ver se ele torna a afirmação verdadeira. Filloy e Rojano (1989) evidenciaram uma perda temporária na habilidade de resolver equações aritméticas (de avaliação) quando a fatoração foi introduzida, porque os alunos não usaram mais substituição para buscar um valor para a incógnita. Aparentemente, essa habilidade retorna (pelo menos para alguns alunos) com equações quadráticas. Entretanto, nesse estudo, quando os alunos identificaram uma raiz, eles ficaram satisfeitos. A experiência deles com equações lineares resulta em apenas uma raiz e, como um já-encontrado, uma vez que eles encontram uma raiz, podem acreditar que não há necessidade de procurar por outra.

Finalmente, a equação $(y-3)\cdot(y-2)=0$ não foi avaliada pelos alunos; eles tiveram que manipulá-la para tentar encontrar as soluções. Talvez o já-encontrado relacionado com o produto nulo não ficou enraizado nas imagens de conceito desses estudantes, e eles não sabem o que fazer com tal situação. Nesse caso, uma equação que poderia ter sido interpretada como uma equação de avaliação foi tratada como uma equação de manipulação, o que fez com que ela ficasse muito mais difícil para a maioria dos estudantes.

Juntos, esses dados oferecem evidências de que os já-encontrados que os alunos mobilizam para resolver equações quadráticas realmente tendem a ser relacionados com a estrutura da expressão envolvida. Nas expressões que não envolve dois fatores apresentados entre parêntese ou um ou mais dos três coeficientes são diferentes de zero, os alunos parecem evocar já-encontrados associados à substituição de possíveis soluções ou tentar tratar as expressões como se elas fossem uma equação linear. Talvez por causa da maneira limitada na qual as equações são reconhecidas como quadráticas, as características intrínsecas que distinguem entre a classificação delas como avaliação ou manipulação não são necessariamente "respeitadas" pelos alunos ao resolverem equações quadráticas. Essas características intrínsecas não são tão importantes para os alunos como as características que eles vêem nas equações, já que é como os alunos vêem as expressões que influencia os já-encontrados que eles colocam em ação.

Para equações lineares, a manipulação de símbolos é (supostamente) direta, e foi traduzida em duas corporificações procedimentais que, de alguma forma, “resolvem o problema” para os alunos. Aparentemente, o uso desses procedimentos impediu o desenvolvimento de abordagens proceituais. Depois de ter contato com esta técnica para resolver equações lineares, ao invés de considerar flexivelmente a equação em mãos e aplicar o método mais eficiente para o caso envolvido, os alunos não diferenciaram entre equações em que uma simples substituição, ou desfazer um cálculo, teria levado a uma solução e aquelas que requerem alguma manipulação. O mesmo já-encontrado veio a ser associado com todas as formas de equação linear e então o mesmo tipo de corporificações procedimentais foi aplicado.

Para as equações quadráticas de manipulação, algum tipo de manipulação algébrica é necessário antes que eles possam transformá-la em uma equação de avaliação e, e muitos casos, para que ambas as soluções sejam encontradas. Esse tipo de manipulação simbólica é muito mais sofisticado do que aquele usado em equações lineares, e isso pode ser uma razão pela qual os alunos buscaram por outras maneiras de encontrar soluções para equações quadráticas. Ao fazê-lo, eles conseguiram voltar para a busca de um número que faz com que a sentença matemática seja verdadeira, que apesar de ser uma característica do mundo formal, foi uma característica que não apareceu durante o trabalho deles com equações lineares. Parece que, na falta de tipos bem estabelecidos de corporificações procedimentais, que caracterizam as interações quase rotinizadas deles com equações lineares, confrontadas com a necessidade de resolver um tipo diferente de equação, alguns deles pelo menos parecem fazer uma busca mais consciente e profunda por já-encontrados possivelmente apropriados, e trouxeram para as atividades características dos mundos formal e corporificado para equações quadráticas.

Considerando os resultados em geral, é claro que os alunos tiveram mais sucesso em lidar com equações lineares do que com equações quadráticas. Embora não livre de erros, a maioria deles era familiar com o método geral de resolver equações lineares, e foi esse método que permitiu melhor desempenho nesse tipo de equação. No caso das quadráticas, o método envolvendo a fórmula de Bhaskara, também um método geral que funcionaria para qualquer caso, aparentemente foi menos familiar. É possível, então, que, com mais prática em efetuar cálculos usando essa fórmula, os alunos teriam um melhor desempenho. Entretanto, os dados desse estudo indicam que há um perigo em privilegiar apenas esses métodos. De certa forma, as situações que mais provocaram os alunos a procurarem já-encontrados que vão além do mundo corporificado foram aquelas nas quais os alunos não possuíam um método de resolução imediato. Assim, é importante que façamos uma reflexão sobre o que desejamos para os alunos: melhor desempenho ou melhor compreensão. Uma interpretação de nossos resultados é que uma ênfase excessiva no ensino de uma única maneira de obter a resposta correta pode ter efeito de livrar o aluno da responsabilidade de compreender por que tal método funciona, e assim privilegiar o desenvolvimento de corporificações procedimentais isoladas dos já-encontrados dos outros dois mundos.

REFERENCIAS

Bachelard, G. (1938), (reprinted 1983), *La formation de l'esprit scientifique*, J. Vrin, Paris.

Collis, K. F. (1978). Operational thinking in elementary mathematics. In *Cognitive development: Research based on a Neo-Piagetian approach*, edited by J. A.Keats, K. F. Collis and G. S. Halford. Chichester: John Wiley & Sons.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld, (ed.) *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 221-243). Hillsdale: Erlbaum.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, pp. 85-106). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.

Fauconnier & Turner (2002). *The way we think: Conceptual Blending and the Mind's Hidden Complexities.* New York: Basic Books.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations, the transition from arithmetic to algebra, *For the Learning of Mathematics*, Canada, 9 (2), 19-25.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: An educational approach.* Dordrecht, Holland: Kluwer.

Gray, E., M. & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, NCTM, 26 (2), 115–141.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001). Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. In Marja van den Heuvel-Panhuizen (Ed.) *Proceedings of the 25th Conference of the International*

Group for the Psychology of Mathematics Education 3, 65-72. Utrecht, The Netherlands.

Gray, E. M., Pitta, D., Pinto, M. M. F., Tall, D. O. (1999). Knowledge Construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 38 (1–3), 111–133.

Gray, R., & Thomas, M. (2001). Quadratic Equation Representations and Graphic Calculators: Procedural and Conceptual Interactions. In Proc. *24th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Sydney, 30 June-4 July, 2001*

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65–97). New York: MacMillan.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol (p. 317–326). *Educational Studies in Mathematics*, 12.

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire and Dangerous Things*. Chicago: Chicago

Lakoff, G. & Johnson, M., (1999). Philosophy in the Flesh. New York: Basic Books.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where Mathematics Comes From.* New York: Basic Books.

Lima, R. N. de, (2007). *Equações Algébricas no Ensino Médio: Uma Jornada por Diferentes mundos da Matemática*. (Doctoral Dissertation Catholic University of São Paulo, 2007).

Lima & Healy, 2010

Lima, R. N. de, & Tall, D. (2006a). The concept of equations: What have students met before?. *Proc. 30th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 233–241). Prague, Czech Republic: PME.

Lima, R. N. de, & Tall, D. (2006b). What does equation mean? A brainstorm of the concept. In D. Hughes-Hallett, I. Vakalis, H. Arikan (Eds.) *Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics at Undergraduate Level*, Paper 157, Istanbul, Turkey.

Lima, R. N. de, & Tall, D. O. (2008). Procedural embodiment and magic in linear equations. *Educational Studies in Mathematics*, *67* (1), 3-18.

Linchevski, L., & Sfard, A. (1991). Rules without reasons as processes without objects – The case of equations and inequalities. In: *Proc. 15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 317– 324). Assisi, Italy: PME.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 1–36.

Sfard A., & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Skemp, R. R. (1976). Instrumental Understanding and Relational Understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.

Tall, D. O. (ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking.* Reidel: Dordrecht.

Tall, D. O. (1995). Mathematical Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking, plenary address. In L. Meira & D. Carraher, (Eds.), *Proceedings of PME* 19, Recife, Brazil, I, 61–75.

Tall, D. O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In: *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288). Bergen, Norway: PME.

Tall, D. O. (2006). Developing a Theory of Mathematical Growth. *International Reviews on Mathematical Education* (ZDM), 39, (1-2) , 145-154.

Tall, D. O. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal,* 2008, 20 (2), 5-24

Thomas, M. O. J. & Tall, D. O. (2001). The long-term cognitive development of symbolic algebra, *International Congress of Mathematical Instruction (ICMI) Working Group Proceedings - The Future of the Teaching and Learning of Algebra*, Melbourne, 2, 590-597.

Thorpe, J. A. (1989). Algebra: What should we teach and how should we teach it?. In S. Wagner, C. Kieran. (eds), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. EUA: NCTM. v. 4, 11-24.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*. 18 (1), 47-77.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.

Vlassis, J. (2002). The balance model: hindrance or support for the solving of linear equations with one unknown. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 341–359.

Watson, A., Spyrou, P., Tall, D. O. (2003). The Relationship between Physical Embodiment and Mathematical Symbolism: The Concept of Vector. *The Mediterranean Journal of Mathematics Education*. 1 2, 73-97.

Submetido: setembro de 2011

Aprovado: novembro de 2011