DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2023v16n3p281-291

Interação de Aspectos Algorítmicos, Intuitivos e Formais na Resolução de Questões de Sequências Numéricas por uma Licencianda em Matemática

Interaction of Algorithmic, Intuitive and Formal Aspects in Solving Numerical Sequence Questions by a Mathematics Student

[a]Instituto Federal de São Paulo, Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores. SP, Brasil.
[b]Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística. SP, Brasil
*E-mail: wvieira@ifsp.edu.br

Resumo

Analisa-se a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais na resolução de questões sobre sequências numéricas por uma estudante de Licenciatura em Matemática em dois momentos de sua formação: ao final da disciplina Sequências e Séries (6º semestre) e ao final da disciplina Introdução à Análise Real (8º semestre). Para isso, a participante respondeu, em cada um dos momentos da investigação, a um conjunto de problemas sobre sequências numéricas, apresentados em questionários diagnósticos, e participou de entrevistas semiestruturadas, que ocorreram após a realização de cada um dos questionários e nas quais foram discutidas as respostas apresentadas na etapa anterior. Os questionários foram elaborados com base em dificuldades apontadas por sete docentes que ministram sequências e séries no nível superior, em entrevistas realizadas previamente. A interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais na aprendizagem Matemática é o quadro teórico adotado na investigação. As análises revelam uma prevalência de aspectos algorítmicos e intuitivos nas respostas apresentadas pela participante, que não são inter-relacionadas com aspectos formais relativos aos temas investigados. Além disso, a análise comparativa das respostas dadas nos dois questionários revela que a participante não avançou na elaboração de justificativas ao longo de sua experiência formativa, uma vez que continuou a apresentar exemplos particulares para justificar afirmações consideradas verdadeiras.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo. Formação Inicial de Professores. Aspectos Algorítmicos. Aspectos Formais. Aspectos Intuitivos.

Abstract

The interaction of algorithmic, intuitive and formal aspects in the resolution of questions about numerical sequences by a Mathematics degree student is analyzed at two moments of her training: at the end of the Sequences and Series discipline (6th semester) and at the end of the Introduction discipline to Real Analysis (8th semester). To this end, the participant responded, at each stage of the investigation, to a set of problems about numerical sequences, presented in diagnostic questionnaires, and participated in semi-structured interviews, which took place after completing each of the questionnaires and in which they were discussed. the answers presented in the previous step. The questionnaires were prepared based on difficulties highlighted by seven teachers who teach sequences and series at higher education, in interviews carried out previously. The interaction of algorithmic, intuitive and formal aspects in Mathematics learning is the theoretical framework adopted in the investigation. The analyzes reveal a prevalence of algorithmic and intuitive aspects in the answers presented by the participant, which are not interrelated with formal aspects related to the topics investigated. Furthermore, the comparative analysis of the answers given in the two questionnaires reveals that the participant did not progress in developing justifications throughout her training experience, as she continued to present particular examples to justify statements considered true.

Keywords: *Teaching Calculus. Initial Teacher Training. Algorithmic Aspects. Formal Aspects. Intuitive Aspects.*

1 Introdução

Nas últimas décadas, a preocupação de professores e pesquisadores com os processos de ensino e de aprendizagem de disciplinas que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral vem crescendo, como indicam inúmeras pesquisas e artigos científicos (Igliori, 2009, Nardi, 2014). Por exemplo, Igliori (2009, p.12) destaca que **é** "alto o percentual de estudantes do nível superior cujo desempenho na aprendizagem da Matemática, em especial de Cálculo, tem deixado muito a desejar".

Concordamos com Tall (1991) ao afirmar que esse panorama de insucessos pode estar associado às abordagens pedagógicas dispensadas em disciplinas matemáticas do Ensino Superior, marcadas por aulas expositivas, que oscilam entre abordagens extremamente formais, que estão distantes da formação básica dos estudantes, e outras que se valem do ensino de técnicas que, descoladas de justificativas, acabam por se tornar estéreis para os aprendizes.

Neste contexto, entendemos que propor transformações dessa realidade é uma das tarefas do campo científico da Educação Matemática e que essa reflexão deve ser marcada pela diferenciação entre objetos matemáticos e objetos de ensino. Sobre o papel a ser desempenhado pelos pesquisadores da Educação Matemática, concordamos com Igliori (2009, p.12), que sustenta que a missão deve ser "a investigação de fenômenos relacionados à formação do pensamento avançado; investigar fatores que dificultam a aquisição de conceitos da

Matemática avançada".

As posições colocadas por esses pesquisadores reiteram a necessidade de pesquisas com foco em processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos do Ensino Superior, principalmente em Cursos de Licenciatura em Matemática. No caso específico de sequências numéricas, a importância dessa investigação fica caracterizada pelo papel desempenhado por este conceito no estudo de aproximações, na construção do conjunto dos números reais, no reconhecimento de padrões e de regularidades, na relação funcional, no estudo de progressões geométricas e/ou aritméticas (tema este diretamente ligado à Educação Básica), nas relações com outros temas e nas aplicações em outras áreas do conhecimento, como por exemplo, a sequência de Fibonacci na Biologia ou o Triângulo de Sierpinski, ligado ao estudo de fractais e **à** existência de outros sistemas geométricos.

De maneira geral, as pesquisas sobre sequências têm se concentrado nos conceitos de limite e de convergência. Por exemplo, Oehrtman, Swinyard & Martin (2014) conduzem um experimento no qual duas estudantes universitárias estadunidenses constroem a definição formal de convergência de sequências numéricas, a partir de seus conhecimentos intuitivos. No processo, a principal dificuldade enfrentada foi a introdução do quantificador universal , pois para as estudantes este apareceu como um elemento externo à definição, embora devesse fazer parte dela. Os autores destacam que parte dessa dificuldade resulta da complexidade da instrução lógica que envolve uma quantificação existencial para e uma quantificação universal para . Como implicações, defendem que disciplinas iniciais de Cálculo antecipem desafios cognitivos que estudantes experimentarão no processo de formalização do conceito de convergência e estabeleçam uma base de apoio para a compreensão da definição formal de convergência (Oehrtman, Swinyard & Martin, 2014).

Keene, Hall & Duca (2014) relatam um experimento de reinvenção guiada da ideia de limite, desenvolvido com 28 estudantes estadunidenses, em uma disciplina inicial de Cálculo para futuros professores. Partindo das percepções intuitivas dos participantes sobre a ideia de limite, avaliam as mudanças no entendimento deste conceito. Após a realização das atividades, destacam que a maioria dos participantes foi capaz de encontrar os limites propostos e que muitos desenvolveram a ideia de limite como algo de que uma sequência se aproxima e vários mencionaram a ideia de 'arbitrariamente próximo'. Defendem que esta noção de movimento, associada à ideia de limite, precisa ser confrontada com uma conceituação mais formal, que poderia provocar a definição de limite.

A partir de diálogos com um matemático sobre diversos temas, Nardi (2014) analisa processos de ensino e de aprendizagem de conceitos e ideias de Matemática no Ensino Superior. Sobre o limite de sequências, a discussão é norteada por produções de estudantes em contato inicial com a definição de limite. Segundo a autora, as principais dificuldades dos estudantes estão em atribuir significado à definição de limite e em que estes não estão à vontade com a necessidade de conceituar uma definição formal de convergência, nem com o papel que as representações gráficas desempenham nas tentativas de dar significado para a definição.

Em investigação sobre as dificuldades de futuros professores de Matemática em sequências, Bisognin, Bisognin & Leivas (2016) destacam que os participantes da pesquisa precisaram se apoiar em elementos 'concretos' para justificar suas respostas, perspectiva que os coloca num estágio de matemática prática. Além disso, apontam dificuldades relacionadas ao uso da linguagem matemática, como o sinal de igualdade e o símbolo de limite e seu significado como operador.

Sobre a elaboração de demonstrações e o uso do formalismo matemático, Pinto (1998) apresenta uma análise sobre como estudantes de Matemática ingleses se apropriam de uma teoria axiomática dos números reais. A partir de questionário exploratório e entrevistas, identificou concepções compostas por imagens que os estudantes foram incapazes de traduzir para a linguagem formal. A autora deixa questionamentos relacionados às dificuldades dos estudantes no processo de transição para a matemática avançada e sobre o fato de licenciandos em Matemática evitarem o formalismo e aceitarem explanações pouco rigorosas/informais.

Em nossa investigação, acompanhamos o desenvolvimento de uma estudante de Licenciatura em Matemática no estudo de sequências numéricas, em aspectos ligados à definição, às representações e à convergência de sequências. A definição foi escolhida para verificarmos se fica como aspecto intuitivo (Fischbein, 1994) que o índice sempre começa do zero ou do um e que toda sequência pode ser expressa por uma expressão algébrica. As representações gráficas e a convergência, porque estão associadas aos processos de escolha, de mudança de representações, de generalização e de abstração, todos importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático avançado. A partir das resoluções das questões propostas e de entrevistas para discutir essas resoluções, procuramos identificar se existem e se interagem aspectos intuitivos, algorítmicos e formais (Fischbein, 1994), e quais dificuldades persistem após as disciplinas Sequências e Séries (6º sem.) e Introdução à Análise Real (8º sem.), nas quais esses assuntos são trabalhados, de acordo com o currículo e com as respostas dos sete professores dessas disciplinas que foram entrevistados.

2 Fundamentação Teórica

Fischbein (1994) coloca em discussão a necessidade de verificar a interação de aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, ligados a um conceito em Matemática, quando observamos um sujeito em atividade matemática. Segundo ele, são esses os aspectos básicos a serem considerados quando tratamos a Matemática como uma atividade humana, um processo criativo e não um corpo de conhecimentos estruturado e já estabelecido. Ao considerar a interação desses três aspectos, olhamos a Matemática como uma ciência que envolve momentos de "iluminação, hesitação, aceitação e refutação" (Fischbein, 1994, p.231). Ele defende que essa perspectiva deve guiar nossas escolhas quando ensinamos matemática, se desejamos que os estudantes sejam capazes de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar a validade dessas produções.

O aspecto formal refere-se a axiomas, definições, teoremas e demonstrações que compõem o núcleo das ciências matemáticas e precisam ser considerados quando analisamos ou observamos o processo de criação em Matemática.

O aspecto algorítmico corresponde a técnicas e procedimentos de resolução. Este componente também tem caráter fundamental nos processos de entendimento e de criação em Matemática, uma vez que apenas o conhecimento das estruturas formais não é suficiente para conferir habilidade de resolver problemas. No entanto, Fischbein alerta que o raciocínio matemático não deve ser reduzido a um conjunto de procedimentos e técnicas e que estes, quando não acompanhados de justificativas, são invariavelmente esquecidos. Para o autor, "Esta profunda simbiose entre significado e habilidades é uma condição básica para o produtivo e eficiente raciocínio matemático" (Fischbein, 1994, p. 232).

O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. Pela sua natureza, aspectos intuitivos exercem papel coercitivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas. Por vezes, isso pode se tornar um facilitador do processo de conhecimento, se estiver de acordo com verdades matemáticas; em outros casos, um caminho para contradições e equívocos, como aceitar, por exemplo, que "uma série infinita tende ao infinito, pois somamos valores indefinidamente" ou "multiplicar sempre aumenta". Essas perspectivas caracterizam situações que um sujeito considera auto evidentes e se ancoram em conhecimentos mal estruturados ou no uso de técnicas em domínios nos quais não são válidas.

Sobre a interação entre aspectos intuitivos e formais, Fischbein (1994) defende que nossa capacidade de processar informações não é controlada somente pelas estruturas lógicas, mas também por uma grande quantidade de modelos intuitivos que agem de maneira implícita, restringindo e definindo caminhos para o raciocínio.

No questionário aplicado à participante da pesquisa, propusemos questões sobre a elaboração e o uso de leis algébricas, a construção de gráficos, o cálculo de limites de sequências, o reconhecimento de padrões, o uso e a definição de sequência e convergência e a elaboração de justificativas. Entendemos que as respostas obtidas permitiram observar se há, ou não, a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, conforme proposto por Fischbein (1994).

3 Procedimentos Metodológicos

Para a pesquisa, foram elaborados dois questionários, aplicados para o mesmo grupo de estudantes de Licenciatura em Matemática. O 1º Questionário foi aplicado ao final da disciplina Sequências e Séries para 17 participantes e, após um ano, o 2º Questionário foi aplicado ao final da disciplina Introdução à Análise Real, para 15. Após análise dos protocolos, três dos participantes foram selecionados para entrevistas. Neste texto, apresentamos as resoluções de Bia, que trazem à tona discussões pertinentes aos processos de ensino e de aprendizagem de sequências e à formação de professores de Matemática.

Para a elaboração dos questionários, foram entrevistados sete docentes que ministram as disciplinas Sequências e Séries e Introdução à Análise Real para a Licenciatura em Matemática. Nessas entrevistas, identificamos oito dificuldades de estudantes no tema sequências numéricas e elaboramos questões que buscam avaliá-las. São elas: (A) Dificuldade em representar graficamente uma sequência; (B) Dificuldade no uso da lei algébrica de uma sequência; (C) Dificuldade na identificação e elaboração da lei algébrica ou padrão que define uma sequência; (D) Dificuldade em caracterizar formalmente os conceitos de sequência, convergência e divergência; (E) Dificuldade com a estrutura lógica de demonstrações; (F) Dificuldade em classificar sequências numéricas em crescente, decrescente, limitada, possuir limite; (G) Dificuldade em relacionar a ideia de convergência com o limite de uma sequência e (H) Dificuldade em lidar com a definição de limite de sequências (Vieira, 2016).

Os questionários foram respondidos individualmente, sem nenhum tipo de consulta a materiais externos e sem intervenção do pesquisador, e tiveram duração de uma hora e meia cada. A aplicação dos questionários ocorreu no período de aulas, e as entrevistas com a estudante selecionada ocorreram fora do horário de aula.

Nas discussões dos resultados, as questões nomeadas por 1.X referem-se ao 1º Questionário e as nomeadas por 2.Y, ao 2º Questionário.

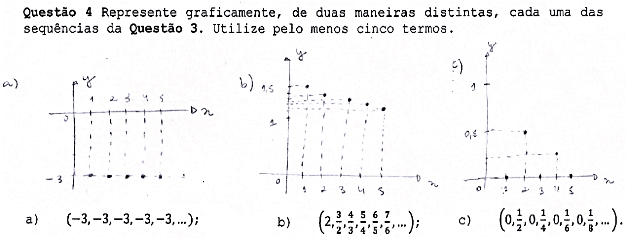
4 Apresentação dos Resultados

De maneira geral, na análise dos questionários e das entrevistas de Bia, identificamos uma prevalência de aspectos algorítmicos e intuitivos nas respostas e comentários da estudante, e dificuldades com aspectos formais dos principais conceitos e ideias relacionados às sequências numéricas, perspectiva que procuramos justificar a seguir.

As Questões 1.4 e 2.1 solicitam a representação gráfica de sequências. Essas questões buscam investigar se os estudantes apresentam, ou não, (A) Dificuldade em representar graficamente uma sequência, apontada pelos docentes entrevistados.

Na Questão 1.4, Bia apresentou uma representação gráfica com dois eixos coordenados, com indicado no eixo horizontal e no eixo vertical (Figura 1). A estudante não apresentou outro tipo de representação gráfica.

Figura 1 - Resposta para a Questão 1.4


Questão 4 Represente graficamente, de duas maneiras distintas, cada uma das sequências da **Questão 3**. Utilize pelo menos cinco termos.

a) $(-3,-3,-3,-3,-3,\ldots)$;

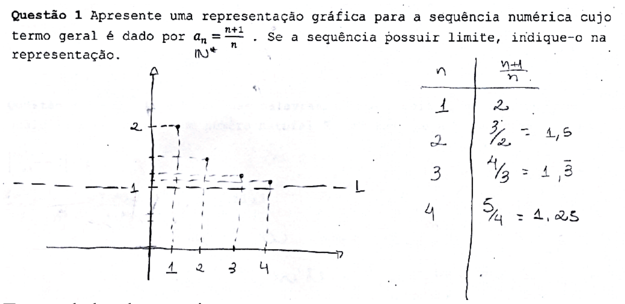
b) $\left(2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\ldots\right)$;

c) $\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{8},\ldots\right)$.

Fonte: dados da pesquisa.

Na resposta à Questão 2.1 (Figura 2), Bia repetiu a representação dada na Questão 1.4 e apresentou um gráfico de pontos no plano no qual destaca uma linha pontilhada indicada por , passando pelo limite da sequência proposta.

Figura 2 - Resposta para a Questão 2.1


Questão 1 Apresente uma representação gráfica para a sequência numérica cujo termo geral é dado por $a_n = \frac{n+1}{n}$. Se a sequência possuir limite, indique-o na representação.

n	$\frac{n+1}{n}$
1	2
2	$3/2 = 1,5$
3	$4/3 = 1,\bar{3}$
4	$5/4 = 1,25$

Fonte: dados da pesquisa.

Sobre a obtenção do limite 1 na Questão 2.1, Bia disse ter se apoiado na tabela de valores construída ao lado do gráfico, "Eu acho que foi com números mesmo. Substituindo alguns valores e sempre o de cima vai ser 1 maior só. Aí sempre vai dar 1 vírgula alguma coisa"; destacou, ainda, que não se apoiou em técnicas de cálculo de limite para chegar ao 1, o que indica a presença de aspectos algorítmicos e intuitivos relacionados à ideia de limite e ausência de aspectos formais. Sobre a tabela, disse que aprendeu no Ensino Médio e que sempre usa essa ideia na construção de gráficos.

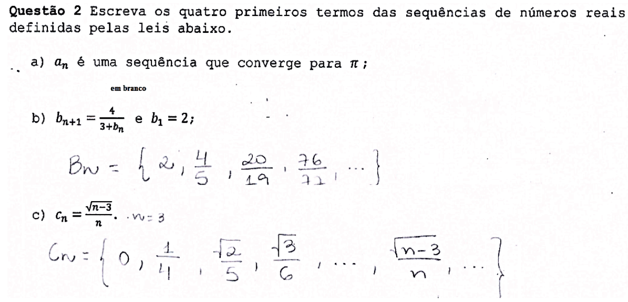
Na entrevista, solicitada a indicar o termo genérico no gráfico da Questão 2.1 (Fig. 2), disse "Não tenho nem ideia. Não sei, talvez alguma coisa assim. Ele chega mais aqui, aqui é o no caso. Mas não tenho ideia", marcou no eixo horizontal, à direita de 4, e um pouco acima da linha pontilhada e disse "Sem chegar no 1, né? Porque nesse caso não chega no limite. (…) Porque sempre vai ser um a mais em cima", reiterando a presença apenas de aspectos algorítmicos e intuitivos.

Sobre a dificuldade (A) Dificuldade em representar graficamente uma sequência, embora Bia não tenha apresentado um outro tipo de representação no caso da Questão 1.4 (Figura 1), entendemos que a estudante obteve êxito nesse tipo de questão.

As Questões 1.2 e 2.2 abordam a obtenção de termos de uma sequência a partir de leis de formação propostas e buscam explorar a (B) Dificuldade no uso da lei algébrica ou padrão de uma sequência, destacada pelos docentes entrevistados.

Na Questão 1.2, Bia apresentou respostas corretas para os itens b e c, mas não soube responder ao item a, conforme destacado na Figura 3.

Figura 3 - Resposta para a Questão 1.2


Questão 2 Escreva os quatro primeiros termos das sequências de números reais definidas pelas leis abaixo.

a) a_n é uma sequência que converge para π;

em branco

b) $b_{n+1} = \frac{4}{3+b_n}$ e $b_1 = 2$;

$B_n = \left\{2, \frac{4}{5}, \frac{20}{19}, \frac{76}{71}, \ldots\right\}$

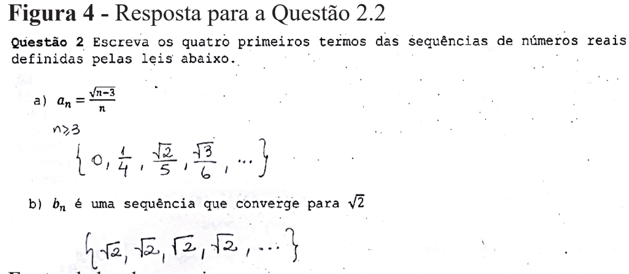
c) $c_n = \frac{\sqrt{n-3}}{n}$. $n=3$

$C_n = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \ldots, \frac{\sqrt{n-3}}{n}, \ldots\right\}$

Fonte: dados da pesquisa.

Bia também respondeu corretamente à Questão 2.2 (Figura 4), repetindo a resposta dada na Questão 1.2(c). Desta vez, acertou o item b, semelhante à Questão 1.2(a) que havia deixado em branco. Questionada sobre sua resposta, disse "Porque eu lembro também na outra que tinha uma que tinha que convergir pra . E depois eu conversei com alguns amigos e eles colocaram ", indicando que aprendeu essa ideia após a realização do 1º Questionário.

Figura 4 - Resposta para a Questão 2.2


Questão 2 Escreva os quatro primeiros termos das sequências de números reais definidas pelas leis abaixo.

a) $a_n = \frac{\sqrt{n-3}}{n}$

$n \geq 3$

$\left\{0, \frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{3}}{6}, \ldots\right\}$

b) b_n é uma sequência que converge para $\sqrt{2}$

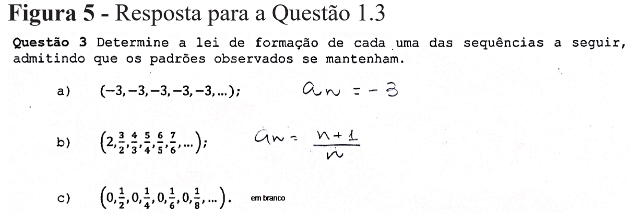
$\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \ldots\right\}$

Fonte: dados da pesquisa.

Com as Questões 1.3 e 2.4 procuramos avaliar se os estudantes apresentam (C) Dificuldades na identificação e elaboração da lei algébrica ou padrão que define uma sequência, apontadas pelos docentes entrevistados.

Bia respondeu corretamente aos itens a e b da Questão 1.3, no entanto não apresentou resposta para o item c (Figura 5). Na primeira entrevista, a estudante disse não ter conseguido responder a este item, pois "Tem esse zero aí no meio" e ponderou que "Se fossem só as frações, colocaria ", revelando ideias sobre a identificação das leis algébricas que são pouco úteis na resolução de situações não convencionais.

Figura 5 - Resposta para a Questão 1.3


Questão 3 Determine a lei de formação de cada uma das sequências a seguir, admitindo que os padrões observados se mantenham.

a) $(-3,-3,-3,-3,-3,\ldots)$; $a_n = -3$

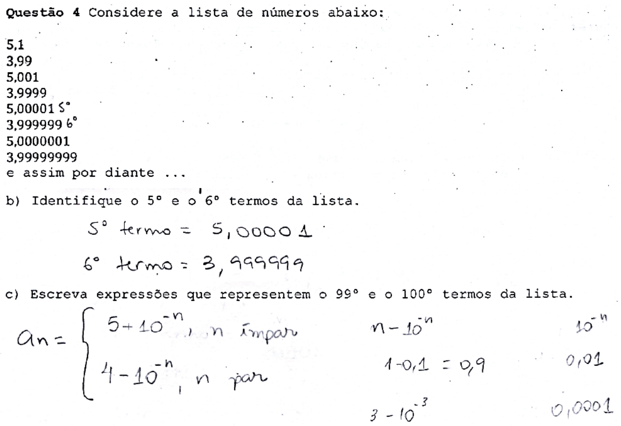
b) $\left(2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{6}{5},\frac{7}{6},\ldots\right)$; $a_n = \frac{n+1}{n}$

c) $\left(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{4},0,\frac{1}{6},0,\frac{1}{8},\ldots\right)$. em branco

Fonte: dados da pesquisa.

Na Questão 2.4(b), Bia conseguiu identificar o 5º e o 6º termos e a lei de formação da sequência (Fig. 6). No item c, apresenta a lei de formação da sequência, mas não indica o 99º e o 100º termos solicitados. Na entrevista também não foi capaz de identificá-los.

Figura 6 - Resposta para a Questão 2.4(b,c)



Questão 4 Considere a lista de números abaixo:

5,1
3,99
5,001
3,9999
5,00001 5°
3,999999 6°
5,0000001
3,99999999
e assim por diante ...

b) Identifique o 5° e o 6° termos da lista.

5° termo = 5,00001
6° termo = 3,999999

c) Escreva expressões que representem o 99° e o 100° termos da lista.

$$a_n = \begin{cases} 5+10^{-n}, & n \text{ ímpar} \\ 4-10^{-n}, & n \text{ par} \end{cases}$$

$n-10^{-n}$ $\quad$ 10^{-n}
$1-0,1 = 0,9$ $\quad$ $0,01$
$3-10^{-3}$ $\quad$ $0,0001$

Fonte: dados da pesquisa.

Apesar de não ter conseguido identificar os termos solicitados na Questão 2.4(c), podemos dizer que Bia teve uma melhora no reconhecimento de padrões no 2º Questionário, uma vez que não havia conseguido estabelecer a lei da sequência proposta na Questão 1.3(c). Na segunda entrevista, ao ser lembrada das semelhanças entre as Questões 1.3(c) e 2.4, disse que acha que a lei da Questão 2.4 é mais fácil de identificar e reiterou que o zero que se intercala na sequência na Questão 1.3(c) a impediu de escrever a lei algébrica.

Considerações sobre as questões apresentadas até este ponto da análise evidenciam que Bia faz interação de aspectos algorítmicos e intuitivos de conceitos e ideias mais básicas de sequências numéricas, como o uso e a elaboração de leis algébricas, a construção de gráficos e a identificação intuitiva de valores de limites. Nesse sentido, entendemos que a estudante não apresenta as dificuldades (A), (B) e (C), destacadas pelos docentes entrevistados.

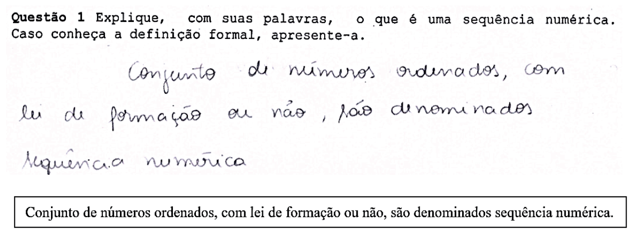
Na maioria das vezes, embora a ausência da interação com aspectos formais das ideias e conceitos não tenha causado dificuldades ou impedimentos às resoluções da estudante, em algumas ocasiões, os problemas dessa não interação emergem fortemente, evidenciando o poder restritivo que o abandono de aspectos formais pode trazer às possibilidades de compreensão de situações e problemas, como no caso da Questão 2.4(c), quando Bia, mesmo tendo elaborado a lei definida por duas sentenças, não soube identificar o 99º e o 100º termos. Neste caso, evidencia-se que a não interação de aspectos algorítmicos e formais limita as estratégias de resolução da estudante.

Em outras ocasiões dos questionários, no entanto, a ausência de aspectos formais de conceitos e ideias se mostrou mais evidente e impeditiva para a resolução dos problemas e o desenvolvimento de ideias, como mostramos a seguir.

As Questões 1.1 e 2.4(a) solicitam uma definição de sequência numérica e buscam explorar a (D) Dificuldade em caracterizar formalmente os conceitos de sequência, convergência e divergência, apontada pelos docentes entrevistados.

Na resposta à Questão 1.1 (Figura 7), que pede uma explicação sobre o que é uma sequência numérica, Bia apresenta uma resposta baseada em aspectos intuitivos, relacionados a aspectos algorítmicos. Expressões como “conjunto de números ordenados” e “com lei de formação ou não” indicam aspectos intuitivos do que é uma sequência numérica. Essas ideias, segundo ela, vêm “(...) dos exemplos que a gente obteve em aula”, posição que evidencia aspectos algorítmicos da resolução de exercícios e exemplos.

Figura 7 - Resposta para a Questão 1.1



Questão 1 Explique, com suas palavras, o que é uma sequência numérica. Caso conheça a definição formal, apresente-a.

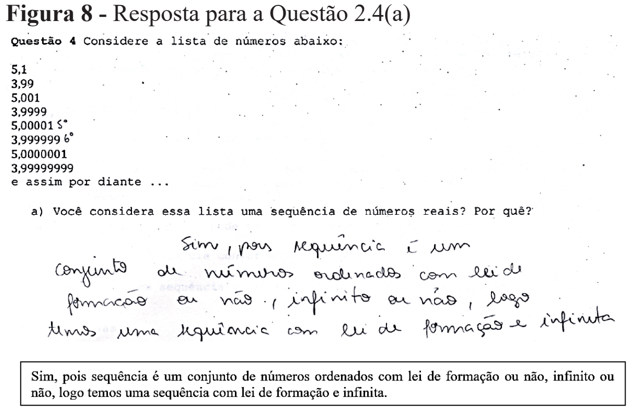
Conjunto de números ordenados, com lei de formação ou não, são denominados sequência numérica

Conjunto de números ordenados, com lei de formação ou não, são denominados sequência numérica.

Fonte: dados da pesquisa.

Na Questão 2.4(a), destacada na Figura 8, Bia repetiu ideias equivocadas sobre a definição de sequência, que havia apresentado na Questão 1.1, e acrescentou novos elementos, alheios a essa definição.

Figura 8 - Resposta para a Questão 2.4(a)



Questão 4 Considere a lista de números abaixo:

5,1
3,99
5,001
3,9999
5,00001 5°
3,999999 6°
5,0000001
3,99999999
e assim por diante ...

a) Você considera essa lista uma sequência de números reais? Por quê?

Sim, pois sequência é um conjunto de números ordenados com lei de formação ou não, infinito ou não, logo temos uma sequência com lei de formação e infinita

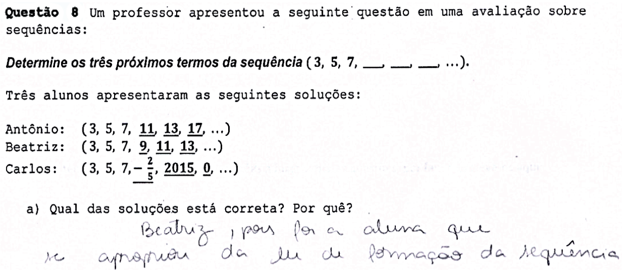
Sim, pois sequência é um conjunto de números ordenados com lei de formação ou não, infinito ou não, logo temos uma sequência com lei de formação e infinita.

Fonte: dados da pesquisa.

Na segunda entrevista, Bia reiterou que a descrição apresentada nas questões é a mesma que deu em uma avaliação de Sequências e Séries e que teria sido aceita como correta pelo professor da disciplina.

Questionada sobre a ideia de lei de formação de uma sequência, apontada nas respostas, Bia explicou “Que ele tem uma regra, vamos dizer assim, que vai definir o formato dela”. Neste ponto da discussão, Bia mostrou-se confusa ao explicar o que entendia por “uma regra” e lembrou-se da Questão 1.8 do 1º Questionário (Figura 9), que traz as respostas de três estudantes hipotéticos para uma mesma pergunta, para argumentar que nem sempre existe uma lei de formação. Na resposta a essa questão, no entanto, a estudante apontou apenas uma das soluções como correta, pois "(...) foi a aluna que se apropriou da lei de formação da sequência".

Figura 9 - Resposta para a Questão 1.8


Questão 8 Um professor apresentou a seguinte questão em uma avaliação sobre sequências:

***Determine os três próximos termos da sequência* (3, 5, 7, __, __, __, ...).**

Três alunos apresentaram as seguintes soluções:

Antônio: (3, 5, 7, 11, 13, 17, ...)
Beatriz: (3, 5, 7, 9, 11, 13, ...)
Carlos: (3, 5, 7, $-\frac{2}{5}$, 2015, 0, ...)

a) Qual das soluções está correta? Por quê?

Beatriz, pois foi a aluna que se apropriou da lei de formação da sequência

Beatriz, pois foi a aluna que se apropriou da lei de formação da sequência.

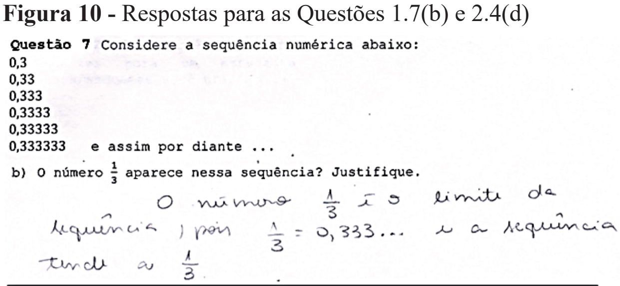
Fonte: dados da pesquisa.

Ao final dessa discussão, destacou que "Realmente, eu acho que não precisa ter uma lei de formação pra ser uma sequência de números". Apesar das contradições apresentadas por Bia, parece ser bem forte para ela que 'lei de formação' está relacionada à fórmula ou à expressão algébrica.

Sobre a ideia de finitude de uma sequência, na entrevista Bia manteve essa posição por algum tempo, mas, quando questionada se a sequência constante de termos igual a , respondida por ela na Questão 2.2(b), ainda tenderia a se fosse finita, disse "Acho que não (...) Agora eu não sei (...) Porque se for pensar no limite também o tende pro infinito então tem que ser infinita". Questionada sobre como é que sabia que o tem que ir para o infinito, apontou "O ? Do limite? Porque ele tem que ser maior tanto quanto a gente queira pra saber qual que é o limite". Por fim, sobre a possibilidade de uma sequência ser finita, disse "Acho agora que não pode mais".

As confusões de Bia sobre a ideia de infinito e de limite de sequências também se manifestam na resposta à Questão 2.4(d), quando ela admite que o número pertencerá à sequência pelo fato de esta ser infinita. Na resposta à Questão 1.7(b), que aborda a mesma ideia da Questão 2.4(b), a estudante havia apresentado um argumento circular, que não responde à pergunta daquele item; contudo, na primeira entrevista admitiu que pertencerá à sequência, usando o mesmo argumento equivocado, relacionado à infinitude da sequência, nas duas ocasiões. A Figura 10 traz as respostas da estudante para essas duas questões.

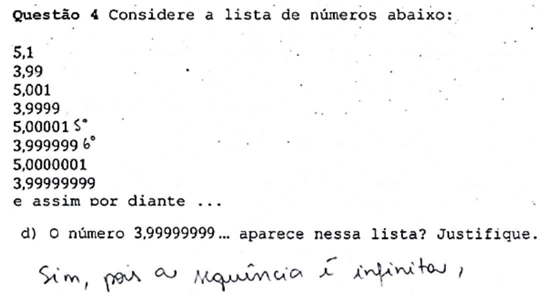
Figura 10 - Respostas para as Questões 1.7(b) e 2.4(d)


Questão 7 Considere a sequência numérica abaixo:
0,3
0,33
0,333
0,3333
0,33333
0,333333 e assim por diante ...

b) O número $\frac{1}{3}$ aparece nessa sequência? Justifique.

O número $\frac{1}{3}$ é o limite da sequência, pois $\frac{1}{3} = 0{,}333...$ e a sequência tende a $\frac{1}{3}$.

O número $\frac{1}{3}$ é o limite da sequência, pois $\frac{1}{3} = 0{,}333$ ... e a sequência tende a $\frac{1}{3}$


Questão 4 Considere a lista de números abaixo:

5,1
3,99
5,001
3,9999
5,00001 5°
3,999999 6°
5,0000001
3,99999999
e assim por diante ...

d) O número 3,99999999... aparece nessa lista? Justifique.

Sim, pois a sequência é infinita,

Sim, pois a sequência é infinita,

Fonte: dados da pesquisa.

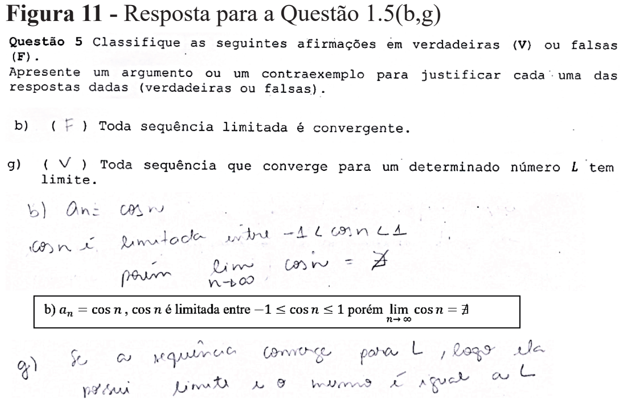
Na segunda entrevista, questionada sobre o significado das reticências na representação , disse "É pra sempre"; e para justificar o fato de este número pertencer à sequência, destacou que "Porque está 'e assim por diante', então o próximo vai ser , aí depois e vai indo, vai indo. E assim por diante e vai indo, e um dia vai chegar nesse. Ele vai aparecer um dia". A colocação de Bia reitera a ideia equivocada da pertinência de … a partir da infinitude da sequência.

As respostas e posicionamentos de Bia sobre a Questão 2.4 (a, d) (Fig. 8 e 10) são evidências da ausência de aspectos formais e da presença apenas de aspectos algorítmicos e intuitivos, relativos à definição de sequência, às ideias de infinito e de limite de sequências, que interpretamos como causadores das dificuldades e dos erros cometidos pela estudante. As limitações da estudante nessa questão também indicam dificuldades com as propriedades e as características do conjunto dos números reais.

As Questões 1.5 e 2.5 avaliam as justificativas para questões do tipo Verdadeiro/Falso envolvendo o tema sequências numéricas. Com essas questões buscamos investigar a (E) Dificuldade com a estrutura lógica de demonstrações.

Bia acertou os itens b e g da Questão 1.5 (Fig. 11) e apresentou justificativas erradas ou não justificou os demais itens, perspectiva que indica dificuldades da estudante em problemas deste tipo.

Figura 11 - Resposta para a Questão 1.5(b,g)


Questão 5 Classifique as seguintes afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F).
Apresente um argumento ou um contraexemplo para justificar cada uma das respostas dadas (verdadeiras ou falsas).

b) (F) Toda sequência limitada é convergente.

g) (V) Toda sequência que converge para um determinado número L tem limite.

b) $a_n = \cos n$
$\cos n$ é limitada entre $-1 \leq \cos n \leq 1$
porém $\lim_{n\to\infty} \cos n = \nexists$

b) $a_n = \cos n$, $\cos n$ é limitada entre $-1 \leq \cos n \leq 1$ porém $\lim_{n\to\infty} \cos n = \nexists$

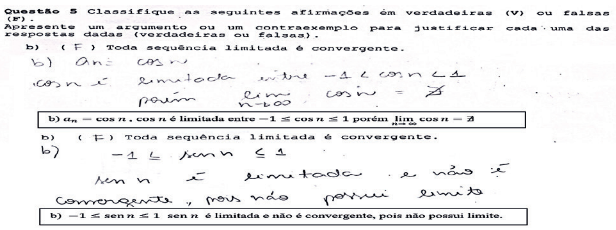
g) Se a sequência converge para L, logo ela possui limite e o mesmo é igual a L

g) Se a sequência converge para L, logo ela possui limite e o mesmo é igual a L

Fonte: dados da pesquisa.

Na Questão 2.5, Bia respondeu apenas aos itens a, b e d, deixando os demais em branco, uma indicação de que continua com dificuldades na elaboração de justificativas. Ela repete a justificativa dada para o item b na Questão 1.5(b).

Figura 12 - Resposta para a Questão 2.5(b)


Questão 5 Classifique as seguintes afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F). Apresente um argumento ou um contraexemplo para justificar cada uma das respostas dadas (verdadeiras ou falsas).

b) (F) Toda sequência limitada é convergente.

b) $a_n = \cos n$ cos n é limitada entre $-1 \le \cos n \le 1$ porém $\lim_{n\to\infty} \cos n = \nexists$

b) $a_n = \cos n$, $\cos n$ é limitada entre $-1 \le \cos n \le 1$ porém $\lim_{n\to\infty} \cos n = \nexists$

b) (F) Toda sequência limitada é convergente.

b) $-1 \le \operatorname{sen} n \le 1$ sen n é limitada e não é convergente, pois não possui limite

b) $-1 \le \operatorname{sen} n \le 1$ sen n é limitada e não é convergente, pois não possui limite.

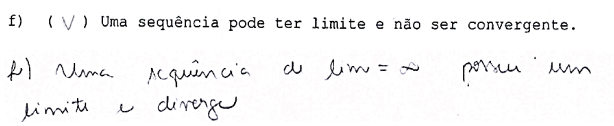
Fonte: dados da pesquisa.

Questionada se o exemplo da Questão 2.5(b) era suficiente para justificar a decisão, disse “Sim, porque no caso tem que apresentar um contraexemplo para justificar a afirmação falsa. Basta um contraexemplo pra negar”, posição que indica conhecimento da estudante em relação ao papel do contraexemplo em Matemática.

Por outro lado, convidada a explicar por que a função seno apresentada não possui limite, justificou que “No caso assim, se calculasse o limite de seno de , com tendendo a mais infinito, vai dar uma coisa. E se calcular com tendendo a menos infinito vai dar outra. Por esses limites serem diferentes, não tem limite”, o que indica que suas ideias sobre o fato de a função seno não ter limite estão baseadas em aspectos intuitivos equivocados e na ausência de aspectos formais relativos à própria definição de limite, uma vez que o argumento sobre a contradição entre o valor dos limites para tendendo para mais e menos infinito não faz sentido, posto que esses limites não precisam ser iguais, mesmo que pudesse assumir valores negativos.

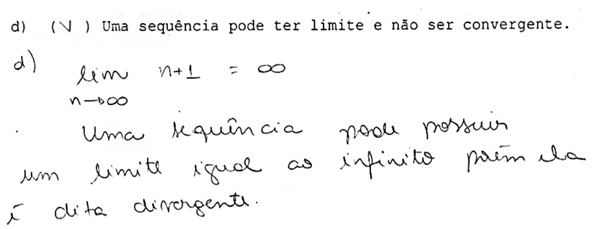
Na resposta para a Questão 2.5(d), Bia também repetiu o argumento dado na Questão 1.5(f), conforme destacado na Figura 13.

Figura 13 - Respostas para as Questões 1.5(f) e 2.5(d)


f) (V) Uma sequência pode ter limite e não ser convergente.

f) Uma sequência de lim = ∞ possui um limite e diverge

f) uma sequência de $lim\ = \infty$ possui um limite e diverge


d) (V) Uma sequência pode ter limite e não ser convergente.

d) $\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$ Uma sequência pode possuir um limite igual ao infinito porém ela é dita divergente.

d) $\lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$ Uma sequência pode possuir um limite igual ao infinito porém ela é dita divergente

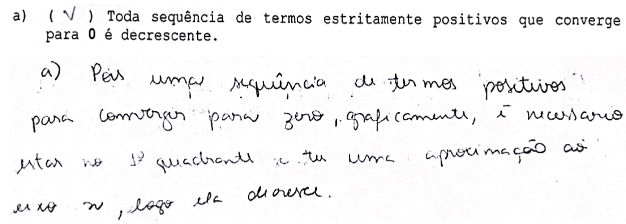
Fonte: dados da pesquisa.

Na entrevista, ao ser questionada sobre o que significa ‘ter limite’, Bia explicou que “É... ter um... resultado... pera (pausa) É ter um limite que existe”. Em seguida, reafirmou que o exemplo é um caso que tem limite e é divergente e que isso justifica a afirmação destacada na Figura 13 ser verdadeira, emendando: “Não ter limite é quando o limite não existe. No caso do seno”.

Neste caso, Bia indica confundir o limite infinito com a expressão ‘possuir limite’. Entendemos que a confusão da estudante pode ser explicada pelo uso de notações do tipo e por um tipo de ensino que não valoriza a interação de aspectos formais da definição de limite, que relaciona a existência do limite a um número real, com aspectos algorítmicos das técnicas de cálculo de limites.

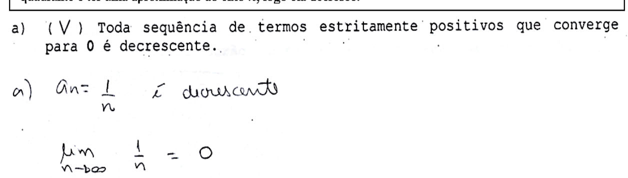
Para a Questão 2.5(a), Bia apresentou um exemplo de uma função que é decrescente e que converge para . Neste caso, a estudante exibe uma resposta diferente daquela dada à Questão 1.5(a), quando tentou uma argumentação para justificar sua decisão de que a afirmação é verdadeira (Figura 14).

Figura 14 - Respostas para as Questões 1.5(a) e 2.5(a)


a) (V) Toda sequência de termos estritamente positivos que converge para 0 é decrescente.

a) Pois uma sequência de termos positivos para convergir para zero, graficamente, é necessário estar no 1º quadrante e ter uma aproximação ao eixo n, logo ela decresce.

a) Pois uma sequência de termos positivos para convergir para zero, graficamente, é necessário estar no 1º. quadrante e ter uma aproximação ao eixo n, logo ela decresce.


a) (V) Toda sequência de termos estritamente positivos que converge para 0 é decrescente.

a) $a_n = \frac{1}{n}$ é decrescente

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

a) $a_n = \frac{1}{n}$ é decrescente $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Fonte: dados da pesquisa.

Na entrevista, questionada se o exemplo apresentado na Questão 2.5(a) justifica sua posição de que a afirmação é verdadeira, disse “Não, não justifica, mas eu não conseguiria justificar de outra forma, então pra não deixar em branco, achei melhor pôr um exemplo pra... pelo menos... me ajudar a pensar mas eu não consegui sair do lugar”; embora, nesse comentário, Bia mostre clareza com relação à construção de justificativas em Matemática, nos parece bastante grave que ela, ainda assim, sustente um exemplo associado a uma afirmação que considerou verdadeira.

Bia considerou, no 2º Questionário, os itens c e e como verdadeiros e deixou o item f em branco, mas não apresentou justificativas para nenhum deles (Figura 15). Na entrevista, disse não saber justificar o item c, mas que se lembrava vagamente de ter visto algo semelhante em aula. Também deixou este item sem justificativa no 1º Questionário.

Figura 15 - Resposta para a Questão 2.5(c,e,f)

c) (V) Dada uma sequência a_n, sempre é possível encontrar um intervalo numérico do tipo $]a,b[$ que, a partir de certo índice n, contenha todos os termos dessa sequência.

e) (V) Toda sequência convergente é limitada.

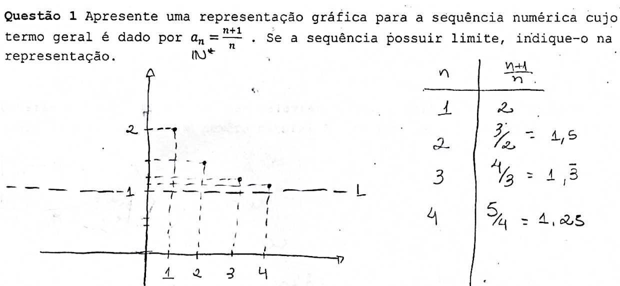
f) ( ) Se uma sequência a_n satisfaz $|a_n| < \infty$, então a_n é limitada.

Fonte: dados da pesquisa.

No item e, afirmou que ficou confusa no dia da realização do 2º Questionário; que primeiro marcou falso, depois mudou para verdadeiro, mas não soube justificar. Na entrevista, mudou de ideia novamente, disse que achava que a afirmação era falsa e, ainda em dúvida, acrescentou "Não sei, pera. Porque se o... o seno é limitado mas não converge, mas... agora... Limitada é quando é limitada dos dois lados, né?".

Na continuação da discussão, convidada a dar um contraexemplo para justificar a falsidade, Bia levou algum tempo e passou a pensar sobre a sequência da Questão 2.1, . Ao reanalisar o gráfico construído (Fig. 16), disse "Aqui, no caso, eu acho que ele não vai ser maior que 2, só que aqui ele vai sempre estar diminuindo, ele nunca vai chegar no 1 (...), ele é limitado aqui (indica o) mas não é limitada aqui embaixo (indica a linha pontilhada por 1), então não é limitada", reiterando incompreensões sobre o conceito de sequência limitada.

Figura 16 - Resposta para a Questão 2.1



Fonte: dados da pesquisa.

No item f (Figura 15), Bia tinha originalmente marcado que a afirmação era falsa, mas apagou e deixou em branco. Questionada na entrevista, disse acreditar na falsidade, mas "(...) por que eu não sei. Eu acho que só esse módulo de menor que o infinito não... não me diz que a sequência é limitada. Não sei".

As respostas e considerações de Bia sobre os itens c, e e f revelam dificuldades da estudante com aspectos formais da definição de convergência e com a ideia de sequência limitada. O fato de se lembrar de ter sido apresentada à definição, mas não conseguir articular elementos básicos do conceito na resolução desses itens indica um tipo de ensino que não explora as relações presentes na definição e que não promove, assim, a articulação entre aspectos algorítmicos e formais dessas ideias.

Na segunda entrevista, solicitamos que Bia identificasse a hipótese e a tese dos itens da Questão 2.5, e o fez corretamente em todos os casos. Disse que os professores de Geometria e Álgebra ensinaram e solicitaram que os estudantes fizessem esse tipo de reconhecimento. É interessante observar que, mesmo sendo capaz de fazer isso com clareza, não conseguiu apresentar nenhuma demonstração na Questão 2.5. Entendemos ser esta uma situação que mostra que apenas o conhecimento de estruturas formais não é suficiente para conferir aos estudantes a capacidade de colocá-las em funcionamento na resolução de problemas.

De maneira geral, embora Bia tenha mostrado, na entrevista, alguma clareza com relação ao papel das justificativas em Matemática, a comparação das respostas apresentadas nos dois questionários aponta que a estudante não avançou na capacidade de argumentar e de elaborar justificativas. Espera-se esse tipo de capacidade dos estudantes ao final do curso de Licenciatura em Matemática.

As Questões 1.6 e 2.6 avaliam a capacidade dos participantes em classificar representações gráficas de sequências segundo alguns conceitos (Fig. 17). Com essas questões buscamos investigar a (F) Dificuldade em classificar sequências numéricas em crescente, decrescente, limitada, possuir limite e (G) Dificuldade em relacionar a ideia de convergência com o limite de uma sequência. Os gráficos apresentados nas questões foram retirados de Oehrtman et al. (2014).

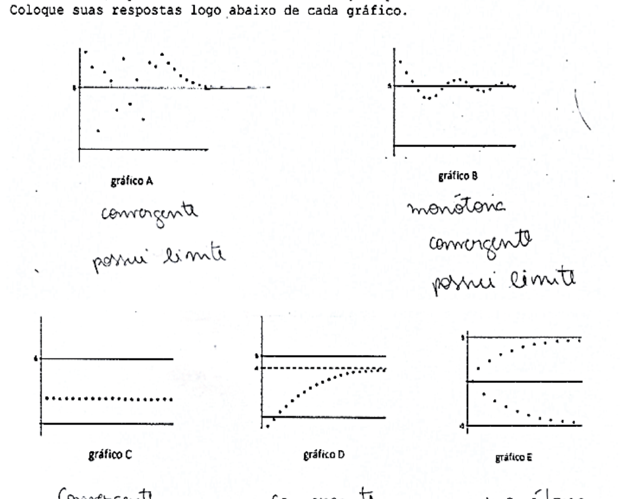
Na Questão 2.6 (Figura 17), Bia não utilizou a expressão 'limitada' nos gráficos A, B, C e D; não utilizou a expressão 'monótona' nos gráficos C e D; aplicou este conceito equivocadamente para B e E; e não aplicou o conceito 'divergente' no gráfico E.

Figura 17 - Resposta para a Questão 2.6

Questão 6 Os gráficos a seguir representam sequências numéricas. Admitindo que os comportamentos indicados nos gráficos persistam, classifique essas sequências em:

convergente, divergente, crescente, decrescente, limitada, sem limite, limite infinito, possui limite, constante, monótona.

Em cada caso, apresente todas as classificações possíveis. Coloque suas respostas logo abaixo de cada gráfico.



Fonte: dados da pesquisa.

Na entrevista, Bia voltou a mostrar ideias equivocadas sobre o conceito de sequência limitada, apontadas na discussão sobre a Questão 2.5. Questionada sobre o que entende por ‘limitada’, disse “Aqui (gráfico E), no caso, tem o limite inferior e o superior, é limitada dos dois lados”; sobre o gráfico D, Bia reiterou que a sequência não é limitada e justificou que “Essa aqui tá... continuando aqui até o 4, né? Nunca vai ser 4, já não tem um dos limites de cima” e, referindo-se ao início deste gráfico D, emendou “E aqui embaixo também tá vindo lá do infinito também, igual àquela outra lá”, lembrando-se da resposta dada ao mesmo gráfico no 1º Questionário.

Sobre o gráfico C, justificou que não é limitado “Porque ele é constante”. As explicações de Bia indicam que aspectos intuitivos com que ela interpreta os gráficos não interagem com aspectos formais da definição de sequência limitada. Além disso, as colocações de Bia sobre o conceito de sequência limitada revelam que suas incompreensões não se restringem a este conceito, mas também incluem a definição de sequência, situação evidenciada no comentário sobre o gráfico D.

Sobre o conceito de sequência monótona, Bia disse que é “Quando é crescente e decrescente”; convidada a explicar melhor essa posição, apontou o gráfico B e reiterou “É, decresce, cresce, decresce, cresce, aí então ela é monótona”, indicando que confunde este conceito com o de sequências que oscilam.

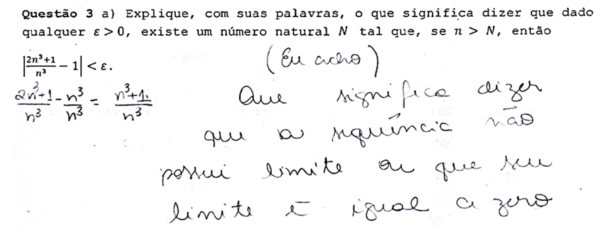
No caso da expressão ‘divergente’, que não utilizou, Bia disse que ser divergente é “Ter limite igual ao infinito”. Ao ser questionada se a sequência do gráfico E é divergente, explicou “Não, ela é sem limite. (...) Ah, é porque ela... teria no caso um limite pro infinito e o outro pro menos infinito”. Novamente, a posição da estudante revela incompreensões de natureza formal relativas à definição de convergência e que ela não tem clareza sobre o estudo do limite de sequências, quando cita “pro menos infinito”, situação que já havia apresentado (Figura 12).

As classificações de Bia para os gráficos da Questão 2.6 não foram muito diferentes daquelas apresentadas por ela para os mesmos gráficos na Questão 1.6 e revelam dificuldades com aspectos formais dos conceitos destacados nessas questões, que são substituídos por aspectos intuitivos equivocados e restringem a capacidade de interpretação e de resolução de problemas dessa estudante.

A Questão 2.3 trata do uso da definição de convergência de sequências e dos elementos envolvidos nessa definição para avaliar a (E) Dificuldade com a estrutura lógica de demonstrações; a (G) Dificuldade em relacionar a ideia de convergência com o limite de uma sequência e a (H) Dificuldade em lidar com a definição de limite de sequências, apontadas pelos docentes entrevistados.

No item a, Bia apresenta uma resposta que indica que ela não entende a escrita formal estabelecida no enunciado, conforme destacado na Figura 18.

Figura 18 - Resposta para a Questão 2.3(a)


Questão 3 a) Explique, com suas palavras, o que significa dizer que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número natural N tal que, se $n > N$, então $\left|\frac{2n^3+1}{n^3} - 1\right| < \varepsilon$.

$\frac{2n^3+1}{n^3} - \frac{n^3}{n^3} = \frac{n^3+1}{n^3}$

(Eu acho) Que significa dizer que a sequência não possui limite ou que seu limite é igual a zero

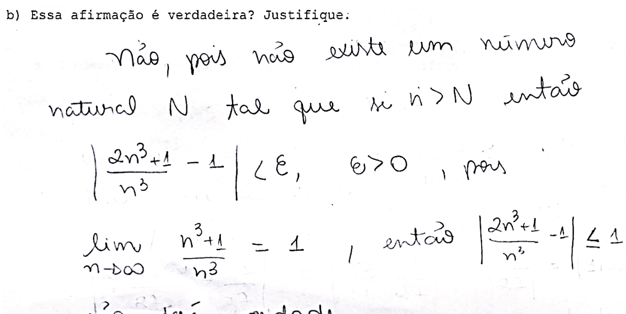
(Eu acho) Que significa dizer que a sequência não possui limite ou que seu limite é igual a zero

Fonte: dados da pesquisa.

Na entrevista, questionada se havia visto algo semelhante, apontou lembrar-se das aulas de Sequências e Séries e disse “Eu vi algo parecido com isso, eu não lembro (...) Eu lembro que tinha épsilon, tinha tipo... Épsilon maior que alguma coisa, vai ter o maior que não sei o que e tinha uma conclusão também, mas eu não lembro”. Essa colocação revela que, apesar de ter sido apresentada a essa definição, esta não foi explorada de maneira significativa para a estudante. De fato, ela reitera que se lembra de o professor ter destacado e utilizado algo parecido em sala, mas, ao ser questionada se foi discutida, emendou “Não, ela veio já pronta. Ela veio escrita dessa forma e tipo, então, significa que isso é isso e isso e isso”, colocação que corrobora uma proposta de ensino que não valoriza a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais, conforme temos apontado neste trabalho.

Na resposta **à** Questão 2.3(b), Bia sustenta que a afirmação é falsa, mas o argumento apresentado indica que ela, na verdade, não percebeu o erro colocado propositalmente no enunciado, conforme destacado na Figura 19.

Figura 19 - Resposta para a Questão 2.3(b)


b) Essa afirmação é verdadeira? Justifique:

Não, pois não existe um número natural N tal que se $n > N$ então $\left|\frac{2n^3+1}{n^3} - 1\right| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, pois $\lim_{n \to \infty} \frac{n^3+1}{n^3} = 1$, então $\left|\frac{2n^3+1}{n^3} - 1\right| \leq 1$ não será verdade.

Fonte: dados da pesquisa.

Na entrevista, questionada sobre o porquê de ter calculado o limite da expressão , obtida a partir da simplificação da expressão dada no módulo do item a, disse “Eu acho que eu pensei assim: eu calculei o limite pra saber que essa sequência não chegaria no limite, no caso aqui seria a mesma coisa do outro (Questão 2.1), que sempre o de cima vai ser 1 maior”. Convidada a justificar as razões desse cálculo de limites, sustentou “(Pra saber) que ele não vai chegar nesse limite. Porque aqui tá falando que tem que ser menor que o épsilon e o épsilon é maior que zero. Só que no caso se o meu épsilon fosse 1 ele não ia ser menor do que o épsilon porque ele não vai ser menor do que 1”.

As explicações de Bia para a resposta apresentada reiteram que ela não tem clareza sobre o funcionamento dos elementos presentes na escrita formal da definição de convergência e confunde aspectos algorítmicos relacionados ao cálculo de limite e essa escrita formal. Ela disse nunca ter trabalhado com essa definição nas disciplinas sobre sequências, que se lembrava de o professor tê-la apresentado nas aulas, mas reiterou que nunca teve de utilizá-la.

A análise das justificativas e comentários de Bia sobre a Questão 2.3 revelam que ela não conhece a definição formal de convergência de sequências e não desenvolveu, em quatro anos de formação, habilidades básicas sobre técnicas de demonstração. Também se destaca o fato de Bia não ter indicado evolução na maioria das respostas apresentadas para as questões que se repetiram no 2º Questionário. De fato, ela voltou a repetir erros e dificuldades observados nas questões do 1º Questionário, como evidenciamos na discussão.

Considerações Finais

De maneira geral, as análises e discussões reavaliadas corroboram a posição que defendemos no início da análise dos protocolos de Bia, de que a estudante apresenta uma prevalência de aspectos algorítmicos e intuitivos em suas respostas e observações, que invariavelmente não estão em interação com aspectos formais sobre os conceitos e ideias explorados nos dois questionários.

Além disso, Bia também não mostrou evolução com aspectos formais relativos à construção de justificativas em Matemática. A análise da Questão 2.5 (Fig. 14 e 15) é uma evidência dessa situação, pois ela repetiu interpretações incorretas, apresentadas no 1º Questionário. Essa perspectiva reitera a posição colocada por Bisognin et al. (2016), que destacam que futuros professores baseiam suas justificativas em elementos concretos, indicando um estágio de matemática prática.

Ao considerar os erros de Bia referentes aos conceitos de convergência de sequências, observados na análise das Questões 2.3 e 2.5, e **à** definição de sequência numérica (Questão 2.4), parece bastante difícil que ela tenha conseguido expandir seus conhecimentos acerca de conceitos como os de função e de convergência de funções, objetos centrais no estudo de sequências numéricas. Essas dificuldades, entendemos, estão relacionadas diretamente à ausência de interação de aspectos algorítmicos e intuitivos com aspectos formais dos conceitos e ideias.

Outros autores também destacam dificuldades de estudantes na aprendizagem de limite e de convergência de sequências. Keene et al. (2014) propõem primeiro o desenvolvimento de ideias intuitivas sobre o conceito de limite de sequências, que depois seriam confrontadas com a definição formal, o que levaria estudantes ao entendimento deste conceito. Discordamos dessa posição, pois entendemos que a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais deve permear todo o processo de aprendizagem de um conceito matemático, desde o princípio, e não que intuições, algoritmos e formalismos sejam tratados separadamente.

Nossa investigação reitera muitos dos aspectos apontados por Nardi (2014), que destaca dificuldades com o formalismo - e com a atribuição de significado à definição formal de limite, que são evidenciados na análise da Questão 2.3.

Oehrtman et al. (2014) destacam que disciplinas de Cálculo deveriam antecipar os desafios cognitivos que os estudantes experimentarão no processo de formalização do conceito de convergência e estabelecer uma base na qual os aprendizes poderão se apoiar para a compreensão de definições formais. Conforme defendemos, grande parte das dificuldades de Bia pode ser explicada pela não interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais no estudo de sequências numéricas e, nesse sentido, concordamos com esses autores e acreditamos que disciplinas iniciais de Cálculo também devam explorar aspectos formais relacionados ao conceito de limite de funções e de sequências. Não se trata, evidentemente, de resgatar abordagens excessivamente formais, de fracasso evidente nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo e Análise, mas entendemos que algumas perspectivas mais formais do conceito de convergência podem favorecer o amadurecimento dos estudantes e propiciar-lhes melhores condições no estudo de temas mais avançados, como os discutidos em uma disciplina de Análise Real.

Entendemos, ainda, que essa perspectiva pode ser uma resposta para a questão colocada por Pinto (1998), sobre o fato de licenciandos em Matemática evitarem o formalismo e aceitarem explanações pouco rigorosas. Novamente se coloca uma questão para futuras pesquisas, sobre o papel do ensino de Cálculo em Cursos de Licenciatura em Matemática.

Por fim, reiteramos que um tipo de ensino que valorize a interação de aspectos algorítmicos, intuitivos e formais pode colaborar para uma formação mais abrangente e articulada de conceitos, ideias e representações em Matemática.

Referências

Bisognin, E., Bisognin, V. & Leivas, J. C. P. (2016). Aprendizagem de sequências numéricas: pesquisa sobre dificuldades de Licenciandos em Matemática. Zetetiké, v.24,n.3.

Fischbein, E. (1994). The Interaction between the Formal, the Algorithmic, and the Intuitive Components in a Mathematical Activity. In R. Biehler, R. Scholz, R. Strasser and B. Winkelmann (Eds.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrecht: Kluwer Academic. p. 231-245.

Igliori, S. (2009). Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In M.C. Frota, & L. Nasser, Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates (pp,11-26). Recife: SBEM.

Keene, K., Hall, W. & Duca, A. (2014). Sequence limits in calculus: using design research and building on intuition to support instruction. ZDM Mathematics Education, v. 46. p. 561–574.

Nardi, E. (2014). Amongst Mathematicians: Teaching and Learning Mathematics at University Level. New York: Springer.

Oehrtman, M., Swinyard, C. & Martin, J. (2014). Problems and solutions in students' reinvention of a definition for sequence convergence. The Journal of Mathematical Behavior v. 33. p. 131-148.

Pinto, M. (1998). Students' understanding of real analysis. 354f. Tese (Doutorado em Educação), Instituto de Educação - Universidade de Warwick, Londres.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In TALL, D. (Org.), Advanced Mathematical Thinking (pp.2-21). Londres: Kluwer Academic Publisher,

Vieira, W. (2016). Do cálculo à análise real: um diagnóstico dos processos de ensino e de aprendizagem de sequências numéricas. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.