

# Releitura das Apreensões em Geometria e a Ideia de Expansão Figural a Partir dos Estudos de Raymond Duval

## Rereading the Apprehensions in Geometry and the Idea of Figural Expansion Based on Raymond Duval's Studies

Méricles Thadeu Moretti<sup>\*a</sup>; Adalberto Cans<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação Científica e Tecnológica. SC, Brasil.

\*E-mail: [mthmoretti@gmail.com](mailto:mthmoretti@gmail.com)

### Resumo

Procurou-se neste trabalho revisitar a noção de apreensão na aprendizagem da geometria com objetivo de renomear apreensões de forma a atribuir, a cada uma delas, o papel que toma na resolução de problemas em geometria com figuras. A partir dessa busca, identificou-se um tipo de expansão discursiva fortemente presente e que tem o papel de listar as regras ou resultados matemáticos oriundos da identificação de elementos geométricos na figura. Pretendeu-se, portanto, neste estudo deixar bastante visível essas operações semiocognitivas presentes na resolução de problemas em geometria.

**Palavras-chave:** Apreensões em Geometria. Expansão Discursiva. Resolução de Problemas.

### Abstract

*This paper sought to revisit the notion of apprehension in geometry learning with the goal of renaming apprehensions in order to assign to, each of them, the role it takes in solving problems in geometry with figures. From this search, it was identified a type of discursive expansion strongly present and that has the role of listing the rules or mathematical results arising from the identification of geometric elements in the figure. It was intended, therefore, in this study to make quite visible these semiocognitive operations present in geometry problem solving.*

**Keywords:** *Apprehensions in Geometry. Discursive Expansion. Problem Solving.*

## 1 Introdução

Pretendemos, nesse texto, fazer uma releitura de algumas operações semiocognitivas desenvolvidas por Duval na aprendizagem da geometria com figuras na intenção de reforçar recomendações didáticas do próprio autor. Assim, por exemplo, a apreensão perceptiva passa a ser duas, uma que é imediata que se reporta apenas à figura e outra que considera também o enunciado do problema e que participa da heurística do problema. Além disso, trouxemos para as figuras a ideia de função de expansão figural a partir dos estudos de Duval sobre a função de expansão discursiva. Essa função participa, de forma decisiva, de uma das etapas da resolução de problemas de geometria.

## 2 Desenvolvimento

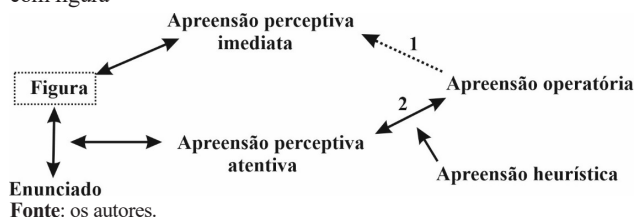
### 2.1 As Figuras e as Apreensões na Aprendizagem da Geometria

As figuras geométricas têm um papel importante na aprendizagem da geometria, elas são construídas ou acompanhadas do enunciado do problema, na maioria dos casos são integrantes do problema proposto. Na aprendizagem desse tipo de problema, Duval (1995, 2012) apresenta quatro apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. Essa última, que não será abordada neste texto, diz respeito mais

apropriadamente à construção de figuras geométricas com régua não graduada e compasso. Em Duval (1995, 2012, 2022), Moretti (2013), & Moretti & Brandt (2021) encontram-se maiores aprofundamentos sobre essas operações e outros elementos semiocognitivos relacionados à aprendizagem da geometria.

A apreensão perceptiva é a mais importante operação semiocognitiva na aprendizagem da geometria uma vez que todas as outras apreensões dela dependem não só por conta do olhar, mas de outras operações semiocognitivas que é responsável. Passamos a considerar as três primeiras apreensões mencionadas anteriormente em quatro apreensões com atuação semiocognitiva conforme apresentado na Figura 1.

**Figura 1** - Atuação das apreensões em um problema de geometria com figura



Fonte: os autores.

Nessa figura, estão sendo consideradas as novas apreensões:

### 2.1.1 A apreensão perceptiva imediata

Esta apreensão que se efetiva na figura, é conduzido pelas leis da *Gestalt* ou *Psicologia da Forma*. Do ponto de vista psicofisiológico, Koffka (1936, p.138) estabelece que há duas forças, uma interna que imprime, no processo de distribuição, a forma mais simples possível enquanto a força externa e o padrão de estímulo procuram impedir essa simplificação.

Podemos aproximar a ideia de apreensão de uma figura ao processo de compreensão de texto: as forças externas referem-se ao conteúdo cognitivo, ou simplesmente à mensagem que uma figura pretende veicular, e as formas internas referem-se à organização figural como em uma organização redacional de texto. Olhando por esses aspectos, as forças internas possuem uma organização cujos princípios básicos são os seguintes:

- Segregação e unificação: são forças mais simples que regem o processo de percepção da forma visual (Gomes Filho, 2004, p.20);
- Descontinuidade: para a formação de unidades figurais é necessário que haja descontinuidade de estimulação (ou contraste) (Gomes Filho, 2004, p.20);
- Fechamento: “As forças de organização dirigem-se, espontaneamente, para uma ordem espacial que tende para a unidade em todos fechados, segregando uma superfície, tão completamente, quanto possível do resto do campo” (Gomes Filho, 2004, p.21);
- Boa continuação: “é a impressão visual de como as partes se sucedem através da organização perceptiva de forma coerente, sem quebras ou interrupções na sua trajetória ou na sua fluidez visual” (Gomes Filho, 2004, p.33);
- Proximidade: “Em condições iguais, os estímulos mais próximos entre si, seja de forma, cor, tamanho, textura, brilho,

peso, direção, e outros, terão maior tendência a serem agrupados e a constituírem unidades” (Gomes Filho, 2004, p.34);

- Semelhança: “A igualdade de forma e de cor desperta também a tendência de se construir unidades, isto é, de estabelecer agrupamentos de partes semelhantes” (Gomes Filho, 2004, p.35).

Em uma figura, a proximidade e semelhança concorrem para formação de subunidades figurais (Gomes Filho, 2004, p.35);

- ✓ **Pregnância de forma ou força estrutural:** É uma lei básica da Gestalt, tendência de uma estrutura resultante tão simples quanto as condições permitirem, no sentido da harmonia e do equilíbrio visual (Gomes Filho, 2004, p.36).

Há ainda muitos outros elementos gestálticos na organização de uma figura ou imagens como, por exemplo, o uso de cores, contraste de cores, simetrias, perspectiva geométrica, plano, volume, ilusão ótica, harmonia etc. Maiores aprofundamentos podem ser encontrados no livro clássico de Koffka (1936), em Guillaume (1979) e Gomes Filho (2004).

Na aprendizagem da geometria, uma figura precisa ser aquilo que está explicitado no enunciado ou na própria figura com signos convencionais como: signos para designar o mesmo comprimento de segmentos, a mesma medida de ângulos, ângulos retos, retas paralelas etc.

Uma enquete publicada por Dupuis et al. (1978) comentada por Duval (1995) & Moretti (2023) apresenta um exemplo bastante primoroso dessa situação, um problema em duas versões que exigem os mesmos conhecimentos matemáticos de resolução. No entanto, elementos figurais que aparecem na figura foram decisivos para uma maior taxa de acerto quando foram mencionados no enunciado do problema.

#### Exercício 1 - Problemas distintos, mas com as mesmas exigências matemáticas em sua resolução

Versão LIV OU		Versão CHAP	
<p>ABED e BCED são paralelogramos.</p> <p>Provar que B é meio de AC.</p>		<p><math>A'C'</math> e <math>AC</math> são paralelos, <math>A'B'</math> e <math>AB</math> são paralelos e <math>B'C'</math> e <math>BC</math> são paralelos.</p> <p>Provar que A é o meio de <math>B'C'</math>.</p>	

Fonte: Dupuis et al. (1978).

O Exercício 1, em sua versão LIV OU, explicita no enunciado em que a figura apresenta dois paralelogramos, fato esse essencial para a resolução do problema. Já o problema em

sua versão CHAP não fala em paralelogramos, mas o deixa implícito por meio do enunciado das retas paralelas. Vejamos as soluções que podem ser apresentadas nesses dois casos:

#### Solução LIV OU

<p>Como <math>ABED</math> é paralelogramo <math>\square o = m</math>;</p> <p>Como <math>BCED</math> é paralelogramo <math>\square o = n</math>;</p> <p>Uma vez que <math>o = m</math> e <math>o = n \square m = n</math>; e</p> <p>Como <math>m = n</math>, então <math>B</math> é ponto médio de <math>AC</math>.</p>	<p><b>LIV OU</b></p>
--	----------------------

#### Solução CHAP

<p>Como <math>A'C'</math> e <math>AC</math> são paralelos e <math>A'B'</math> e <math>AB</math> são paralelos <math>\rightarrow ABCB'</math> é paralelogramo <math>\square o = n</math>;</p> <p>Como <math>A'C'</math> e <math>AC</math> são paralelos e <math>B'C'</math> e <math>BC</math> são paralelos <math>\rightarrow C'BCA</math> é paralelogramo <math>\square o = m</math>;</p> <p>Uma vez que <math>o = n</math> e <math>o = m \square m = n</math>; e</p> <p>Como <math>m = n</math>, então <math>A</math> é ponto médio de <math>B'C'</math>.</p>	<p><b>CHAP</b></p>
--	--------------------

Na solução CHAP, parte dela é para reconhecer que  $ABCB'$  e  $C'BCA$  são paralelogramos, algo que já é afirmado no enunciado do problema na versão LIV OU. Sobre a versão CHAP, Duval assinala que: “Em virtude da lei de fechamento, essa figura é, espontaneamente, vista como *um pequeno triângulo inscrito e um grande triângulo*, ou formado como uma pavimentação de quatro pequenos triângulos disjuntos” (Duval, 1995, p.183).

O fato de que o paralelogramo não tenha sido reconhecido pode ter acarretado apenas 11% de acertos na versão CHAP em uma população de 116 estudantes de 15 a 16 anos; já a versão LIV OU, em que o paralelogramo é mencionado, contou com 34% de acertos (Dupuis et al., 1978). Em ambos os casos as taxas de acertos são muito baixas, é uma resolução por demonstração que abrange três registros: linguagem natural e algébrica em um problema de geometria com figura que envolve diversas noções de geometria (paralelismo de retas, definição de paralelogramo, ponto médio geométrico etc.).

### 2.1.2 A apreensão heurística

A apreensão heurística é a apreensão que atua em uma figura na resolução de um problema dado em um movimento de sinergia que congrega duas apreensões: a *Apreensão perceptiva atenta* que é pautada e age, além do olhar na figura, com o que é dito no enunciado e nas indicações fornecidas na própria figura, e induz a *Apreensão operatória* a efetuar possíveis modificações na figura com fins heurísticos:

**Quadro 1** - Operações figurais semiocognitivas

Tipo de modificação figurar	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que interferem na visibilidade
<b>Modificação Mereológica</b> (decomposição da figura em subfiguras)	- Reconfiguração intermediária - Imersão	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
<b>Modificação Ótica</b>	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
<b>Modificação de Posição</b>	- Rotação, Reflexão - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras

Fonte: Duval (2012).

Esse Quadro apresenta as mais importantes modificações em uma figura, papel da apreensão operatória. A modificação mereológica de reconfiguração intermediária é bastante presente no ensino da geometria com figuras. São exemplos, as modificações apresentadas, mais adiante, nas Figuras 2A e 2B para o Problema 1.

O caminho da apreensão heurística se efetiva pelo que é mostrado pela seta 2 na Figura 1. Já o caminho mostrado pela seta 1, da linha pontilhada, pode não levar à solução do

problema, pois vai depender muito da congruência semântica e equivalência referencial entre: figura, enunciado do problema relacionado e procedimentos matemáticos de resolução. Foi o caso do Exercício 1, que ao exigir os mesmos procedimentos matemáticos de resolução, tem uma taxa de acerto mais alta para o caso da versão LIV OU por conta da presença do termo *paralelogramo* no enunciado, presença esta importante para a resolução do problema.

Propusemos novos nomes às apreensões uma vez que a única apreensão que opera de forma isolada é a apreensão perceptiva imediata, mesmo assim sob o comando das leis da Psicologia da forma, e poderia também ser chamada de *apreensão gestáltica*. As apreensões perceptiva, discursiva, operatória são aquelas que Duval (1995, 2012, 2022) elaborou, apenas deixamos mais claro o papel que elas desempenham formando novas combinações e nomes: apreensão perceptiva une-se à apreensão discursiva para formar a apreensão perceptiva atenta; a apreensão perceptiva atenta une-se à apreensão operatória para formar a apreensão heurística.

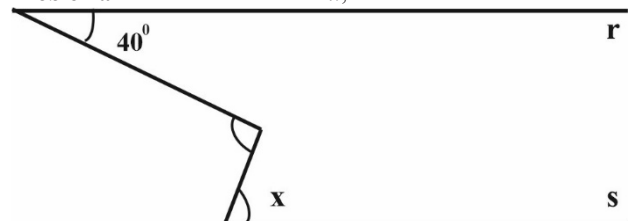
As apreensões contribuem de forma decisiva na resolução de problemas de geometria com figuras. No entanto, a partir de um certo momento da resolução entra em jogo as funções de expansão discursiva, sem as quais, o problema poderia não ter um desfecho final. São essas funções que estudaremos a seguir para mostrar o papel que desempenham na resolução de problemas em geometria.

### 2.2 A Função de Expansão Discursiva

As funções discursivas que Duval (1995) abordou referem-se aos registros de uma maneira geral, apesar de que o título contenha o termo discursivo, podem muito bem ser empregadas para os registros não discursivos, como é o caso das figuras em geometria. Por exemplo, quando em um retângulo, designamos  $P$  o ponto de encontro das diagonais estamos fazendo uso da função referencial que tem o papel de designar objetos. No entanto, essa designação se valeu de um elemento discursivo em um contexto figurar.

Na maioria das vezes, a resolução de problemas em geometria segue um duplo papel da apreensão heurística: realizar operações sobre a figura com a identificação de elementos geométricos que essa operação revela. Vejamos o caso do Problema 1 a seguir.

**Problema 1** - Calcule o valor de  $x$ , sendo  $r \parallel s$ .

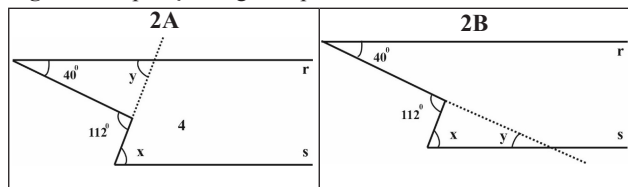


Fonte: Dolce & Pompeu (1993, p.73).

O enunciado traz informações que são bastante visíveis na figura. A figura e o enunciado são congruentes

e referencialmente equivalentes. A compreensão do problema não traz dificuldades, a dificuldade vai residir nos procedimentos matemáticos de resolução que vão exigir modificações na figura como uma daquelas apresentadas a seguir.

**Figura 2** - Operações figurais para o Problema 1



**Fonte:** os autores com operação de reconfiguração sobre a figura do Problema 1

O que houve nas Figuras 2A e 2B foi o *prolongamento* de um segmento de reta – operação de reconfiguração (linhas pontilhadas), a identificação de um ângulo e a *designação pura* desse ângulo pela letra *y*. Essas modificações na figura podem ocorrer sem um objetivo específico, a não ser pela busca de uma solução para o problema em que a identificação dos elementos matemáticos só vem após esses traços serem efetuados. Os procedimentos matemáticos agora ficam mais aparentes, basta perceber que no caso da Figura 2A:

*y* é designado para o ângulo obtido após o prolongamento do segmento de reta;

$x = y$ , designação funcional (ângulos alternos internos); e

$112^\circ = 40^\circ + y$ , designação funcional (na Figura 2A,  $112^\circ$  é ângulo externo do triângulo formado pelo prolongamento do segmento de reta).

Para o caso da Figura 2B, temos o seguinte:

*y* é designado para o ângulo obtido após o prolongamento do segmento de reta;

$y = 40^\circ$ , designação funcional (ângulos alternos internos); e

$x + y = 112^\circ$ , designação funcional (na Figura 2B,  $112^\circ$  é ângulo externo do triângulo formado com o prolongamento do segmento de reta).

Com esses dados, a solução de cada sistema resulta no mesmo valor  $x = 72^\circ$ . (Como era de se esperar).

Importante destacar que, como foi o caso, a figura e enunciado são congruentes e referencialmente equivalentes. Mas não se pode dizer o mesmo dos procedimentos matemáticos que só se tornaram aparentes depois da modificação na figura e da identificação do ângulo que foi designado por *y*. O que torna isso aparente? Para discutir essa questão, abordaremos a seguir a noção de expansão figural cognitiva.

### 2.2.1 A expansão figural cognitiva

Duval (1995) trata das funções discursivas de um enunciado completo que é definido por ele como: “Um ato de expressão é um ato completo do discurso quando a expressão produzida toma um valor determinado no universo cognitivo

ou relacional dos interlocutores” (Duval, 1995, p.111-112).

Por valor entende-se um valor lógico de verdade ou falsidade, um valor social que obriga uma resposta e um valor epistêmico de certeza, necessidade, verossimilhança, possibilidade ou absurdidade (Duval, 1995, p. 112). É sobre esse pano de fundo do discurso completo que Duval (1995) desenvolve a ideia de função de expansão discursiva.

A proximidade entre frases ou até mesmo entre imagens pode criar semelhanças como assinalou Foucault citando Grégoire<sup>1</sup>, sendo uma delas, a *convenientia*:

A *convenientia* é uma semelhança ligada ao espaço na forma da ‘aproximação gradativa’. É da ordem da junção e do ajustamento ... Assim, pelo encadeamento da semelhança e do espaço, pela força dessa conveniência que avizinha o semelhante e assimila os próximos, o mundo constitui cadeia consigo mesmo (Foucault, 1999, p.24-25).

As frases citadas por Duval (1995, p.121) a seguir: Uma caldeira explodiu. Uma casa queimou. Cria uma continuidade temática inferindo uma relação de causa e efeito que não está dito de forma explícita em nenhuma das frases. A proximidade das frases permite essa inferência que se apoia no termo “fogo” presente nas duas frases de forma implícita:

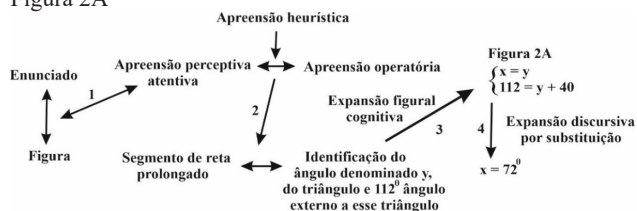
- a caldeira que explode, projeta fogo;
- o fogo projetado pegou na casa e a queimou.

A expansão discursiva ocorreu por conta da proximidade dessas duas frases e por conhecimento social ligado ao termo “fogo” em ambas as frases.

As frases: A caldeira usada para produzir aço explodiu. João não vai trabalhar amanhã. Cria uma relação entre elas uma vez que a caldeira que explodiu poderia pertencer a uma empresa que empregava João. Agora não é mais o termo “fogo” que associa as duas frases, mas o termo “emprego” que leva a expansão nessas duas frases. Esse tipo de expansão discursiva é classificado por Duval como sendo *expansão discursiva natural* uma vez que “mobiliza simultaneamente uma rede semântica de uma língua natural e conhecimentos pragmáticos próprios ao meio sociocultural dos locutores” (Duval, 1995, p.132).

Sobre o Problema 1 podemos considerar dois tipos de expansão que podem ser observados no esquema da Figura 3.

**Figura 3** - Apreensão e expansão para a solução com base na Figura 2A



**Fonte:** os autores.

A partir da leitura do problema (seta 1) o segmento de reta é prolongado (seta 2 e linha pontilhada da Figura 2A) e o ângulo é identificado e designado pela letra *y*. A seta 2

1 Grégoire. *Syntaxeon artis mirabilis*. Colônia, 1610.



aponta tanto para o prolongamento do segmento quanto para a identificação do ângulo  $y$  para deixar claro que neste procedimento da apreensão heurística, não se consegue saber o que veio primeiro: o prolongamento pode ocorrer em uma tentativa meio que aleatória na busca de uma saída para a solução, ou contrariamente, o ângulo foi identificado apenas pelo olhar operatório e o prolongamento do segmento serviu como uma constatação.

Após todo esse processo, a Seta 3 mostra a *Expansão figural cognitiva* que ocorre para a listagem (seta 4) das relações de:  $112^\circ$  como ângulo externo ao triângulo formado após o prolongamento do segmento; e  $x = y$  por serem ângulos alternos internos. Esse tipo de expansão pode ser classificado como *Expansão figural cognitiva por similitude externa* uma vez que “exige o conhecimento de definições, regras ou leis para um domínio de objetos” (Duval, p.129). Diferente dos casos das frases citadas anteriormente em que a expansão discursiva natural ocorria uma vez que conhecimentos da língua e do contexto social seriam suficientes; aqui a *Expansão figural cognitiva* exige conhecimentos mais especializados para um certo domínio científico: no caso em discussão, teorema do ângulo externo de um triângulo e a congruência dos ângulos alternos internos. Além disso, mais um processo de *Expansão discursiva* ocorre por *Substituição* (seta 4) para que se chegue à solução  $x = 72^\circ$  - expansão discursiva classificada conforme Duval (2004, p.106).

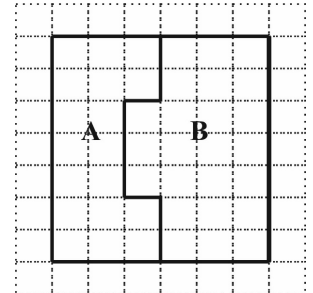
Quando o prolongamento é efetuado, há uma *Mudança de dimensão*: o segmento de reta traçado de dimensão 1 caracteriza uma mudança de dimensão que é uma dificuldade a mais na produção de alguma modificação da figura com fins heurísticos. O segmento de reta é prolongado, mas o que se deve considerar são os elementos de dimensão 2, no caso da Figura 2A, o ângulo  $y$  e a igualdade entre os ângulos  $x$  e  $y$ , e o triângulo formado para identificar  $112^\circ$  como sendo um ângulo externo desse triângulo. É surpreendente o papel que joga a mudança de dimensão na apreensão heurística, e como consequência disso no processo de *Expansão figural cognitiva*: a Figura 3 mostra que a expansão figural cognitiva só ocorreu após a ação da apreensão heurística no prolongamento do segmento de reta e identificação do ângulo  $y$ .

O Relatório do projeto internacional Brasil-França CAPES/COFECUB (1996) apresentou pesquisa realizada em novembro/dezembro de 1995 com 18 classes do primeiro ano do segundo grau (idade dos alunos entre 15 e 16 anos). A amostra compreendeu 382 alunos do primeiro ano do segundo grau de vários colégios de Santa Catarina. Entre as várias questões, constava a seguinte:

**Problema 2** - Questão sobre área e perímetro com malha

Um terreno foi repartido conforme indica a figura. Assinale a resposta mais conveniente:

- a)
- O perímetro da parcela A é igual ao perímetro da parcela B
  - O perímetro da parcela A é maior do que o perímetro da parcela B
  - O perímetro da parcela A é menor do que o perímetro da parcela B



Explique tua escolha:

- b)
- A área da parcela A é igual a área da parcela B
  - A área da parcela A é maior do que a área da parcela B
  - A área da parcela A é menor do que a área da parcela B
- Explique tua escolha:

Fonte: CAPES/COFECUB (1996, p. 10).

Os resultados, sem considerar o pedido de explicação da escolha da opção, são os seguintes:

**Quadro 2** - Resultado das respostas dos 392 alunos ao Exercício 2 sem considerar “Explique tua escolha”

% de respostas	A = B	A < B	A > B	Não assinaladas
Perímetro	30,9	50,0	6,6	12,5
Área	4,6	75,8	2,3	17,3

Fonte: CAPES/COFECUB (1996).

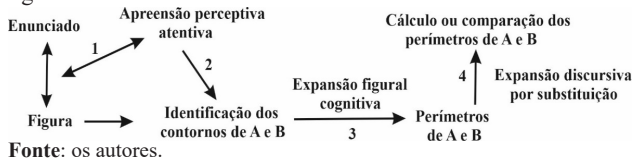
Observando as taxas de acertos em ambas as questões, verificamos que a congruência semântica e a equivalência referencial levaram 75,8% de respostas a bom termo para o caso da área. Mas, não se pode dizer o mesmo para o caso do perímetro uma vez que apenas 30,9% acertaram a questão. No entanto, é importante sublinhar que 50,0% dos alunos se deixaram levar pela apreensão perceptiva imediata e assinalaram a resposta equivocada de que “O perímetro da parcela A é menor do que o perímetro da parcela B”.

Esses resultados mostram o papel decisivo da apreensão perceptiva imediata que se deixa levar pelas leis da *Gestalt* que hora podem funcionar, outras vezes não: os princípios gestálticos na organização interna das formas foram as leis do *fechamento* e da *descontinuidade de estimulação* (ou contraste) uma vez que a figura exhibe claramente duas regiões planas, nas quais, percebemos uma região com área maior do que a outra região. E isso foi bastante sintomático tanto para a resposta da área quanto para a resposta equivocada sobre o perímetro.

De qualquer forma o ensino e a aprendizagem devem

estar pautados na *Apreensão perceptiva atenta* que funciona em sinergia com a apreensão operatória. A Figura 4, a seguir apresenta, os papéis das apreensões, da *Expansão figural cognitiva* e da *Expansão discursiva por substituição* para o caso do problema sobre perímetro.

**Figura 4** - Apreensão e expansão para a solução do perímetro da figura do Problema 2



Fonte: os autores.

A compreensão do Problema 2, sobre o perímetro (Seta 1), leva a apreensão perceptiva atenta (Seta 2) a considerar que é uma questão sobre perímetro e, portanto, são os contornos que devem ser levados em conta, ou seja, é preciso fugir da armadilha de um olhar gestáltico sobre área (o fundo quadriculado também pode ter reforçado a apreensão das unidades figurais bidimensionais), e se concentrar em um olhar sobre contornos (unidimensionais) é uma tarefa muito difícil, há mudança de dimensão. Basta ver que para o caso da área a taxa de acerto foi de 75,8% enquanto para o caso de perímetro foi de apenas 30,9%; e 50,0% de respostas para o item incorreto: “O perímetro da parcela A é menor do que o perímetro da parcela B”, que parece acompanhar o mesmo pensamento para o caso da área.

A identificação dos contornos da figura (seta 2) leva (seta 3) a *Expansão figural cognitiva*, buscar definições e regras para o cálculo do perímetro que pode ocorrer por uma simples contagem dos segmentos dos contornos dos terrenos A e B (a figura quadriculada pode contribuir para isso), ou por comparação, basta constatar que: a linha divisória interna do grande terreno confere a mesma medida para ambos os terrenos A e B; e as partes não comum de A e B também têm o mesmo comprimento, o que pode ser constatado facilmente.

A apreensão heurística contou com o papel preponderante da apreensão perceptiva atenta uma vez que, pela solução apresentada, não foi necessário fazer mudanças na figura a não ser a operação semicognitiva de mudança de dimensão pois a figura exalava dimensão 2 enquanto a sua resolução para o perímetro exigia a dimensão 1, contagem de segmentos.

Para quem se deixou levar pela apreensão perceptiva imediata, a resposta assinalada não poderia ser diferente: “A área da parcela A é menor do que a área da parcela B”. No entanto, a justificativa correta para a questão só poderia vir de um aluno que adotou o caminho apresentado pela *Seta 2* da *Figura 1*, ou seja, o caminho da apreensão perceptiva atenta. Pensamos que esse aluno poderia pertencer ao grupo que acertou a ambas as questões, área e perímetro (cerca de 27,3%). É preciso considerar também que muitos alunos que assinalaram a resposta correta poderiam não achar necessário justificar algo que para eles “salta aos olhos” como verdadeiro: foi o papel determinante da apreensão perceptiva

imediate que levou a essa situação uma vez que para o aluno parece ser óbvio que “A área da parcela A é menor do que a área da parcela B” e não vê necessidade de dar alguma justificativa. Isso vale também para a resposta equivocada sobre o perímetro de que “O perímetro da parcela A é menor do que o perímetro da parcela B”.

Por outro lado, algumas justificativas podem significar concepções equivocadas como foi o caso da resposta de um aluno à questão sobre o perímetro do Problema 2: “O perímetro da parcela B tem mais da metade do terreno” (CAPES/COFECUB, 1996, p.11), em clara confusão entre área e perímetro.

Para o caso da área, o esquema da Figura 4 não seria muito diferente, a noção de área substituiria a noção de perímetro e, como consequência disso, o cálculo de área tomaria o lugar do cálculo de perímetro dos terrenos A e B. O cálculo da área também poderia ser feito apenas por contagem dos pequenos quadrados que aparecem na malha pontilhada da figura do Problema 2.

É interessante observar que em algumas situações a resolução dos tipos de problemas com figuras pode resultar em *Expansão discursiva por acumulação ou composição* que é o caso que ocorre em decisões, em processos argumentativos. Vejamos o problema seguinte:

**Problema 3** - Sobre congruência de triângulos

<p>Indique na figura os triângulos congruentes, citando o caso de congruência.</p>	
--	--

Fonte: adaptado de Dolce & Pompeu (1993, p.51).

Sobre o problema proposto, observamos os seguintes fatos:

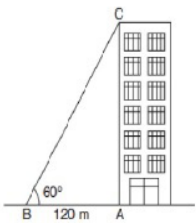
– O enunciado e figura são congruentes uma vez que os triângulos estão claramente apresentados na figura para a busca do caso de congruência aplicável. Novamente os princípios gestálticos de fechamento e descontinuidade de estimulação (ou contraste) é que organizam essa figura. Os triângulos parecem ser congruentes, mas para isso é preciso imaginar um eixo de simetria ortogonal passando pelo ponto C (uma reflexão em volta desse eixo, ver Quadro 1);

- ✓ Na determinação do caso de congruência de triângulos, tem importância o reconhecimento das convenções dos traços sobres os lados e que indicam que são segmentos que possuem a mesma medida, e das marcas de congruência dos ângulos e ;
- ✓ A apreensão perceptiva atenta identifica os lados (convenção apresentada na figura), a igualdade (convenção também apresentada na figura) e os ângulos e . No entanto, é a *Expansão figural cognitiva* que estabelece a igualdade dos ângulos , uma vez que são ângulos opostos pelo vértice, na determinação do caso de congruência de triângulos que convém.

Diferentemente dos três problemas discutidos anteriormente, esse trata de demonstração e a *Expansão discursiva* se dá por *Acumulação ou composição*, classificação feita tendo por base Duval (2004, p. 106) na busca das hipóteses que se enquadram em um dos casos de congruência de triângulos, para o Problema 3, é o caso de congruência em que “dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado (), um ângulo adjacente a esse lado () e o ângulo oposto a esse lado ()”.

No Problema 4, que trataremos a seguir, a *Expansão figural cognitiva* se dá por *Similitude interna*, como no caso dos pares de frases tratados anteriormente.

**Problema 4 - Questão sobre área e perímetro**

<p>A figura ao lado mostra um prédio, onde temos 3 pontos destacados. Bruno encontra-se no ponto B da figura, enquanto Carla está no ponto C, e o térreo do prédio é o ponto A. Observando a figura, responda:</p> <p>a) Que tipo de triângulo é formado pelos pontos A, B e C?</p> <p>b) Qual é a distância entre Bruno e Carla?</p> <p>c) Qual é a altura do prédio?</p>	
--	---

Fonte: Sabel (2021, p.39).

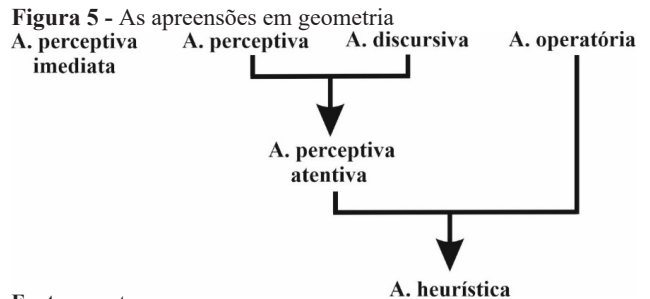
Estamos interessados na resposta ao item a) do problema que foi aplicada a 25 alunos do ensino médio. Segundo Sabel (2021, p.52) o discurso mais comum em relação ao problema, em particular em relação ao item a), foi que o “triângulo é retângulo” ou “como temos a presença de um ângulo reto, então o triângulo é retângulo”. Analisemos essas respostas mais comuns:

- ✓ a apreensão perceptiva imediata levou a essa conclusão, uma vez que o ângulo, apesar de não está dito que é reto, parece ser reto e é levado a isso também devido a sua posição com lados horizontal e vertical, bastante privilegiada no ensino;
- ✓ a apreensão perceptiva atenta levou à conclusão de que ABC forma um triângulo (já enunciado na própria questão), mas por um processo de *Expansão figural natural* chega à conclusão de que o ângulo é reto, uma vez que, possivelmente, na observação pelos alunos do mundo que os cerca “os prédios são comumente construídos de forma vertical e base horizontal e, portanto, o triângulo ABC é retângulo”. A expansão ocorre por meio de um conhecimento social, se bem que não há elementos para concluir que ocorreu esse tipo de expansão uma vez que a questão não solicitava do aluno explicação da sua resposta.

Uma vez considerado que o triângulo ABC é retângulo em A, ocorre uma outra expansão, a *Expansão figural cognitiva* quando do uso da fórmula trigonométrica para determinar a distância entre Bruno e Carla e, ainda outra, no momento do cálculo, *Expansão discursiva por substituição* para chegar ao valor final da distância.

**3 Conclusão**

Fizemos uma releitura de algumas operações semiocognitivas desenvolvidas por Duval (1995) para a aprendizagem da geometria conforme mostra a Figura 5.



Fonte: os autores.

Dividimos a apreensão perceptiva em duas: uma que segue as leis da Psicologia da forma a qual denominamos de *Apreensão perceptiva imediata*, algumas vezes mencionada por Duval (1995) em alertas do papel problemático que essa apreensão pode representar; como no caso, por exemplo, do item sobre perímetro do Problema 2 em que apenas 30,9% de acertos foram observados; e outra que denominamos de *Apreensão perceptiva atenta* que se organiza de forma simultânea em volta da figura e do enunciado do problema e ainda tem o papel fundamental de identificação. Desse papel da apreensão atenta em sinergia com a apreensão operatória, que é a apreensão responsável por possíveis modificações em uma figura, surge a apreensão heurística, que é a apreensão que identifica e que pode operar sobre a figura e que se serve do olhar mais intenso e não icônico que Duval (2022, pp. 7, 10) denomina de olhar inventor (faz-tudo).

É importante destacar que as forças gestálticas de organização de uma figura também atuam juntamente com a apreensão perceptiva atenta na busca da identificação de elementos figurais. É o caso, por exemplo, da identificação dos ângulos opostos pelo vértice no Problema 3 que, uma vez facilitado pelos princípios gestálticos de fechamento e descontinuidade de estimulação (ou contraste), contribuiu ainda os princípios da proximidade e semelhança. Situação semelhante também ocorreu no caso do Problema 1 na identificação dos ângulos que mais adiante, por meio da expansão figural cognitiva, houve o reconhecimento da igualdade por serem alternos internos.

Caracterizamos, por meio de exemplos, a *Expansão figural cognitiva* que pela proximidade dos objetos matemáticos na figura pode levar ao reconhecimento de objetos na figura e a busca de regras, definições e resultados relacionados a esses objetos que culminaram: no caso da solução que toma por base a Figura 2A do Problema 1, no sistema linear a duas equações  $112^\circ = 40^\circ + y$  e  $x + y = 180^\circ$ ; e para o Problema 2, item a), sobre o perímetro, com a comparação ou cálculo dos perímetros dos terrenos de A e B. Já no Problema 3 observamos um caso de demonstração em que condições (hipóteses) são examinadas para se chegar à conclusão ou não da congruência dos

triângulos por meio da expansão discursiva por acumulação ou composição conforme classificação feita a partir de Duval (2004): esse tipo de exercício permite iniciar o aluno no universo da demonstração, que reconhece hipóteses e conclusão em regras ou teoremas como foi a identificação de um dos casos de congruência aplicável aos triângulos  $ACB$  e  $ECD$  da figura do Problema 3. No Problema 4, pode ter havido três expansões: uma expansão figural natural na determinação do triângulo retângulo (o problema não diz que o triângulo  $ABC$  é retângulo), outra por expansão figural cognitiva na determinação da fórmula trigonométrica a ser utilizada, e finalmente a expansão discursiva por substituição na resposta final dada após a resolução da equação usada.

Duval (1995, p.181) alerta para o fato de que “é o processo de abdução que orienta a dedução”. Isto quer dizer que as figuras têm “vida própria” e os tratamentos sobre as figuras não são guiados por tratamentos puramente matemáticos: um traço acrescentado em uma figura em um problema de geometria pode não ter claramente um objetivo definido, algum conhecimento matemático a ser usado, apenas é produzido com a intenção de tentar uma saída de resolução para o problema proposto.

Esse estudo pode deixar alguns elementos a serem considerados na aprendizagem da geometria: o papel peculiar de cada operação semiocognitiva tratada (as apreensões e a expansão figural cognitiva); e, talvez o mais importante, sinaliza que ao operar sobre as figuras, não se pode perder de vista que no contexto da apreensão heurística, a expansão figural cognitiva possa de fato significar um gesto intelectual que leva à solução desejada do problema como sinaliza Duval (1995) na última sessão do *Capítulo IV* que trata da aprendizagem da geometria sobre “Uma necessária tomada de consciência dos diferentes tipos de funcionamento da expansão discursiva.” (p. 206). Nos problemas aqui apresentados, apenas identificamos onde as expansões figurais e discursivas atuam, mas no ensino e aprendizagem da geometria, não basta identificar é preciso se debruçar na questão de como promover tal tomada de consciência? Questão essa que é tema central de uma tese de doutorado em desenvolvimento no Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina.

## Referências

- Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior/ Comitê Francês de
- Avaliação da Cooperação Universitária com o Brasil. (1996). Programa de Pesquisa
- sobre o Ensino de Matemática. Relatório do Acordo 174/95. Brasília: UFSC & UNISTRA.
- Dolce, O., & Pompeo, J.N. (1993). Fundamentos de matemática elementar: geometria plana. São Paulo: Atual Editora.
- Dupuis, C., Duval, R., & Pluvillage, F. (1978). Étude sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième. In *Géométrie au premier cycle*. Tomme II. Publication de la A.P.M.E.P., n. 22.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bristol: Peter Lang.
- Duval, R. (2004). Les problemas fundamentales en el aprendizaje matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo. Universidade del Valle.
- Duval, R. (2012). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(1), 118-138. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118>
- Duval, R. (2022). As condições cognitivas da aprendizagem da geometria: desenvolvimento da visualização, diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 17, 1-52. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e85937>
- Foucault, M. (1999). *As palavras e as coisas: uma arqueologia das ciências humanas*. Martins Fontes.
- Gomes Filho J. (2004). *Gestalt do objeto: sistema de leitura visual*. Escrituras.
- Guillaume, P. (1979). *La Psychologie de la forme*. Flammarion.
- Koffka, K. (1936). *Principles of Gestalt psychology*. Kegan Paul, Trench, Trubner.
- Moretti, M. T. (2013). Semiosfera do olhar: um espaço possível para a aprendizagem da geometria. *Acta Scientiae*, 15(2), 289-303.
- Moretti, M. T., & Brandt, C. F. (2021). Elementos semiocognitivos que perpassam a aprendizagem matemática segundo Raymond Duval. In F. J. Rauen, M. C. Cardoso, B. M. de Andrade Filho, & L. B. M. Morini. *Linguagem e ensino de ciências e matemática: perspectivas de interfaces* (pp. 53-73). Real Conhecer.
- Moretti, M.T. (2023). A compreensão de texto segundo Raymond Duval: um olhar mais exclusivo direcionado à aprendizagem matemática. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática*, 4(2), 92-112.
- Sabel, E. (2021). O papel das funções discursivas na análise da produção de alunos na resolução de problemas. Universidade Federal de Santa Catarina