DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2023v16n3p353-362

Aprendizagem de Geometria Esférica Por Meio do Geogebra

Learning Spherical Geometry Through GeoGebra

Josenilton Santos de Jesus*[a]; Elias Santiago de Assis[a]

[a]Universidade Federal do Recôncavo da Bahia. BA, Brasil.
*E-mail: joseniltonsantosdejesus@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como objetivo identificar as contribuições do software GeoGebra no processo de aprendizagem da Geometria Esférica, um tipo de geometria não euclidiana. Neste sentido, foi realizada uma pesquisa de campo, de natureza qualitativa, envolvendo um grupo de estudantes de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade pública do estado da Bahia. As técnicas de coleta de dados consistiram na na realização de entrevistas semiestruturadas e na aplicação de uma sequência de atividades contendo construções geométricas que foram realizadas pelos participantes no GeoGebra. Os resultados obtidos apontaram que construções realizadas no software favorecem a introdução de conceitos da Geometria Esférica, seja na criação ou refutação de conjecturas, seja na validação de resultados.

Palavras-chave: Geometria Esférica. GeoGebra, Aprendizagem de Geometria.

Abstract

This article aims to identify the contributions of GeoGebra software in the process of learning Spherical Geometry, a type of non-Euclidean geometry. In this sense, a qualitative field research was carried out, involving a group of students from an undergraduate course in mathematics at a public university in the state of Bahia. The techniques of data collection consisted of applying a sequence of activities involving geometric constructions in the GeoGebra and conducting semi-structured interviews. The results showed that, through these constructions, it was possible to introduce GE to the participants. It was possible to identify the Spherical Geometry contents properly understood by these actors and the contributions of the software in this process.Idem resumo.

Keywords: *Spherical Geometry. Geogebra. Geometry Learning.*

1 Introdução

Por volta dos anos 300 a.C o matemático Euclides escreveu uma obra denominada Os Elementos em que reuniu todo o conhecimento de matemática básica da época. Ele partiu de cinco resultados que considerava impassíveis de demonstração: eram chamados os postulados de Euclides (Barbosa, 2008). Enquanto os quatro primeiros postulados eram intuitivos e fáceis de serem aceitos, o quinto foi alvo de críticas ao longo de séculos. Para muitos matemáticos, ele poderia ser demonstrado a partir dos resultados que lhe precediam (Eves, 2004). Até a maneira como foi redigido assemelhava-se mais a um teorema do que a um axioma:

> Se uma reta, ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão do mesmo lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos (Barbosa, 2008).

No século XVIII ainda pairavam desconfianças acerca da independência do quinto com relação aos seus antecessores. Nesse período, o matemático escocês John Playfair apresentou uma versão que lhe é equivalente, comumente conhecida como o axioma das paralelas: Por um ponto P não pertencente a uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela a r (Barbosa, 2006). Com o intuito de provar que este axioma provinha dos quatro primeiros postulados, alguns matemáticos resolveram negá-lo com vistas a obter uma contradição. No século XIX, os matemáticos Janos Bolyai (húngaro) e Ivanovich Lobachewsky (russo), trabalhando separadamente, consideraram que por um ponto P, fora de uma reta r, passam pelo menos duas retas paralelas a r. Em vez da almejada contradição, eles virão nascer uma geometria tão consistente (e menos intuitiva) que a geometria de Euclides: trata-se da Geometria Hiperbólica (GH). Um tempo depois, ao fazer uso de outra negação do quinto postulado, o matemático alemão Bernhard Riemann deu origem a outra Geometria Não Euclidiana (GNE): temos agora a Geometria Esférica (GE). Desta vez, por um ponto fora de uma reta r não passaram retas paralelas à r (Dueli, 2013).

De acordo com Silva (2015), Riemann criou o conceito de uma superfície geométrica em que o espaço tridimensional coincide com a superfície de uma esfera de centro O. As retas desse espaço são os círculos obtidos pela interseção entre a esfera e um plano euclidiano que passa por O.

Quanto à polêmica em torno do quinto postulado de Euclides, em 1868 o matemático italiano Beltrami atestou a inviabilidade de prová-lo. Ele "fez isso com a exibição de um modelo de Euclides da geometria não-euclidiana" (Silva, 2015, p. 27). Uma vez que o modelo se assentava na geometria de Euclides, qualquer inconsistência sua implicaria na derrocada da própria geometria euclidiana. Assim, foi assegurada a consistência das GNE.

No que diz respeito ao ensino das GNE, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o ensino de matemática apontam que:

> Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (Brasil, 1998, p. 24).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) também reforça a necessidade de se comtemplar as GNE em sala de aula de modo a permitir que os estudantes possam "utilizar estratégias, conceitos, e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diferentes contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza" (Brasil, 2018, p. 531).

A despeito das sinalizações presentes nos PCN e na BNCC, a inserção das GNE em sala de aula não tem ocorrido a contento. Ao longo da história, a geometria euclidiana foi o modelo de geometria mais conhecido e, portanto, o único estudado nos ambientes educacionais. Romper com essa tradição não é uma tarefa fácil.

É fato que as descobertas do século XIX impulsionaram uma mudança de paradigma no seio da comunidade matemática. Outros modelos geométricos que descrevem espaços físicos e que não podem ser devidamente estudados pela geometria de Euclides passaram a ser aceitos e estudados pelos matemáticos. Contudo, destaca Ribeiro (2012), no que diz respeito ao ensino, o absolutismo em torno da geometria euclidiana ainda persiste em diversos cursos de formação inicial de professores de matemática, no Brasil. Consequentemente, na educação básica o quadro não é diferente.

A discrepância entre o espaço atribuído à geometria euclidiana e às GNE nos currículos dos cursos de licenciatura em matemática do país é pontuada nos trabalhos de Bonete (2000), Santos (2009), Caldatto (2011) & Assis (2017). Enquanto a geometria de Euclides aparece na forma de componente curricular obrigatório, as GNE nem sempre são contempladas nos cursos de formação inicial de professores de matemática.

Uma das possíveis formas de se introduzir as GNE, e em particular a GE, na sala de aula consiste na realização de construções geométricas por meio de softwares de geometria dinâmica. De acordo com Murari (2011, p.190):

> Na produção de objetos geométricos através de softwares de geometria dinâmica é possível efetuar explorações experimentais e teóricas, o que favorece elaborar e testar as conjecturas, além do que se pode dar um dinamismo às construções com os recursos do arrastar, movimentar e animar.

O GeoGebra é um software gratuito de geometria dinâmica que reúne os recursos apontados por Murari (2011). Ele dispõe de ferramentas que auxiliam no ensino de procedimentos algébricos e geométricos de forma interativa. A presente pesquisa tem como objetivo identificar as contribuições que o GeoGebra pode oferecer ao processo de aprendizagem da GE. Para isso, foi realizada uma pesquisa de campo que teve como participantes alguns estudantes do curso de licenciatura em matemática da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB). Eles realizaram algumas construções geométricas no software a partir de uma sequência didática elaborada e aplicada pelo investigador. Os participantes foram convidados a construir retas, segmentos de reta, ângulos e retas paralelas (se possível) sobre uma superfície esférica, na janela tridimensional presente no GeoGebra. Todos esses elementos da GE, bem como as atividades propostas serão descritas mais à frente, neste trabalho.

2 Ensino da Geometria Esférica

Os documentos oficiais do Ministério da Educação, com os PCN e a BNCC, reconhecem a importância da apresentação de outros modelos de geometria diferentes do euclidiano. Contudo, na prática, assistimos ainda as tentativas de resgate do ensino da própria geometria euclidiana (Caldatto & Pavanello, 2015). A inserção das GNE parece uma realidade mais distante.

De acordo com os PCN, o surgimento das GNE acarretou em uma mudança de paradigma em que a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, deve dar espaço à aceitação outros modelos geométricos (Brasil, 1998). As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) das áreas de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias concordam com esta perspectiva ao destacar que:

> [...] é especialmente adequado mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana. (Brasil, 2002, p.125).

Além das recomendações emitidas pelos documentos citados acima, o ensino das GNE também pode ser balizado pelos documentos elaborados pelas secretarias de educação de cada estado, a exemplo do que ocorreu no estado do Paraná. As Diretrizes Curriculares da Educação Básica para o ensino de Matemática, nesse estado, apontam que nos ensinos fundamental e médio, "[...] o conteúdo estruturante geometrias se desdobra nos seguintes conteúdos: Geometria Plana; Geometria Espacial; Geometria Analítica, e noções básicas de Geometria não-euclidiana". (Paraná, 2008, p.55).

Fato semelhante ocorre nas orientações curriculares dos estados de São Paulo e Ceará, destaca Assis (2017). Contudo, segundo este autor, as diretrizes desses três estados estão na contramão do que se observa na maior parte dos estados brasileiros, onde não há menção ao ensino das GNE.

A despeito da consonância entre as orientações curriculares do estado do Paraná e as recomendações dos PCN e PCN+, nem sempre os professores de matemática do estado se sentem preparados para abordar as GNE em suas aulas. De acordo com Carvalho e Tucci (2011), esse fato se deve à falta de acesso dos docentes aos modelos geométricos não euclidianos ao longo de sua formação acadêmica. Há, portanto, um descompasso entre as matrizes curriculares dos cursos de licenciatura em matemática e as orientações curriculares acerca do ensino das GNE no estado. Quanto aos estados de São Paulo e Ceará, observa-se uma lacuna nas investigações acerca da efetivação do ensino das GNE na educação básica.

De acordo com Assis (2017, p. 408),

> Apesar da quebra do absolutismo do modelo euclidiano há dois séculos, o ensino de geometria na maior parte do Brasil continua assentada na herança deixada por Euclides de Alexandria. Na educação básica, por ensino de geometria geralmente entende-se "ensino de geometria euclidiana", a despeito das propostas curriculares de três estados (Ceará, Paraná e São Paulo) defenderem também o ensino de outros tipos de geometria.

A supremacia da geometria de Euclides em detrimento das GNE também é observada no ensino superior. Após analisar as matrizes curriculares de trinta e cinco cursos de licenciatura em matemática do Brasil, Assis (2017) constatou que a GH é contemplada, por meio de componentes curriculares obrigatórios, em pouco menos de cinquenta por cento dos casos. A despeito de não constar na literatura estudo semelhantes relacionado à GE, o trabalho de Assis (2017) aponta para uma notável discrepância entre o espaço atribuído à geometria euclidiana e às GNE. A geometria de Euclides aparece em todos os cursos analisados.

Embora a geometria euclidiana seja, tradicionalmente, o modelo mais utilizado no ensino nem sempre ela é capaz de representar com devida precisão alguns problemas reais. A aplicação de conhecimentos geométricos não euclidianos é mais adequada à prática da navegação e na aeronáutica, em que a curvatura da Terra não pode ser desprezada (Brum et al., 2015). É por meio da GE que se pode, por exemplo, identificar a menor rota marítima a ser utilizada ou, ainda, calcular o menor trajeto a ser percorrido por um avião para chegar de uma cidade à outra ao longo da superfície da Terra. Neste caso, ao acompanhar a curvatura terrestre, o menor caminho entre dois pontos não será um segmento de reta. Será um arco de um círculo máximo.

Apesar da GE modelar diversas situações do mundo real ainda se percebe a utilização da geometria euclidiana para lidar, localmente, com algumas situações em que o espaço não se trata de uma curvatura[1] nula. Nesse sentido, Dueli (2013, p. 15) aponta que:

> Não se pode afirmar que a Geometria Euclidiana seja incoerente, o que ocorre é que a geometria euclidiana é uma geometria plana, adequada a espaços de curvatura nula. Essa geometria foi utilizada com frequência em representações geográficas, apesar de a Terra ser um espaço quase esférico, para análises em nível local, considerando-se o espaço plano. Porém, quando são consideradas grandes distâncias esse raciocínio pode implicar em resultados errôneos.

A questão de a geometria euclidiana ser muitas vezes utilizada, em sala de aula, para modelar representações geográficas pode ser justificada, em certa medida, pelo pouco preparo dos professores para o ensino das GNE. As tentativas de inserção nas aulas de modelos de geometria diferentes do euclidiano são desafiadoras. Como destaca Kaleff (2010), a formação geométrica que se dá na escola é arraigada de uma cultura euclidiana. Segundo esta autora, "quem não se lembra da imagem de uma reta linear, contínua e paralela ao plano do chão, quando ouve o termo reta? Quem não imagina dois segmentos retilíneos equidistantes quando ouve a expressão retas paralelas?" (p.10). Todos esses termos são desde cedo apresentados aos estudantes sob uma perspectiva euclidiana e, automaticamente, são absorvidos como verdade absoluta. Com efeito, "[...] na história das geometrias, foram registradas grandes dificuldades quando os estudiosos tentaram passar das concepções euclidianas para as abstrações não-euclidianas, pois as imagens visuais, percebidas do mundo real, sempre influenciaram a representação dos conceitos geométricos" (Kaleff, 2010, p. 10).

A tradição escolar em torno do ensino de geometria nos moldes euclidianos aliada à natureza mais abstrata das GNE, demandam do professor de matemática a utilização de variadas metodologias de ensino com intuito de tornar as GNE mais inteligíveis. A utilização de materiais manipuláveis, de sequências didáticas ou de softwares se revela como alternativas cabíveis.

Carvalho e Tucci (2011) investigam o uso de matérias manipuláveis no ensino da GE. Na pesquisa, essas autoras utilizaram folha de sulfite e uma superfície esférica com o objetivo de fazer com que os participantes (alunos do sexto ano do ensino fundamental e do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública do Paraná) identificassem as retas de uma superfície plana e de uma superfície esférica. Foi-lhes dada uma atividade que descrevia o deslocamento de um urso que caminhou 100 km ao sul e, em seguida, virou ao oeste e andou por mais 100 km. Por fim, o animal percorreu 100 km ao norte e assim retornou ao ponto de partida (sua casa). Após essa descrição, pede-se aos participantes que descubram qual é a cor do uso. Espera-se que os participantes percebem que se trata de um urso polar e que o seu deslocamento se deu

1 Intuitivamente, curvatura é a medida de quanto uma curva ou uma superfície se afastam, respectivamente, de sua reta ou plano tangente. Para maiores detalhes, recomenda-se a leitura de Carmo (2005).

sobre a superfície de uma esfera. Esta atividade, presente no trabalho de Carvalho e Tucci (2011), foi extraída de Coutinho (2001) onde são descritas uma série de atividades para o tratamento das GNE em sala de aula. Os alunos do ensino médio conseguiram distinguir as retas da superfície esféricas das retas do plano, já os estudantes do ensino fundamental não atingiram esse objetivo. Eles se dedicaram apenas a descobrir a cor do urso, sem se atentar para os aspectos geométricos que lhes ajudariam a encontrar a resposta. No caso dos primeiros alunos, a obtenção da resposta esteve mais relacionada aos dados do problema. Após traçar na superfície esférica a trajetória descrita pelo animal, eles concluíram que o urso tinha a cor branca.

Brum e Shuhmacher (2014) buscaram verificar de que forma uma sequência de atividades poderia ajudar um grupo de estudantes a compreender a existência de outros modelos geométricos diferentes do euclidiano. As atividades foram aplicadas em uma sala de aula composta por quatorze discentes da segunda série do ensino médio de uma escola de Santa Catarina e versavam sobre conceitos elementares das GNE, como a não validade do axioma da régua e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

Em uma das questões, era mencionado um personagem que, ao sair de sua casa, caminhava continuamente em linha reta. Era solicitado aos participantes que descrevessem a trajetória descrita pelo personagem, ora em uma folha de papel, ora em uma bola de isopor. Por fim, era-lhes questionado sobre a possibilidade deste sujeito retornar à sua própria casa. Segundo Brum e Shuhmacher (2014), dois participantes consideraram que sobre a superfície de papel o personagem conseguiria retornar à sua casa. Os outros doze apresentaram resposta contrária: sobre o plano euclidiano era impossível retornar ao ponto de partida por meio de uma trajetória retilínea ininterrupta. Nove destes últimos participantes assinalaram que, sobre a esfera, tal fato seria possível. Eles compreenderam que, na esfera, as retas possuem formatos curvos.

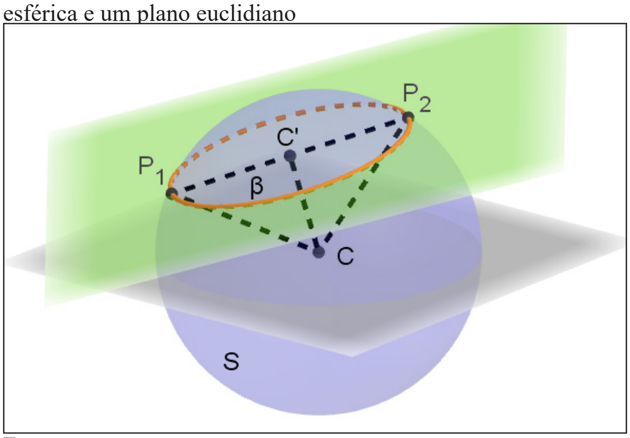
Camargo (2012) e Uchôa (2018) defendem a conexão entre sequências didáticas e ambientes computacionais na apresentação de conceitos das GNE. Dentre os softwares que podem ser utilizados para este fim encontra-se o GeoGebra. Trata-se de um software livre e de fácil utilização que reúne ferramentas para aplicações em geometria, álgebra e cálculo. Pode ser utilizado em sala de aula e favorece a interação entre os conteúdos fundamentais da matemática. Segundo Santos (2006, p. 33), por meio deste software "é possível investigar diferentes variações de uma construção geométrica e, consequentemente, inferir propriedades, chegar a generalizações e verificar teoremas". Todas as potencialidades do GeoGebra aqui mencionadas contemplam o processo de ensino e aprendizagem da geometria de um modo geral e, em particular, das GNE.

3 Geometria Esférica

Em geometria, há três elementos que não são considerados passíveis de definição e que recebem o nome de conceitos primitivos: o ponto, a reta e o plano (Barbosa, 2006). Trata-se de "objetos" facilmente identificados por qualquer estudante que teve aulas de geometria na educação básica. Contudo, vale ressaltar, que tais noções são aprendidas naquela fase de escolaridade sob uma perspectiva euclidiana. Em outros modelos de geometria, em que o conjunto de axiomas adotado não coincide com todos aqueles decorrentes do trabalho de Euclides, os conceitos primitivos aqui mencionados podem ter outro formato. Na GE, por exemplo, o plano corresponderá à superfície de uma esfera (Prestes, 2006). Os pontos são os mesmos adotados na geometria euclidiana, mas restritos àqueles pertencentes à superfície esférica. As retas da GE deverão, assim como no caso euclidiano, gozar da propriedade de minimizar distâncias (Carmo, 2005). Em outras palavras, dados dois pontos quaisquer da superfície esférica, o menor caminho que os une (sobre a superfície) deverá pertencer a uma reta. Para tanto, cabe algumas considerações acerca dos chamados círculos máximos de uma esfera. Antes, porém, é preciso destacar que nem todos os resultados apresentados nesta seção serão acompanhados de suas respectivas demonstrações. Neste caso, recomenda-se a leitura dos trabalhos Carmo (2005) e Silva (2015).

Seja S' a superfície de uma esfera S de raio R e centro C. Considere um círculo[2] β, de centro C' e raio r, obtido pela interseção entre S e algum plano euclidiano. Seja P_1P_2, um diâmetro de β, conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Círculo obtido pela interseção entre uma superfície esférica e um plano euclidiano



Fonte: os autores.

Da Figura 1 note que P_1C' é congruente a P_2C', pois são raios de β. Da mesma forma, P_1C é congruente a P_2C por serem são raios da esfera. Como CC' é comum aos triângulos P_1CC' e P_2CC', têm-se dois triângulos[3] congruentes pelo caso lado-lado-lado (LLL). Os ângulos $P_1C'C$ e $P_2C'C$ são congruentes

2 Neste texto, entende-se por círculo o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo pertencente ao mesmo plano.
3 Tem-se aqui triângulos da geometria euclidiana.

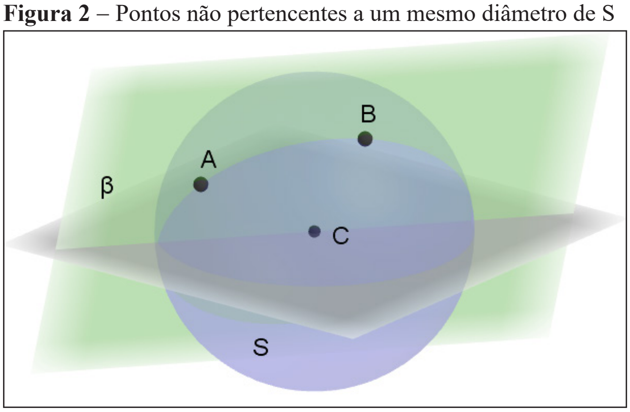
(e suplementares), logo as suas medidas são iguais a 90°. Portanto, o triângulo $P_1C'C$ é um triângulo retângulo, com hipotenusa P_1C. Como, na geometria euclidiana, o maior lado de um triângulo opõe-se ao maior ângulo e vice versa (Barbosa, 2006), o comprimento de P_1C é maior que o comprimento de P_1C'. Ou seja, o raio R da esfera é maior que o raio r do círculo β[3]. Como todo círculo obtido por meio da interseção de S com um plano (euclidiano) que passa pelo centro da esfera tem raio R tais círculos serão chamados de círculos máximos.

De acordo com Silva (2015), dentre todas as curvas que ligam dois pontos quaisquer contidos numa superfície esférica, aquela de menor comprimento está contida em um círculo máximo. Por esta razão, tais círculos serão considerados "as retas" da GE.

Considerando a forma como foram instituídos os conceitos primitivos (ponto, reta e plano) na GE, pretende-se, investigar nesta seção a validade, nesta geometria, dos axiomas que precedem o quinto postulado de Euclides. A primeira questão que se apresenta é a verificação do axioma de incidência segundo o qual por dois pontos distintos passa uma única reta. Estes pontos podem pertencer ou não a um mesmo diâmetro da esfera. Estes dois casos serão analisados separadamente.

Sejam A e B dois pontos de S', não pertencentes a um mesmo diâmetro de S. Neste caso, A, B e C não são colineares em um sentido euclidiano. Como, na geometria euclidiana espacial, por três pontos não colineares passa um único plano[4] (Lima et al., 2016), conclui-se, neste caso, a validade do axioma da incidência. A Figura 2 retrata a situação.

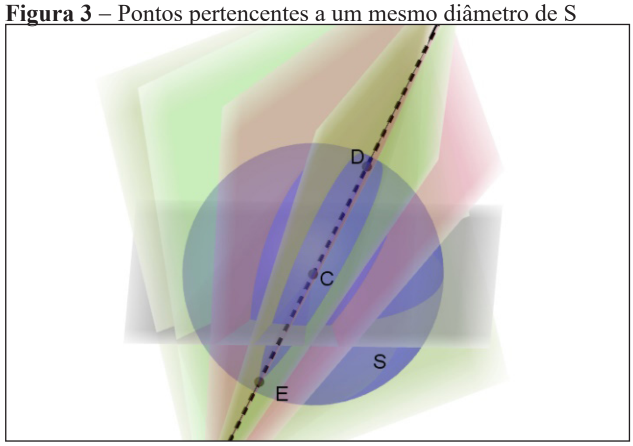
Figura 2 – Pontos não pertencentes a um mesmo diâmetro de S



Fonte: os autores.

Considere agora dois pontos D e E, extremidades de um diâmetro de S, como pode ser observadas na Figura 3. Nesse caso, tais pontos são chamados de antípodas da esfera.

Figura 3 – Pontos pertencentes a um mesmo diâmetro de S

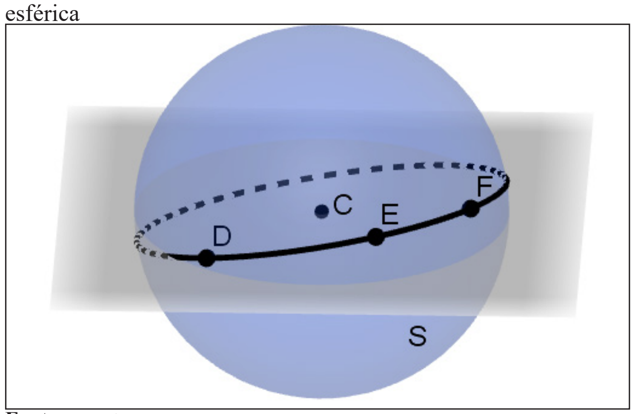


Fonte: os autores.

Como, na Geometria de Euclides, por três pontos colineares passa uma infinidade de planos, há uma quantidade infinita de círculos máximos que passam por D e E. Logo, neste caso, o axioma de incidência não é válido.

A segunda questão a investigar trata-se da validade de um axioma de ordem segundo o qual dados três pontos distintos de uma reta, um e apenas um deles encontra-se entre os outros dois (Barbosa, 2006). Na GE, este axioma não é assegurado como pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 – Inviabilidade da relação de ordem na superfície esférica



Fonte: os autores.

Note, na Figura 4, que dados três pontos de uma reta (círculo máximo), não é necessariamente verdade que um deles está entre os outros dois. De fato, tomando o ponto D como origem e caminhando no sentido anti-horário, o ponto E estará entre D e F. Porém, caminhando-se no sentido horário tem-se o ponto F entre D e E.

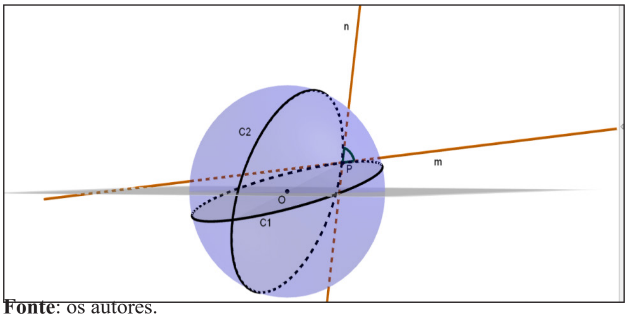
De acordo com Barbosa (2006), na geometria de Euclides, os pontos de uma reta podem ser colocados em correspondência biunívoca com os números reais de modo que a diferença entre esses números, em módulo, meça à distância entre os pontos correspondentes e vice-versa. Trata-se de um axioma relacionado à medição de comprimento de segmento de reta. Ele diz respeito à existência de uma "régua

4 A igualdade entre os raios ocorre se, e somente se, o centro de círculo coincidir com o centro da esfera.
5 Trata-se de um axioma da geometria euclidiana espacial.

infinita" que pode ser colocada em toda a reta e usada para medir a distância entre dois pontos quaisquer. Na GE, desde que o raio de uma esfera S seja igual a R, a maior distância possível entre dois pontos A e B é metade do comprimento do círculo máximo definido por esses pontos, ou seja, πR. Assim, na GE, o axioma da infinitude da régua não é satisfeito.

Segundo Silva (2015), o ângulo entre dois círculos máximos (retas da GE) é, por definição, o ângulo entre os planos euclidianos que os contêm. Ou, equivalentemente, é o ângulo formado pelas tangentes (euclidianas) aos círculos em qualquer um dos pontos de interseção entre eles[6] (Abreu, 2015). A figura 5 ilustra esta situação.

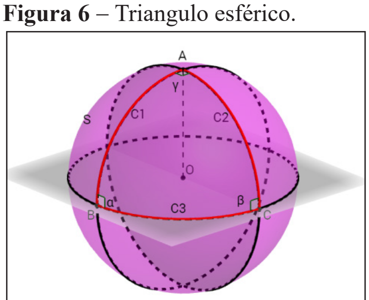
Figura 5 – Ângulo entre círculos máximos



Fonte: os autores.

Uma vez apresentada a noção de ângulo, podemos falar dos triângulos da GE. Segundo Abreu (2015, p.11), um triângulo esférico, ou seja, um triângulo na GE, é uma "superfície limitada por três arcos de circunferências máximas, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que uma semicircunferência máxima[7]". Na figura 6 é possível identificar um triângulo esférico.

Figura 6 – Triangulo esférico.



Fonte: Dados da pesquisa.

A Figura 6 apresenta um triangulo esférico de vértices A, B e C. Os seus lados estão contidos nos círculos máximos C_1, C_2 e C_3. Seus ângulos internos são denotados por α, β e γ, em que α e β são retos. De fato, segundo Lima et al. (2016), na geometria euclidiana especial, dois planos são perpendiculares se, e somente se, um deles possui uma reta perpendicular ao outro. Note que o raio AO da esfera S é também raio de C_1 e C_2. Além disso, AO é perpendicular ao plano que contém C_3, donde C_1 e C_2 são perpendiculares à C_3. Desta forma, α e β são ângulos retos. Como γ é não nulo, tem-se um triângulo esférico em que a soma das medidas dos ângulos internos é superior a cento e oitenta graus[8]. Ademais, o fato de os ângulos α e β serem retos implica na invalidação do teorema do ângulo externo[9].

4 Aspectos Metodológicos

Nesta pesquisa, de natureza qualitativa, buscou-se ter o ambiente natural dos participantes como fonte de dados. O pesquisador se constituiu como principal instrumento de coleta de informações na medida em que manteve constante aproximação dos participantes procurando compreender os fenômenos observados por meio "dos olhos dos pesquisados", como comumente ocorre no paradigma qualitativo de investigação (Goldenberg, 2004, p.27). De acordo com Chizzoti (2003, p.221), neste contexto "o termo qualitativo implica uma partilha densa com pessoas, fatos e locais que constituem objetos de pesquisa, para extrair desse convívio os significados visíveis e latentes que somente são perceptíveis a uma atenção sensível". Durante a pesquisa, investigador atuou como pesquisador-participante. Segundo Coutinho (2013, p.348), nesta forma de atuação, "o investigador acompanha todo o processo de perto numa interação constante com os participantes".

Quanto ao procedimento adotado, tem-se uma pesquisa de campo realizada em uma universidade pública do estado da Bahia. Seis estudantes do curso de licenciatura em matemática da universidade participaram da investigação. O número de participantes, porém, não representa um elemento central nas pesquisas qualitativas. Segundo Goldenberg (2004, p. 50), neste tipo de investigação "a quantidade é, então, substituída pela intensidade, pela imersão profunda que atinge níveis de compreensão que não [nem sempre] podem ser alcançados através de uma pesquisa quantitativa". Optou-se por estudantes em seu primeiro ano de curso por se tratar de discentes sem conhecimentos prévios sobre a GE, fato constatado a partir de diálogos entre o pesquisador e os participantes antes da realização da pesquisa.

Foram realizados três encontros no laboratório de informática do campus onde o curso de licenciatura em matemática é ofertado. Os dados foram coletados por meio de entrevistas semiestruturadas e de sequências didáticas que envolviam construções geométricas realizadas no GeoGebra. As respostas apresentadas constituem dados descritivos

6 Esta definição está "bem definida", no sentido de não depender de qualquer um dos pontos escolhidos. Ademais, as retas da GE sempre se interceptam, ou seja, não existem retas paralelas na GE (CARMO, 2005).

7 Alguns autores, a exemplo de Silva (2015), fazem uso da expressão "círculo máximo". Outros, como Abreu (2015), optam pela designação "circunferência máxima". Como ambas as expressões correspondem ao mesmo lugar geométrico, optou-se aqui por empregá-las como sinônimos.

8 Em todo triângulo esférico, a soma das medidas dos seus ângulos internos é superior à 180º (Silva, 2015).

9 Segundo Barbosa (2006), o teorema do ângulo externo assegura que a medida de qualquer ângulo externo de um triângulo é superior à medida de qualquer ângulo interno a ele não adjacente.

que foram analisados de forma indutiva. Cada participante realizou as atividades e construções individualmente.

No primeiro encontro foi aplicado um roteiro de introdução ao GeoGebra, tendo em vista que os participantes não tinham familiaridade com o software. O roteiro tinha como finalidade apresentar-lhes a janela de visualização 3D onde é possível construir figuras tridimensionais. O segundo e terceiro encontros foram destinados à resolução de uma sequência de atividades que teve como base construções geométricas envolvendo a superfície de uma esfera. As atividades contemplavam:

(i) As propriedades minimizantes dos círculos máximos: os participantes construíram diversos arcos ligando dois pontos dados na perspectiva de identificar o menor caminho que os une.
(ii) Uma investigação sobre a existência e unicidade da determinada por dois pontos quaisquer pré-fixados: inicialmente foram dados dois pontos antípodas e posteriormente realizou-se a análise para o caso em que os pontos indicados e o centro da esfera não eram colineares (numa perspectiva euclidiana).
(iii) O axioma de ordem: buscou-se investigar se, na GE, dados três colineares, um e apenas um deles, encontra-se entre os outros dois.
(iv) Paralelismo entre retas: foi solicitada aos participantes a construção de retas paralelas (o que é impossível na GE).

Estava prevista também a aplicação de atividades envolvendo uma investigação sobre a validade do teorema do ângulo externo e a soma das medidas dos ângulos internos em triângulos esféricos. Em virtude da indisponibilidade dos participantes ao final da pesquisa - em decorrência do acúmulo de atividades inerentes ao curso de graduação em que estavam matriculados - não foi possível realizar essas atividades.

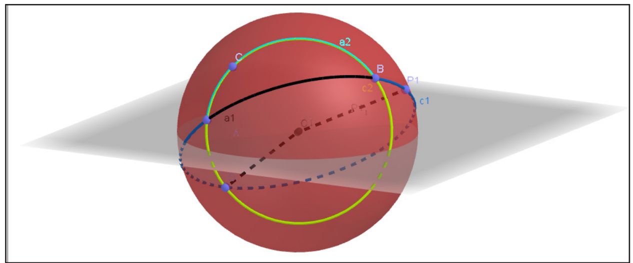
Além das sequências didáticas, foi adotado outro instrumento de coleta de dados: entrevistas semiestruturadas. De acordo com Goldenberg (2004), as entrevistas representam importantes instrumentos na coleta de dados, pois "as pessoas têm maior paciência e motivação para falar do que para escrever (p. 88)". Por meio delas, o investigador pode esclarecer informações coletadas, mas não necessariamente compreendidas por meio de outros instrumentos. As entrevistas contemplaram questões relacionadas às dificuldades e aos contributos da utilização do software GeoGebra no processo de aprendizagem da GE. Elas foram realizadas em horário à parte dos encontros, também na universidade.

5 Resultados e Discussão

Os seis participantes, referidos a partir de agora como P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6, revelaram que não tinham conhecimentos prévios acerca das GNE. A presente pesquisa permitiu-lhes o primeiro contato com um modelo de geometria diferente do euclidiano. Alguns resultados apresentados são exibidos a seguir.

Diante de dois pontos quaisquer A e B pertencentes à superfície de uma esfera, todos os participantes afirmaram, à luz das construções geométricas que realizaram, que o menor caminho que os une era um arco de círculo máximo. A Figura 7 apresenta as construções realizadas por P_1 no GeoGebra.

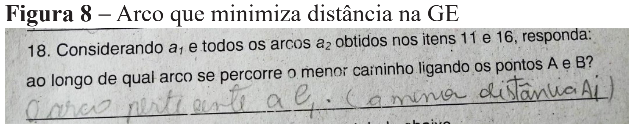
Figura 7 – Arcos que une dois pontos quaisquer A e B



Fonte: dados da pesquisa.

A Figura 7 diz respeito à construção de arcos ligando os pontos A e B. De acordo com a atividade, um deles, o arco a_1, deveria pertencer, se possível, a algum círculo máximo da esfera. O outro, a_2, deveria ser qualquer arco, diferente de a_1, que unisse os pontos dados. Foi solicitado aos participantes que anotassem os comprimentos dos arcos (exibidos na janela algébrica do GeoGebra) e que variassem o arco a_2 quantas vezes quisessem (sendo esse número maior ou igual a cinco). A partir daí eles deveriam identificar qual desses arcos possuía o menor comprimento. A resposta de P_1 é retratada na Figura 8.

Figura 8 – Arco que minimiza distância na GE


18. Considerando a_1 e todos os arcos a_2 obtidos nos itens 11 e 16, responda: ao longo de qual arco se percorre o menor caminho ligando os pontos A e B?

O arco pertencente a c_1. (a menor distância Ai)

Fonte: dados da pesquisa.

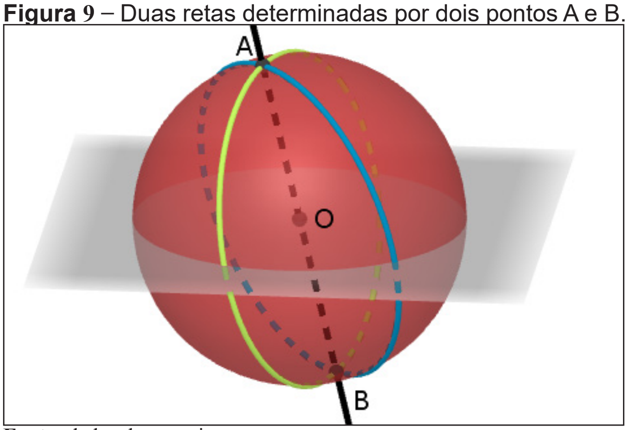
Conforme aparece na figura 8, o participante P_1 afirma que a menor distância é dada por a_1 e antes comenta que se trata de um arco pertence ao círculo c_1 (conferir também na Figura 7). Após a atividade, em entrevista, P_1 declarou que na GE "as retas seriam as circunferências que passam pelo centro da esfera, elas seriam circunferências com o raio igual ao da esfera. O segmento seria um arco que pertence à reta esférica". É possível perceber que P_1, assim como os outros participantes, obedeceu a uma lógica indutiva tendo em vista a impossibilidade de construir todos os arcos ligando A e B. A atividade permitiu-lhes criar uma conjectura[10] verdadeira. Esta atividade visava, em certa medida, ajudar os participantes a romperem com a ideia de reta no sentido euclidiano, o que não é uma simples tarefa conforme pontua Kaleff (2010).

Após identificarem as retas da GE, fazia sentido questiona-los sobre a existência e unicidade de uma reta que une dois pontos quaisquer. A existência havia sido identificada na atividade anterior. Quanto à unicidade, eles afirmaram que, em alguns casos, há uma infinidade de retas passando pelos dois pontos. Um desses casos é retratado na Figura 9 por meio

10 Não se pode dizer aqui que os participantes demonstraram que a curva minimizante era um arco de círculo máximo, mas é possível afirmar que eles conjecturaram a esse respeito.

de construções geométricas apresentadas por P_4.

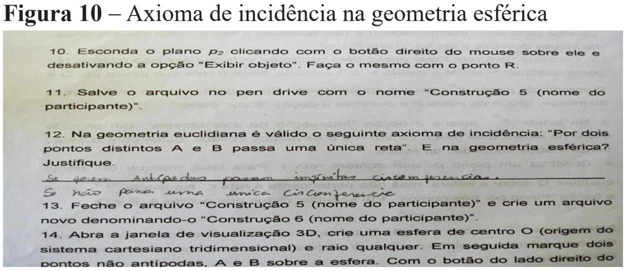
Figura 9 – Duas retas determinadas por dois pontos A e B.



Fonte: dados da pesquisa.

Apesar de construir apenas duas retas passando pelos pontos antípodas A e B, P_4 menciona, na atividade, que “pode passar infinitas retas” por esses dois pontos. O participante P_2 vai um pouco além ao afirmar que passam infinitas “circunferências” se os pontos forem antípodas e que caso contrário haverá apenas uma[11]. A figura 10 apresenta a sua resposta.

Figura 10 – Axioma de incidência na geometria esférica



10. Esconda o plano p_2 clicando com o botão direito do mouse sobre ele e desativando a opção “Exibir objeto”. Faça o mesmo com o ponto R.

11. Salve o arquivo no pen drive com o nome “Construção 5 (nome do participante)”.

12. Na geometria euclidiana é válido o seguinte axioma de incidência: “Por dois pontos distintos A e B passa uma única reta”. E na geometria esférica? Justifique.

Se forem Antípodas passam infinitas circunferências.

Se não passa uma única circunferencia

13. Feche o arquivo “Construção 5 (nome do participante)” e crie um arquivo novo denominando-o “Construção 6 (nome do participante)”.

14. Abra a janela de visualização 3D, crie uma esfera de centro O (origem do sistema cartesiano tridimensional) e raio qualquer. Em seguida marque dois pontos não antípodas, A e B sobre a esfera. Com o botão do lado direito do

Fonte: dados da pesquisa.

Nesta etapa da sequência didática, buscava-se investigar a validade do axioma de incidência na GE, conforme pode ser constatado na figura 10. Quatro participantes conseguiram explicar que tal postulado é válido quando os pontos não são antípodas. Quando os pontos são antípodas haverá uma infinidade de retas esféricas. Esse último fato foi constatado pelos seis participantes.

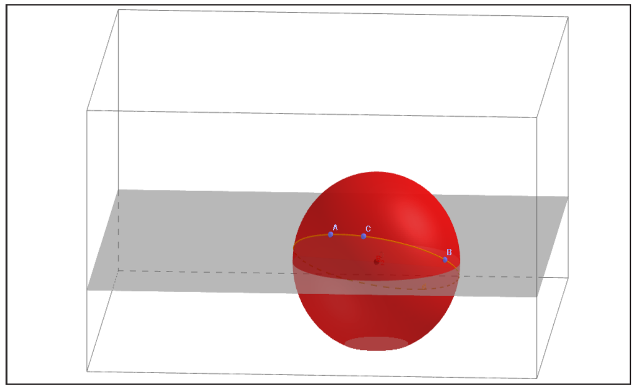
No que diz respeito à utilização do GeoGebra no estudo da validade do axioma de incidência na GE, os participantes aprovaram a utilização do software:

> P_3: Quando os pontos são antípodas passam infinitas retas. Pelo GeoGebra foi possível comprovar isso, a gente fez a construção, fez duas ou três retas e vi que por aquele ponto não passava apenas uma, mas infinitas. Foi pelo GeoGebra que consegui chegar a essa conclusão.
> P_2: Como lá posso mover as coisas dava pra entender melhor, se não tivesse o GeoGebra teria que visualizar de outra maneira, aí seria uma forma muito mais difícil no entendimento do assunto.

Os relatos dos participantes estão de acordo com os estudos de Murari (2011). De acordo com este autor, a utilização de softwares de geometria dinâmica pode contribuir para o ensino, pois é possível efetuar explorações e construções com recursos de arrastar, movimentar e animar.

Para fazer inferências sobre a validade do axioma de ordem na GE, os participantes marcaram três pontos quaisquer, A, B e C, sobre uma superfície esférica. A construção de um deles, P_4, aparece na Figura 11.

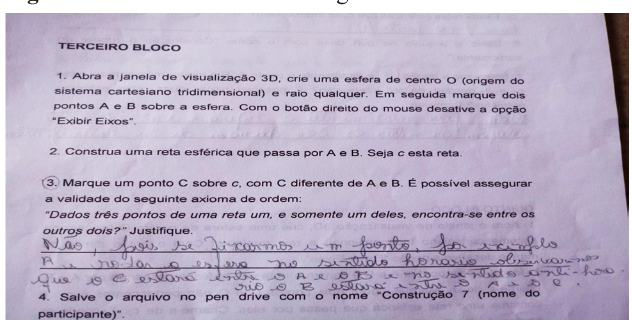
Figura 11 – Três pontos colineares



Fonte: dados da pesquisa.

O axioma investigado assegura que dados três pontos colineares um, e apenas um deles, está entre os outros dois. A partir da construção geométrica presente na Figura 11, P_4 mencionou que a depender da direção em que se caminha sobre o círculo, o ponto que está entre os outros dois varia. A sua resposta aparece na figura 12.

Figura 12 – Axioma de ordem na geometria esférica



TERCEIRO BLOCO

1. Abra a janela de visualização 3D, crie uma esfera de centro O (origem do sistema cartesiano tridimensional) e raio qualquer. Em seguida marque dois pontos A e B sobre a esfera. Com o botão direito do mouse desative a opção “Exibir Eixos”.

2. Construa uma reta esférica que passa por A e B. Seja *c* esta reta.

3. Marque um ponto C sobre *c*, com C diferente de A e B. É possível assegurar a validade do seguinte axioma de ordem:
“Dados três pontos de uma reta um, e somente um deles, encontra-se entre os outros dois?” Justifique.

Não, pois se fixarmos um ponto, por exemplo A e rodar a esfera no sentido horario observamos que o C estará entre o A e o B e no sentido anti-horario o B estará entre o A e o C.

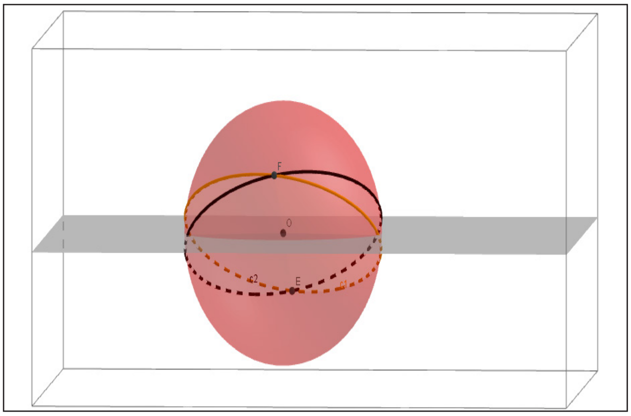
4. Salve o arquivo no pen drive com o nome “Construção 7 (nome do participante)”.

Fonte: dados da pesquisa.

Assim como P_4, os outros participantes concluíram a não validade do axioma de ordem na GE. Outro resultado não contemplado nessa geometria não euclidiana é a existência de retas paralelas. Todos os participantes perceberam esse fato. Eles relataram que quaisquer dois grandes círculos c_1 e c_2 sempre se interceptam em dois pontos distintos. Esse fato pode ser visualizado na Figura 13 onde aparece a construção geométrica realizada por P_2.

11 Por circunferência, o participante quis dizer “circunferência máxima”. De fato, todas as circunferências criadas por ele tinham centro coincidindo com o centro da esfera.

Figura 13 – Interseção entre retas esféricas



Fonte: dados da pesquisa.

Além de afirmar que duas retas da GE sempre se interceptam, P_2 afirmou que elas o fazem "em 2 pontos os quais são antípodas". Para chegar ao fato de que as retas da GE são sempre concorrentes, os participantes construíram várias retas, mas sempre obtiveram os mesmos resultados. Mais uma vez produziram uma conjectura e não uma demonstração, no sentido já mencionado neste texto.

No que diz respeito às dificuldades encontradas ao longo das atividades, P_3 destacou as ideias arraigadas da geometria de Euclides, único tipo de geometria conhecido por eles até a realização da pesquisa. De acordo com este participante,

> A gente só vê a geometria euclidiana, não vê outros tipos de geometria. E quando a gente tem um contato com algo que já viu a gente tenta usar nossos conhecimentos, e aqui não, às vezes a gente fica resistente a enxergar o que está acontecendo por já ter outros conhecimentos diferentes do que está acontecendo.

As considerações apresentadas por P_3 já haviam sido sinalizadas por Kaleff (2010). De acordo com esta autora, na própria história das geometrias os estudiosos tiveram dificuldades de passar das concepções euclidianas para as abstrações não euclidianas. A tradição escolar centrada na geometria de Euclides, assinalada por Ribeiro (2012), acarreta, como mencionado por P_3, numa resistência estudantil quanto à aquisição de conhecimentos provenientes de outros modelos geométricos.

Quanto à realização das atividades no GeoGebra, os participantes demonstraram certa satisfação. Os comentários de dois deles, P_2 e P_4, são transcritos abaixo:

> P_2: Por usar uma ferramenta prática fica mais lúdico. Não fica aquilo apenas de conteúdo que tem que gravar, porque não é gravar: você pode ver, e assim você pode construir conhecimento. E quando você constrói aquilo fica pra você.
> P_4: Achei a atividade bem construtiva pelo fato de ter a parte prática e teórica, mostrando o assunto como também como fazer. Muitas vezes conseguimos imaginar como fazer, mas fica difícil visualizar e quando a gente vê como acontece, a parte teórica fica mais fácil de entender.

Os relatos acima estão em consonância com Camargo (2012) que aponta ser possível estabelecer uma conexão entre sequências didáticas e ambientes computacionais na apresentação de conceitos das GNE.

6 Conclusão

Por meio de construções geométricas realizadas no GeoGebra os participantes perceberam que, na GE, por dois pontos distintos passa uma única reta se, e somente se, os pontos não são antípodas. Além disso, eles constataram a inexistência de retas paralelas e descobriram que nesse tipo de GNE dados três pontos colineares não é possível afirmar que um, e somente um deles, encontra-se entre os outros dois.

A pesquisa ajudou-lhes a romper com o absolutismo da geometria euclidiana na medida em que acessaram outro modelo geométrico. Contudo, conforme destacado por um deles, a formação euclidiana impõe-lhes, em certos casos, dificuldades para conceber estruturas geométricas que não preservam as características euclidianas. Por trás disso encontra-se uma tradição escolar em que a geometria é pautada quase que exclusivamente em paradigmas euclidianos. No meio acadêmico a realidade não é diferente conforme assinalado por Assis (2017).

Vale ressaltar que as atividades foram desenvolvidas com o intuito de aproximar os participantes de alguns resultados da GE a partir de construções e explorações geométricas. Alguns resultados já demonstrados na literatura, foram constatados na pesquisa na forma de conjectura. O reconhecimento da propriedade minimizante dos grandes círculos e a inexistência de paralelismo entre retas são alguns exemplos. Esses fatos foram percebidos pelos participantes de forma indutiva. Ao final da pesquisa, o investigador fez os devidos esclarecimentos: apesar da sequência didática envolver a manipulação de alguns exemplos, esses resultados são sempre verificados na GE.

No que diz respeito ao uso do GeoGebra, houve aceitabilidade por parte dos participantes. De acordo com eles, a partir das construções e movimentações, foi possível comprovar alguns resultados da GE como a não validade do axioma de incidência. Ademais, eles destacaram a facilitação da aprendizagem através da visualização dos entes geométricos e a exploração das possibilidades por meio de recursos de arrastar.

A presente pesquisa pode ajudar a ampliar as discussões acerca do processo de aprendizagem da GE por meio de softwares de geometria dinâmica. Neste sentido, parece razoável considerar a sua continuidade a partir da aplicação de sequências didáticas que envolvam assuntos não contemplados aqui como o teorema do ângulo externo e a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, ambos citados ao longo do texto. Além disso, em pesquisas futuras, pode-se buscar dar conta das aplicabilidades da GE no mundo real, fato não observado nas sequências didáticas brevemente apresentadas neste estudo.

Referências

Abreu, S.M. (2015). Geometria esférica e trigonometria esférica aplicadas à astronomia de posição. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. São João del-Rei: Universidade Federal de São João del-Rei.

Assis, E.S. (2017). A Geometria Hiperbólica nos currículos escolares e universitários. Educação Matemática Pesquisa, 19(3), 393-413.

Barbosa, J.L.M. (2006). Geometria Euclidiana Plana**.** Rio de Janeiro: SBM.

Barbosa, J. L.M. (2008). Geometria Hiperbólica. Fortaleza: Impa.

Bonete, I.P. (2000). As Geometrias não-euclidianas em cursos de Licenciatura: algumas experiências. Dissertação de Mestrado. Guarapuava: Universidade de Campinas/ Universidade Estadual do Centro-Oeste.

Brasil. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília: MEC/ SEB.

Brasil. (1998). Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino Fundamental. Apresentação dos temas transversais/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2002). Parâmetros Curriculares Nacionais+ (PCN+): Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC.

Brum W. P., & Schuhmacher E. Aprendizagem de Conceitos de Geometria Esférica e Hiperbólica no Ensino Médio sob a perspectiva da teoria da aprendizagem significativa usando uma sequência didática. Alexandria, 7(1), 127-156.

Brum, W.P., Schuhmacher, E., & Silva, S.R.S (2015). As Geometrias Esférica e Hiperbólica em foco: sobre a apresentação de alguns de seus conceitos elementares a estudantes do Ensino Médio. Bolema, 29(51), 419-427.

Caldatto, M.E. (2011). O processo coletivo de elaboração das diretrizes curriculares para a educação básica do Paraná e a inserção das geometrias não euclidianas. Dissertação de Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

Caldatto, M.E., & Pavanello, R.M. (2014). O processo de inserção das geometrias não euclidianas no currículo da escola paranaense: a visão dos professores participantes. Bolema, 28(48), 42-63.

Camargo, K.C.A. (2012). A expressão gráfica e o ensino de geometrias não euclidianas. Dissertação. Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática). Curitiba: Universidade Federal do Paraná.

Carmo, M.P. (2005). Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies. Rio de Janeiro: SBM.

Carvalho, M.A.S., & Tucci, A.M.F.C. (2011). O ensino da geometria não euclidiana na educação básica. In XII Conferência Interamericana de Educação Matemática.

Chizzoti, A. (2003). A pesquisa qualitativa em ciências humanas e sociais: evolução e desafios. Revista Portuguesa de Educação, 16(2), 221-236.

Coutinho, L. (2001). Convite às Geometrias Não Euclidianas. Rio de Janeiro: Interciência.

Coutinho, C.P. (2013). Metodologia de investigação em ciências sociais e humanas: teoria e prática. Coimbra: Almedina.

Dueli, L.J. Geometria Esférica: propostas de sequências didáticas interdisciplinares. 2013. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora.

Eves, H. (2004). Introdução à História da Matemática. Campinas: Editora Unicamp.

Goldenberg, M. (2004). A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: ABDR.

Kaleff, A.M.M.R. (2010). Geometrias não-euclidianas na educação básica: utopia ou possibilidade?. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática.

Leivas, J.C.P. Geometrias não euclidianas: ainda desconhecidas por muitos. Educação Matemática Pesquisa, 15(3), 647-670.

Lima, E.L., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., & Morgado, A.C. (2016). A matemática do ensino médio. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM.

Murari, C. Experienciando materiais manipulativos para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Bolema, 25(41), 187-211.

Paraná (2008). Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática. Curitiba: Superintendência de Educação.

Prestes, I.C.R. (2006). Geometria esférica: uma conexão com a geografia. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

Ribeiro, R.D.G.L. (2012). O ensino das geometrias não euclidianas: um olhar sob a perspectiva da divulgação científica. Dissertação de Mestrado em Educação. São Paulo: Universidade de São Paulo.

Santos, S.C. (2006). A produção matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial. Rio Claro: Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista.

Santos, T.S. (2009). A inclusão das Geometrias Não-Euclidianas no Currículo da Educação Básica. Dissertação de Mestrado em Educação para a Ciência e Matemática. Maringá: Universidade Estadual de Maringá.

Silva, W. D. (2015). Uma introdução à Geometria Esférica. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Uchôa, F.J.S. (2018). A geometria esférica e a distância entre dois pontos do globo na perspectiva do GeoGebra. Dissertação do Mestrado Profissional em Matemática. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará.