

# Currículo Prescrito para o Ensino de Frações no Ensino Fundamental

## Prescribed Curriculum for Teaching Fractions in Elementary School

Maria de Fátima Rico Abade Lima<sup>a</sup>; Angélica da Fontoura Garcia Silva<sup>\*a</sup>

<sup>a</sup>Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação Matemática. SP, Brasil

\*E-mail: [angelicafontoura@gmail.com](mailto:angelicafontoura@gmail.com)

---

### Resumo

Este artigo apresenta resultados de uma investigação interpretativa que, apoiada em Sacristan, analisa o currículo prescrito para ensinar os significados da representação fracionária dos Números Racionais no Ensino Fundamental. Para tanto, foi realizada uma pesquisa bibliográfica acerca de estudos da área que discutem a temática e uma pesquisa documental das orientações curriculares brasileiras – Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – e Base Nacional Comum Curricular – BNCC – para o ensino de frações no Ensino Fundamental. A partir da análise do currículo prescrito, foi possível identificar, tanto nos PCN como na BNCC, que o estudo sobre fração inicia-se desde muito cedo na vida escolar dos alunos, continuando em toda a educação básica. Nos objetivos e habilidades propostos nos PCN, no eixo Números, nota-se que a introdução da fração ocorre no 2º ciclo, com os significados: quociente, parte – todo e razão, no 3º Ciclo esses significados são retomados e acrescidos da ideia de operador. Já na BNCC, é prevista o desenvolvimento de habilidades envolvendo os significados da fração a partir do 5º Ano relacionando, sobretudo a ideia de parte-todo. No 6º Ano é acrescido o significado quociente, no 7º Ano, além do significado parte-todo e quociente são propostas habilidades envolvendo o conceito de operador e razão. Já nos demais Anos/ Ciclos tratados nos dois documentos não encontramos nenhuma outra referência aos significados da fração.

**Palavras-chave:** Educação Matemática. Parâmetros Curriculares Nacionais. Base Nacional Comum Curricular. Ensino de Frações. Ensino Fundamental.

### Abstract

*This article presents results of an interpretative investigation that, supported by Sacristan, analyzes the prescribed curriculum to teach the meanings of fractional representation of Rational Numbers in Elementary Education. For this purpose, a bibliographic research was carried out on studies in the area that discuss the theme and a documentary research of the Brazilian curricular guidelines - National Curriculum Parameters - PCN - and Common National Curricular Base - BNCC - for the teaching of fractions in Elementary Education. From the analysis of the prescribed curriculum, it was possible to identify, both in the PCN and in the BNCC, that the study on fraction starts very early in the students' school life, continuing throughout basic education. In the objectives and skills proposed in the PCN, in the Numbers axis, it is noted that the introduction of the fraction occurs in the 2nd cycle, with the meanings: quotient, part - whole and reason, in the 3rd Cycle these meanings are taken up and added to the idea of operator. At BNCC, the development of skills involving the meanings of the fraction is expected from the 5th year on, relating, above all, the idea of part-whole. In the 6th year, the quotient meaning is added, in the 7th year, in addition to the part-whole and quotient meaning, skills are proposed involving the concept of operator and reason. In the other Years / Cycles dealt with in the two documents, we found no other reference to the meanings of the fraction.*

**Keywords:** *Mathematical Education. National Curriculum Parameters. Common National Curricular Base. Teaching Fractions. Elementary School.*

---

### 1 Introdução

Desde a década de 80, estudos como o de Behr, Lesh, Post & Silver (1983) afirmam ser a fração<sup>1</sup> uma das ideias matemáticas mais importantes e complexas. No entanto, seu ensino parece ser desafiador, uma vez que os processos de ensino e de aprendizagem não vêm ocorrendo como deveriam. Pesquisas nacionais e internacionais têm apontado dificuldades de alunos e professores para lidar com esse assunto (Behr et al., 1983; Charalambous e Pitta-Pantaz, 2005;

Damico, 2007; Garcia Silva, 2007; Canova, 2013; Pinheiro, 2014; Garcia Silva, A., Canova, R., & Pinheiro, 2019).

Aliado a isso, ressaltamos o importante papel exercido pelo professor nos processos de ensino e aprendizagem dessa temática e, nesse contexto, concordamos com Ball, Thames e Phelps (2008) quando afirmam que, dentre os conhecimentos necessários ao ensino da Matemática, o Conhecimento Curricular sobre o conteúdo a ser ensinado é uma categoria importante a ser observada. Considerando tal

---

<sup>1</sup> Neste artigo, utilizaremos o termo fração para designar a representação fracionária de número racional e o relacionaremos ao que Kieren (1993) conceitua como o número formado por dois números inteiros representado por  $a/b$  e  $b \neq 0$ .

relevância, interpretamos nesta investigação o que propõem as orientações curriculares federais dos últimos 23 anos para o Ensino Fundamental à luz de resultados de pesquisa.

Assim, as questões que perpassam esta investigação dizem respeito (1) ao que as pesquisas apontam sobre o ensino e a aprendizagem dos diferentes significados das frações no Ensino Fundamental e (2) a quais são os pressupostos presentes em orientações curriculares brasileiras – Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (Brasil, 1997, 1998) e Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (Brasil, 2018) para o ensino dos significados de frações no Ensino Fundamental.

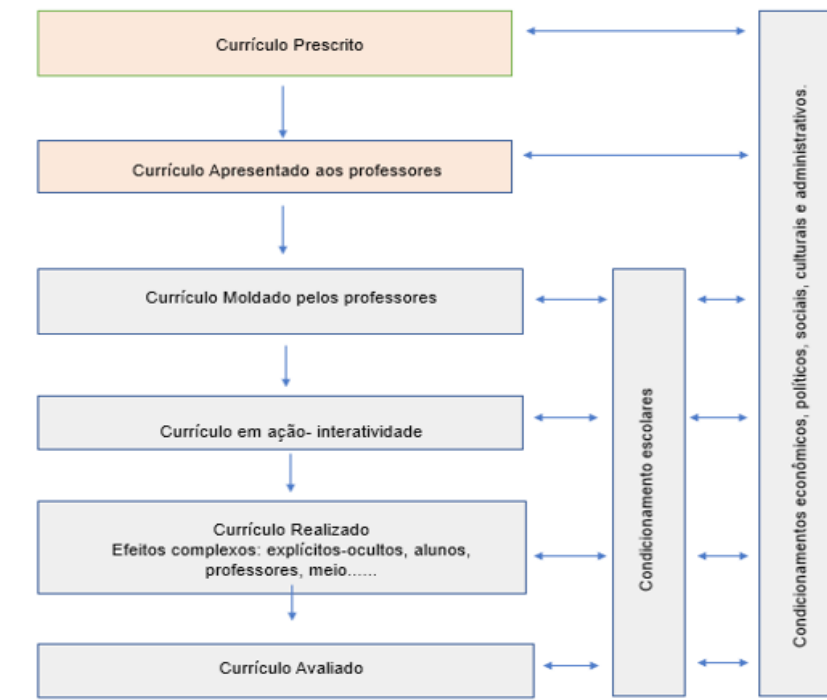
Dessa forma, para delimitar nossa problemática de estudo, de caráter bibliográfico-documental, a seguir, aprofundamos nossas discussões acerca da fundamentação teórica, da relevância para depois expormos a metodologia de pesquisa. A discussão e a interpretação dos dados são feitas à luz de investigações da área no próximo item para, ao final, tecermos nossas considerações sobre a pesquisa realizada.

## 2 Fundamentação Teórica e Relevância do Estudo

Para analisarmos os documentos curriculares, buscamos estudos que nos ajudassem a compreender as dimensões do currículo e que nos mostrassem resultados de pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem das frações.

Da mesma forma que Sacristán (2020), consideramos o currículo como um processo que envolve uma confluência de práticas que pressupõe diversos âmbitos que vão além da prescrição de órgãos oficiais como o Ministério da Educação e Cultura (MEC), por exemplo, – *Currículo Prescrito* – passa pelo currículo traduzido, o qual é apresentado ao professor – *Currículo Apresentado* – e pela forma como o professor e a escola interpretam tais prescrições – *Currículo Moldado*, *Em Ação e Realizado* – e também pela forma como ele é avaliado, seja internamente pela a escola ou por meio de avaliações externas – *Currículo Avaliado* –. Sacristan (2020) representa esse processo no esquema a seguir:

**Figura 1 - A objetivação do Currículo no processo de desenvolvimento**



Fonte: Sacristan (2020, p.105).

Para discutir as indicações curriculares, utilizamos as ideias de Sacristán (2020) sobre o *Currículo Prescrito*. Analisaremos como *prescritos* os documentos oficiais de ordem federal: os PCN (Brasil, 1997) e a BNCC (Brasil, 2018).

Reiteramos que, assim como Sacristan (2020), consideramos que o currículo precisa ser compreendido como um processo que envolve uma multiplicidade de relações, abertas ou tácitas, em diversos âmbitos, que vão da prescrição à ação, das decisões administrativas às práticas pedagógicas, na escola como instituição e nas unidades escolares em específico. Todavia, nesta investigação, analisaremos somente

uma dessas dimensões, que consideramos poder fundamentar a ação docente para ensinar Matemática e, no caso deste estudo, quando ensinar ideias relativas à fração.

### 2.1 O que as Pesquisas Apontam a Respeito dos Processos de Ensino e de Aprendizagem das Frações

Para discutir as investigações que tratam dos processos de aprendizagem da fração, procuramos analisar, inicialmente, o que as pesquisas apontam sobre a construção de um conceito qualquer e, a partir de tais ideias, buscamos referências da construção do conceito de fração. Com fundamento nos estudos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud

(1993), procuramos compreender como acontece a construção do conhecimento. O autor, apoiado em Piaget, considera que essa construção não ocorre de forma imediata e que ela se dá por meio de resoluções de situações-problema que lhe darão sentido ao conceito.

Além disso, esse estudo nos mostra que tal processo pressupõe favorecer aos aprendizes possibilidades de lidar com o conceito a ser construído dentro de um conjunto de situações – S – e ainda considera que cada situação traz consigo uma variedade de conceitos. Além das situações, Vergnaud (1993) considera que conceito é definido por outros dois conjuntos: I – invariantes, nos quais repousa a operacionalidade do conceito (objetos, propriedades, relações); R – representações (simbólicas, linguísticas, gestuais, ...), que podem ser usadas para representar simbolicamente invariante, situações e procedimentos. Nesse contexto, consideramos que o conceito é construído a partir da terna  $C = (S, R, I)$ .

No tocante às situações, a pesquisadora portuguesa Ema Mamede (2011) discute questões relacionadas à aprendizagem

de frações e faz um levantamento de pesquisas desenvolvidas desde os anos 70. A autora descreve as interpretações dos significados (ou subconstrutos) de diversos pesquisadores. A seguir expomos uma síntese dos significados (Quadro 1) propostos pelos autores investigados por Mamede (2011).

**Quadro 1** - Significados das frações identificados por diversos pesquisadores

<b>Kieren (1983,1995)</b>	<b>Behr et al. (1992)</b>	<b>Marshall (1993)</b>	<b>Nunes et al (2004)</b>
- Quociente - Medida, - Parte-todo - Operador - Razão	- Quociente - Parte -Todo - Operador - Razão - Medida	- Quociente - Parte – todo - Operador - Razão - Medida	- Quociente - Parte – todo - Operador - Qt. Intensivas

Fonte: Baseado em Mamede (2011)

Da mesma forma que Mamede (2011), a investigação apresentada por Cavalcanti e Guimarães (2008), apoiada em Kieran (1976, 1988); Nunes (2003), entre outros, apresenta a definição e um exemplo de sete significados. O Quadro 2 mostra tal categorização.

**Quadro 2** - Os significados de fração e as respectivas definições interpretados por Cavalcanti e Guimarães (2008)

<b>Significado</b>	<b>Definição</b>	<b>Exemplo</b>
Parte/Todo	Partição de um todo em N partes iguais, em que cada parte pode ser representada como $1/n$ .	Uma jarra com suco foi dividida entre 3 copos. Que fração representa o que ele bebeu da jarra?
Quociente	A fração indica uma divisão e seu resultado. Nas situações de quociente, temos duas variáveis, sendo que uma corresponde ao numerador e a outra ao denominador.	Em uma festa, foram distribuídos 2 bolos para 6 crianças, igualmente. Quanto cada uma vai receber?
Operador	A fração é um valor escalar aplicado a uma quantidade, ou seja, um multiplicador da quantidade indicada.	De uma jarra contendo 900 ml de suco, Pedro bebeu $1/3$ do líquido. Quantos mililitros ele bebeu?
Razão	A fração refere-se a quantidades intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.	Para fazer um suco de laranja, eu misturo numa jarra 2 copos de água para 1 de concentrado. Que fração de concentrado eu tenho na jarra?

Fonte: Cavalcante e Guimarães (2008, p.300).

Analisando essa diversidade de classificações, sob o ponto de vista dos processos de ensino e de aprendizagem da fração, concordamos com Mamede (2011, p.3) quando a autora afirma que mais importante do que distinguir todas as situações existentes é “garantir que qualquer que seja a classificação seguida, sejam proporcionadas aos alunos oportunidades para explorar frações em todas as suas vertentes”. Segundo Mamede (2011), depois de fazer um levantamento das interpretações dadas às frações por diferentes autores, os pesquisadores por ela analisados são unânimes em afirmar que “o conceito de frações só está totalmente adquirido quando o aluno domina o conceito em todas as interpretações ou significados de fração, e é capaz de traduzir, raciocinar e resolver problemas nas diferentes interpretações [ou significados]” (Mamede, 2011, p.3). Tais observações também são identificadas na pesquisa de assim como Cavalcanti e Guimarães (2008).

As conclusões de Quaresma e Ponte (2012) também vão na mesma direção. Esses autores portugueses procuraram analisar de que forma uma abordagem investigativa que

discute acerca das diferentes representações de número racional, nos diferentes significados, podem contribuir para que estudantes do 5º Ano compreendam a ordenação e comparação de números racionais. Esse estudo investigou o desempenho de uma aluna do 5º ano e conclui que ela melhorou a sua compreensão do conjunto numérico por meio de suas representações. Além disso, passou a entender melhor também, comparação e ordenação, desses números utilizando -se, sobretudo a representação decimal e da reta numérica. Portanto, temos aqui mais um argumento para justificar a relevância de analisar quais seriam esses significados e como seria proposto o desenvolvimento deles nos documentos curriculares – *Currículo Prescrito* – Após discutir a importância do estudo dessa temática, expomos, a seguir, os procedimentos utilizados nesta investigação.

### 3 Procedimentos Metodológicos

Esta investigação, de natureza qualitativa, apresenta características de pesquisa bibliográfica e documental da forma como descreve Gil (2002). Para o autor, a pesquisa

bibliográfica analisa materiais elaborados que “não receberam um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa”. No nosso caso, analisamos documentos oficiais que referenciam o ensino brasileiro – PCN (Brasil, 1997, 1998) e BNCC (Brasil, 2018) – e procuramos relacioná-los com outras pesquisas, por isso documental (Gil, 2002).

Com o propósito de investigar interpretativamente o *Currículo Prescrito* para a introdução do ensino dos significados da representação fracionária dos Números Racionais no Ensino Fundamental, no eixo temático Números, além de analisar comparativamente as indicações dos dois documentos, procuramos identificar aproximações e distanciamentos deles com resultados de pesquisa.

#### **4 Currículo Prescrito: o que os Documentos Curriculares Dizem a Respeito dos Processos de Ensino e de Aprendizagem das Frações**

Para expor o conteúdo fração presente nos documentos oficiais- PCN (Brasil, 1997, 1998) e BNCC (Brasil, 2018), analisamos dentro desses documentos, na disciplina de Matemática, o conteúdo de números racionais na representação fracionária e tudo aquilo que é relatado sobre o assunto. Nos PCN, a análise foi feita nos dois ciclos do Ensino Fundamental e dentro de cada ciclo tudo o que tratava da representação fracionária dos números racionais. Em relação à Base Nacional Curricular Comum, além da análise de um estudo sobre os pressupostos que embasam o documento, buscamos relação das habilidades descritas para cada ano referente ao estudo de fração.

#### **4.1 Os Documentos Oficiais**

##### **4.1.1 Os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Frações**

Para analisar o enfoque que documentos curriculares oficiais dão à questão do ensino e/ou aprendizagem da fração, tomamos como referência os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997 e 1998), os quais foram redigidos no final dos anos 90. O primeiro deles (Brasil, 1997) descreve orientações para a realização do ensino nos os anos iniciais do Ensino Fundamental; o segundo (Brasil, 1998) foca tais indicações para os anos finais desse mesmo segmento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997, p.16) constituem um “referencial de qualidade para a educação no Ensino Fundamental em todo o País”. Configuram uma proposta flexível, não se atendo a um modelo curricular homogêneo e impositivo, respeitando a autonomia garantindo e respeitando as diversidades culturais, regionais, étnicas, religiosas e políticas.

Na área de Matemática, os PCN estão pautados em princípios decorrentes de estudos, pesquisas e práticas e trazem como principais características abstração, precisão, rigor lógico, caráter irrefutável de suas conclusões, bem como o extenso campo de suas aplicações.

Os PCN dividem a Matemática em blocos de conteúdo: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas, tratamento da informação.

#### **4.1.2 PCN dos Anos Iniciais**

Em relação ao Ciclo 1- que hoje corresponde a 1º, 2º e 3º dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental –, os PCN (Brasil, 1997) estabelecem relações que se aproximam de alguns conceitos, descobrem procedimentos e desenvolvem atitudes. Os conhecimentos das crianças estão associados a uma forma articulada, de modo que elas terão melhores condições de aprender os significados dos diferentes conteúdos, e o trabalho do professor é fazer a integração desses conteúdos com o propósito de atingir os objetivos necessários à aprendizagem dos alunos.

Os PCN (Brasil, 1997) do Ciclo 1, numa primeira leitura, parecem não descrever no conteúdo qualquer conceito sobre fração, uma vez que propõem, na subseção avaliação, que o foco deve estar relacionado aos números naturais e, sobretudo, adição e subtração: “Ao finalizar este ciclo, os diferentes significados das operações não estão consolidados; por isso, os problemas devem abordar os significados que já foram apropriados pelos alunos, priorizando as situações de adição e subtração” (Brasil, 1997, p.53). Todavia, é previsto o trabalho com a ideia de metade quando se propõe que se desenvolvam propostas com os estudantes de 7 e 8 anos de idade que lhes permitam a comparação entre números e observem “regras de seriações (mais 1, mais 2, dobro e metade)” (Brasil, 1997, p.50). Analisando o que está indicado nesse documento, observamos aproximações com pesquisas como a de Spinillo (1992), na qual se afirmam que o uso da ideia de metade como referencial favorece à criança o desenvolvimento de habilidades que lhe possibilitem fazer julgamentos como “mais que metade”, “menos que metade” e “igual a metade” e ampliam sua capacidade de comparação de dimensões complementares nas relações de primeira ordem (parte-parte).

No 2º Ciclo – 4º e 5º dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a construção do número racional está presente, tanto como forma fracionária como decimal. Na subseção em que o documento apresenta os “conteúdos conceituais e procedimentais”, os PCN realçam os significados, os conceitos e as operações dos números fracionários:

- Leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequente.
- Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária.
- Identificação e produção de frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas.
- Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte/todo, quociente e razão.
- Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional (Brasil, 1997, p.55).

Tal realce também é observado nos objetivos indicados para o ensino da Matemática para o 2º ciclo. Nesse documento,

observamos que, dentre os objetivos descritos para o ensino desse ciclo, temos o de “Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social” (Brasil, 1997, p.55) e “resolver problemas, consolidando alguns significados das operações fundamentais e construindo novos, em situações que envolvam números naturais e, em alguns casos, racionais” (ibidem, p.56). Nesse contexto, observa-se que o documento explicita a necessidade de se introduzir o estudo de frações a partir do 2º ciclo (crianças de 9 e 10 anos de idade) a partir da proposição de situações contextualizadas e que envolvam diferentes significados.

Ao final do 1º e 2º ciclo – Anos Iniciais, temos observase um trabalho com os significados parte – todo, quociente e razão, três dos sete significados propostos por Cavalcante e Guimarães (2008). Mamede (2001), como visto anteriormente, investigou vários teóricos, como Kieren (1983,1995); Behr et al. (1992); Marshall (1993); Nunes et al. (2004), que classificaram os significados da fração de maneiras diferentes, mas, para a autora, o mais importante é criar oportunidades de explorar todas as vertentes a fim de que o domínio da fração ocorra após conceituar todas as interpretações, estudo conectado ao terna (S-R-I) de Vergnaud (1992).

Além dessas indicações os PCN (Brasil, 1997, p. 66) apresentam orientações didáticas aos professores. O documento chama a atenção desses profissionais, também, para quatro obstáculos que alunos desse segmento de ensino, encontram quando raciocinam sobre as frações como se fossem números naturais, quais sejam, o fato de o aluno: (1) estar acostumado com um único símbolo para representar o número natural e precisar compreender que os números racionais podem “ser representados por diferentes (e infinitas) escritas”; (2) a relação de ordem válida para os naturais não é a mesma para os racionais (por exemplo,  $5 > 3$  já  $1/5 < 1/3$ ); (3) a concepção implícita criada com os números naturais que “a multiplicação sempre aumenta” e “divisão sempre diminui” que não é sempre válida para as frações; (4) a questão da densidade dos números racionais uma vez que, diferentemente do que ocorre com os Números Naturais, não é possível falar em antecessor e sucessor nesse novo conjunto. Notamos aqui aproximações de resultados de pesquisas realizadas desde os anos 80 como Hart (1981); English & Halford, (1995); Nunes et al. (2004); Post et al., (1985) descritas por Mamede (2011).

Dessa forma, continuamos nossa investigação nos Anos Finais para completar um ciclo de exploração das vertentes, dos conceitos de fração.

#### 4.1.3 Base Nacional Comum

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018, p.9) é um documento “(...) que define um conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica assegurando seus direitos

de aprendizagem e desenvolvimento”. Esse documento tem um caráter normativo que se define através do § 1º do Artigo 1º da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9.394/1996) e está orientado pelos princípios éticos, políticos e estéticos que visam à formação humana integral e à construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva, como fundamentado nas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN).

Em relação, especificamente, à Matemática, a BNCC (Brasil, 2018) reúne um conjunto de ideias fundamentais, como equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias exprimem o desenvolvimento do pensamento Matemático e devem converter em objeto de conhecimento levando o aluno a se tornar protagonista do seu cotidiano.

A BNCC (Brasil, 2018) propõe, ainda, cinco unidades temáticas que orientam as habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Fundamental, as quais, dependendo do ano escolar, recebem uma ênfase diferente. Essas bases temáticas são números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística.

Segundo esse documento, a unidade temática Números tem, no pensamento numérico, seu maior significado, que implica o conhecimento de maneiras de quantificar os objetos e de interpretar quantidades. Os alunos desenvolvem ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. No estudo desses campos numéricos, segundo a BNCC (Brasil, 2018), devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

A unidade temática Álgebra desenvolve o pensamento algébrico, que é essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e, também, de situações e estruturas matemáticas, fazendo uso de letras e outros símbolos. A unidade temática Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais, que podem desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. A unidade temática Grandezas e Medidas quantifica grandezas do mundo físico e é fundamental para a compreensão da realidade, favorece a integração da Matemática com outras áreas de conhecimento, como Ciências ou Geografia. Essa unidade temática contribui ainda para a consolidação e ampliação da noção de número, a aplicação de noções geométricas e a construção do pensamento algébrico. Na unidade temática Probabilidade e Estatística, propõe uma abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em situações da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, desenvolve habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, raciocinar e



utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e prever fenômenos.

As frações estão inseridas na unidade temática Números, a qual, de acordo com cada ano escolar, possui um objeto de estudo diferenciado.

Analisando o documento, é possível observar que a ideia de fração inicia-se no 2º ano do Ensino fundamental a partir da inserção da ideia de metade e terça parte com a indicação de problemas envolvendo significado de dobro, metade, triplo e terça parte, por meio da qual a habilidade envolvida, proposta pela BNCC (Brasil, 2018, p.280), é (EF02MA08) *Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.*

No 3º ano do Ensino Fundamental, o objeto de conhecimento envolve os significados da divisão: configuração retangular, repartição em partes iguais e medida, juntamente com os significados de metade, terça parte, quarta parte, quinta parte e décima parte. As Habilidades descritas na BNCC (Brasil, 2018, p.284) são:

(EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.

(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com resto zero de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes.

As habilidades do terceiro ano do Ensino Fundamental expressam uma possibilidade de o professor introduzir ideias ligadas às frações por meio da ampliação da ideia de divisão de números naturais, uma vez que se propõe a divisão com resto diferente de zero. Além disso, sugere, como aprendizagens importantes a serem desenvolvidas, as “ideias de metade, terça, quarta, quinta e décima partes”. Analisando comparativamente as habilidades a serem desenvolvidas previstas nesse documento com as dos PCN (Brasil, 1997), observamos haver uma ampliação das propostas, uma vez que, nos Parâmetros, a sugestão era que, no primeiro ciclo, as crianças de 7 e 8 anos de idade entrassem em contato com a ideia de metade como descreve Spinillo (1992), mas que tal ideia fosse ampliada para outras frações unitárias, como terça, quarta, quinta e décima parte. Além disso, notamos a preocupação com a aprendizagem da divisão, o que pode representar uma situação de introdução das frações.

No 4º ano, encontramos como objeto de estudo a repartição equitativa e o trabalho desenvolvido com as frações unitárias mais usuais ( $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10$  e  $1/100$ ). A Habilidade que contempla esse objeto de estudo é (EF04MA09): “Reconhecer as frações unitárias mais usuais ( $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/10$  e  $1/100$ ) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso” (Brasil, 2017, p.289). Notamos que, nesse ano, é esperado que o aluno amplie sua compreensão das frações unitárias para o centésimo, o que poderia ajudá-lo a relacionar a representação

fracionária e decimal.

No 4º ano, a aprendizagem das frações descritas na habilidade EF04MA09 da BNCC (Brasil, 2018) pressupõe o uso das frações unitárias e a reta numérica. Sobre a relevância da vivência de propostas de ensino envolvendo a reta numérica, observamos que estudos como os de Quaresma e Ponte (2012) destacam que tal experiência favorece a comparação e ordenação de números racionais e que tal recurso é “(...) uma poderosa ferramenta para a compreensão das relações de ordem nos números racionais” (Quaresma e Ponte, 2012, p. 44).

No 5º ano do Ensino Fundamental, já encontramos uma complexidade maior nas aprendizagens esperadas, ou seja, a representação fracionária dos números racionais, como reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica, a noção de equivalência, cálculo de porcentagens com representação fracionária, adição e subtração dos números decimais.

(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.

(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.

(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.

(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100%, respectivamente, à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

(EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos (Brasil, 2018, p.293).

As habilidades do 5º ano relacionadas aos números racionais abrangem uma série de conceitos dentro desse conjunto numérico, como sua representação geométrica (reta), sua representação, operações, frações equivalentes. Há também indicações para que o professor desenvolva habilidades que permitam que o aluno realize os cálculos com papel (algoritmo ou não) e lápis e mentalmente, além do cálculo exato e por estimativa.

Percebemos que a temática fração está presente nas propostas de habilidades a serem desenvolvidas pelas crianças no 2º, 3º, 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, mas, em relação aos significados de fração, as habilidades conceituam, sobretudo parte-todo e quociente. A razão só está presente quando o documento trata da relação proporcional entre segmentos.

#### 4.1.4 Parâmetros Curriculares Nacionais dos Anos Finais

No Ciclo 3, 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, o estudo dos números fracionários parte da exploração de seus significados, tais como a relação parte/todo, quociente, razão e operador.

Segundo esse documento, nesse ciclo, os alunos possuem condições para perceber que os números têm múltiplas representações e para compreender melhor as relações entre representações fracionárias e decimais, frações equivalentes, escritas percentuais e até a notação científica.

Em relação aos números racionais/ fração, os objetivos da aprendizagem nesse ciclo são:

- \* ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
- \* resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- \* identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos (Brasil, 1998, p. 64).

No 4º Ciclo – 8º e 9º anos do Ensino Fundamental, os objetivos da aprendizagem dos números fracionários são:

- \* ampliar e consolidar os significados dos números racionais a partir dos diferentes usos em contextos sociais e matemáticos.
- \* resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e irracionais, ampliando e consolidando os significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- \* selecionar e utilizar diferentes procedimentos de cálculo com números naturais, inteiros, racionais e irracionais (Brasil, 1998, p.81).

Ao analisar os objetivos de aprendizagem propostos notamos que, apesar de conter as operações compreendidas a partir de diferentes situações eles estão concentrados, sem detalhamento. Diferentemente do ocorrido com as operações os significados das frações são mais discutidos no documento.

Os PCN (Brasil, 1998) constata que, apesar de os Números Racionais serem conteúdo estudado desde os anos iniciais, os alunos chegam aos anos finais sem compreenderem os diferentes significados e, também, os cálculos que envolvem esses números. A explicação dada para essa dificuldade é que, para compreenderem os números racionais, os alunos precisam quebrar certas ideias que envolvem os números naturais, como, por exemplo:

- ✓ Cada número racional tem várias representações na sua escrita;
- ✓ A comparação de maior e menor dos números fracionários é diferente dos números naturais;
- ✓ O tamanho da escrita dos números decimais, para a classificação de maior e menor, é diferente dos números naturais;
- ✓ A multiplicação de um número natural por outro (diferente de 0 e 1) sempre dará um número maior, mas algumas multiplicações de um número natural por uma fração dá

um número menor; e

- ✓ Nos números naturais, é possível determinar o sucessor e o antecessor de um número, diferentemente dos números decimais, porque sempre dá pra acrescentar mais um algarismo.

Nesse contexto, esse conjunto de ideias gera limitações, complexidade e erros presentes na relação com o conjunto dos números racionais, pois eles são comparados, por alunos e alguns professores, ao conjunto dos números naturais. Portanto, faz-se necessária a quebra de conceitos e percepções sobre os números naturais, construídos ao longo do processo de aprendizagem, para construir esse novo conceito em relação aos números racionais.

Aqui mais uma vez observamos aproximações com os resultados de investigações como as de Hart (1981) e Mamede (2011). Hart discute já no início dos anos 80, ao investigar 500 estudantes com idades variando de 13 a 15 anos que muitos deles tinham a concepção implícita que a “multiplicação sempre aumenta”. Mamede (2011) apoiada em estudos como os de English & Halford, (1995); Nunes et al. (2004); Post et al., (1985) discute a falta de compreensão tanto da comparação das frações quando estudantes analisam a magnitude de numeradores e denominadores ou da propriedade da densidade de conjunto que perpassa os números racionais. Nesse contexto, concordamos com Campos, Garcia Silva e Pietropaolo (2009) que somente transferir propriedades ou características dos Números Naturais para outro conjunto numérico pode tornar-se uma limitação no processo de aprendizagem das frações.

Segundo Vergnaud (1982) uma forma de construir ideias relativas a esse conceito é apresentar as frações em situações variadas.

Os PCN (Brasil, 1998) trazem ainda uma abordagem do conteúdo dos números racionais e descrevem como objetivo principal desse estudo levar os alunos a perceberem que somente os números naturais não dão conta do seu dia a dia. A construção inicial da ideia de número racional pelos alunos é relacionada à divisão entre dois números inteiros, excluindo-se o caso em que o divisor é zero, logo a ideia de números racionais supõe rupturas acerca dos números naturais, e isso demanda tempo e uma abordagem adequada.

Esse documento também discute o fato de a prática mais comum para explorar o conceito de fração ser a que recorre a situações em que está implícita a relação parte-todo, quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. Discute também o fato de que a interpretação da fração como relação parte-todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas.

Outro significado das frações descrito no documento é o de quociente, que se diferencia de quando se tem um inteiro, que se divide em partes, de quando é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir duas unidades em três

partes iguais. A razão é interpretada como fração quando ela é usada como uma espécie de índice comparativo entre duas quantidades de uma grandeza, ou seja, quando é interpretada como razão. O operador é observado quando ela desempenha um papel de transformação, algo que atua sobre uma situação e a modifica. Observamos também a descrição de habilidades que promovam o desenvolvimento da capacidade de operar com as frações. Além de analisar os pressupostos descritos nos PCN (Brasil, 1998) para os anos finais do Ensino Fundamental, interpretamos também as indicações da BNCC (Brasil, 2018) para esse segmento.

#### 4.1.5 Base Nacional Curricular Comum

Anos Finais:

No 6º ano do Ensino Fundamental, o objeto de estudo sobre frações já inclui significados (parte-todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração, adição e subtração de frações.

(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.

(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.

(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária (Brasil, 2017, p.299).

Na Base Nacional Curricular Comum, as habilidades contempladas no 6º ano introduzem o conceito de mais um significado: quociente, relacionado com a divisão retomando as frações equivalentes. Nesse ano, as habilidades da mudança de representação, decimal para fração e vice-versa, aparecem como aprendizagens essenciais a serem garantidas para as crianças. Há também a preocupação de que os professores trabalhem com situações-problema envolvendo as operações com os números racionais.

Encontramos, no 7º Ano do Ensino Fundamental, um objeto de estudo que contempla outros significados da fração. Além de parte-todo e quociente, traz a fração como razão e operador. As habilidades envolvidas nesse objeto de estudo, segundo a BNCC (Brasil, 2018), são:

(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.

(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura pode ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.

(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.

(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.

(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração  $\frac{2}{3}$  para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três

partes da mesma ou três partes de outra grandeza (Brasil, 2017, p.304).

No sétimo ano ainda são tratadas a representação fracionária nos seus usos, a ordenação e a associação com os pontos da reta numérica e as suas operações. As habilidades envolvidas são:

(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (Brasil, 2017, p.305).

As habilidades do sétimo ano estão voltadas para os significados parte-todo, quociente, razão e operador, comparando e ordenando as frações entre si. Traz ainda a questão das operações dos números racionais em uma complexidade maior em relação anos anteriores. Há um retorno para o estudo da reta numérica e para a resolução de problemas, os quais são trabalhados desde os anos iniciais até os anos finais do Ensino Fundamental.

o 8º ano do Ensino Fundamental, o conceito de fração só é evidenciado no conteúdo de dízimas periódicas e fração geratriz. Esse objeto de estudo gera a habilidade da BNCC: “(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica” (Brasil, 2017, p.311).

No 9º ano do Ensino Fundamental, o conteúdo de fração só é tratado no objeto de aprendizagem sobre expoente fracionário, não envolvendo mais nenhum conceito sobre fração. Temos como a habilidade da BNCC desse objeto de estudo: “(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários” (Brasil, 2017, p.315).

Percebemos que o conteúdo de fração está presente em quase todos os anos escolares do Ensino Fundamental, cada qual com as suas especificidades e complexidades. Os alunos começam a ter um conhecimento sobre os números fracionários desde muito cedo, porém carregam defasagens em seu aprendizado sobre esse conteúdo por toda a sua vida escolar.

## 5 Considerações Finais

Analisando os PCN (Brasil, 1997, 1998) e a BNCC (Brasil, 2018) foi possível verificar que os dois documentos não se constituem currículos prescritos na acepção da palavra, mas se propõe a servir como ponto de partida para a construção dos currículos estaduais e municipais, por isso os escolhemos e neles encontramos diferenças estruturais.

No tocante a estrutura foi identificada que enquanto nos PCN (Brasil, 1997, 1998) a proposta foi a de indicar parâmetros a serem observados pelos professores e gestores quando elaboraram seus currículos, a BNCC (Brasil, 2018) pretende orientar sobre as competências e habilidades



esperadas de serem desenvolvidas por todos os alunos ao longo da Educação Básica – habilidades essenciais. O foco tanto dos PCN (Brasil, 1997, 1998) como da BNCC (Brasil, 1997, 1998) é na aprendizagem, todavia os PCN também discutem questões ligadas ao ensino

Concernente a indicações para a aprendizagem notamos que nos PCN (Brasil, 1997, 1998) há descrição de habilidades a serem desenvolvidas e orientações sobre dificuldades encontradas pelos alunos as quais também recorrem a alguns resultados de pesquisa. Além disso, esse documento também traz indicações de procedimentos metodológicos de ensino. A BNCC (Brasil, 2018) apresenta uma organização de habilidades a serem desenvolvidas ano a ano as quais precisam ser garantidas a todos os alunos da Educação Básica.

Vimos que, no currículo prescrito, o trabalho com frações começa já com as crianças do primeiro ciclo no PCN (Brasil, 1997) e, a partir do 2º Ano, na BNCC (Brasil, 2018) decorrentes da ideia de metade, as quais se aproximam de pesquisas como Spinillo (1992). Tal ideia é ampliada na BNCC para outras partições no 2º ano – metade, terça- parte e décima parte e no 3º ano relacionando a representação fracionária com a decimal.

Assim como foi destacado nas pesquisas de Mamede (2011), Cavalcante e Guimarães (2008) os documentos curriculares aqui analisados também consideram a importância do trabalho do professor com os diferentes significados da fração.

Esse trabalho do professor com os significados da fração aparece nos PCN (Brasil, 1997,1998), a partir do 2º Ciclo, onde há um estudo dos significados quociente, parte – todo e razão, através da exploração de situações problemas. Depois encontramos no 3º Ciclo dos PCN (Brasil, 1997,1998), continuidade do estudo por meio desse tipo de exploração com os mesmos significados: quociente, parte-todo, razão e, agora acrescentando o significado de operador. No 4º Ciclo não encontramos nenhuma dessas ideias. Já na BNCC (Brasil, 2018), o estudo pelos alunos desses significados começam a partir do 5º Ano do Ensino Fundamental por parte -todo. No 6º Ano, além desse significado, temos o quociente. No 7º Ano, os estudos dos significados das frações se reportam a parte -todo, razão, operador e quociente. Já nos dois últimos anos do Ensino Fundamental – 8º e 9º –, a BNCC (Brasil, 2018), não faz nenhuma referência a tais significados.

Como vimos tanto nos PCN (Brasil, 1997,1998) como na BNCC (Brasil, 2018), a proposta de aprendizagem das frações se inicia na vida escolar das crianças nos primeiros anos de escolaridade e, em contrapartida, pesquisas apontam que existe uma enorme dificuldade na aprendizagem deste conteúdo em toda a educação básica. Estes dois aspectos nos levam a questionamentos como: Será que o Currículo Prescrito elaborado a partir desse documento permitiu a efetivação das demais etapas desse processo de inovação curricular? Será que a interpretação de orientações de tais documentos permitem aos professores a transposição do que é proposto

para as demais etapas?

O estudo de Mamede (2011, p.1), nos indica haver discrepâncias entre o Currículo Prescrito, o Currículo Apresentado na sala de aula e aquilo que de fato os alunos aprendem (Currículo Avaliado). Tal fato ainda nos faz refletir sobre o alcance dos currículos prescritos, ou seja, se as orientações contidas nos documentos curriculares possibilitam ao professor ampliar o seu conhecimento profissional que por sua vez favorecem a aprendizagem dos estudantes. Acreditamos que tais questões são importantes e necessárias para outras investigações.

## Referências

- Ball, D.L., Thames, M.H., Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), p. 389-407.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T.; Silver E. (1983). Rational number concepts. In: R. Lesh, M. Landau. *Acquisition of Mathematics concepts and processes* (pp.95-125). New York: Academic Press.
- Brasil. (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei número 9394, 20 de dezembro de 1996.
- Brasil, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática (1ª a 4ª série)*. Brasília: MEC.
- Brasil, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática (5ª a 8ª série)*. Brasília: MEC.
- Brasil, Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC.
- Cavalcanti, E.M.S, Guimarães, G. (2008). Os significados de Fração em Livros Didáticos das Séries Iniciais. Artigo apresentado 2º SIPEMAT.
- Campos, T.M.M., Garcia Silva, A.F., Pietropaolo, R.C. (2009) Considerações a respeito do ensino e aprendizagem de representações fracionárias de números racionais. In: G.B. Guimarães, R.E.S. Rosa. *Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização* (pp.131-9). Recife: SBEM.
- Canova, R.F. (2013) *Um Estudo das Situações Parte-todo e Quociente no Ensino e Aprendizagem do Conceito de Fração*. Tese (Doutorado em Educação Matemática Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo), São Paulo.
- Charalambous, C., Pitta-Pantazi, D. (2005). Drawing on a theoretical model to study students understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64(3), p. 293-316.
- Damico, A. (2007). *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental*. 2007. 313 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo), São Paulo.
- English, L., Halford, G. (1995). *Mathematics Education – Models and Processes*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
- Garcia Silva, A.F. (2007). *O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada*

- de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo do ensino e aprendizagem de frações. Tese (Doutorado em Educação Matemática Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP), São Paulo.
- Garcia Silva, A.F., Canova, R.F., Pinheiro, M.G.C. (2019). Alunos resolvem problemas envolvendo equivalência de frações em situação quociente. *Revista Areté | Revista amazônica De Ensino De Ciências*, 12(25), 16-26.
- Garcia Silva, A.F., Pinheiro, M.G.C. (2014). Situação Quociente: investigando as estratégias de resolução utilizadas por alunos dos anos iniciais. In: *II Encontro de Educação Matemática nos Anos Iniciais*, São Carlos. ANAIS do II Encontro de Educação Matemática nos anos iniciais.
- Gil, A.C. (2002). *Como Elaborar Projetos de Pesquisa*. São Paulo: Atlas.
- Hart, K.M. (1981). *Children's understanding of mathematics*, J. Murray, London.
- Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. In: Lesh, R. (Ed.). *Number and Measurement: paper from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC. p. 101-144.
- Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: J. Hiebert, M. Behr *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp.162-80). Hillsdale, New Jersey: Erlbaum.
- Mamede, E. (2011). Sobre o ensino e aprendizagem de frações nos níveis elementares de ensino. *Actas Profmat 2011*. (pp.1-6). Lisboa: APM.
- Nunes, T.; Bryant, P. Pretzlik, U. & Hurry, J. (2003). The effect of situations on children's understanding of fractions. Trabalho apresentado no *encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics*, Oxford, Reino Unido.
- Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade, J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris: 28–31, January.
- Post, T., Wachsmuth, I., Lesh, R., Behr, M. (1985). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Cognitive Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1), 18–36.
- Quaresma, M.; Ponte, J. P. (2012). “Compreensão dos números racionais, comparação e orientação: o caso de Leonor”. In: *Interações* n° 20, p.37-69.
- Sacristán, J. G. (2020). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.
- Spinillo, A. G. (1992). *A importância do referencial de 'metade' e o desenvolvimento do conceito de proporção*. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 8(3), 305-317.
- Vergnaud, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. (1993) In: Nasser, L. (Ed.). *Anais do 1.º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*, p. 1-26.