DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n3p269-277

Dificuldades dos Alunos do Ensino Médio na Resolução de Problemas Propostos em Avaliações de Larga Escala: um Relato de Experiência

Difficulties of High School Students in Solving Problems Proposed in Large-Scale Evaluation: an Experience Report

José Cícero dos Santos[a]; Maria Elisa Esteves Lopes Galvão[1]*[b]

[a]Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Educação Matemática. SP, Brasil.
[b]Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística.SP, Brasil.
*E-mail: elisa.gal.meg@gmail.com

Resumo

Neste artigo traz-se um relato de experiência que tem por objetivo analisar as heurísticas de resolução de problemas apresentadas por estudantes da primeira série do Ensino Médio. Investigam-se as heurísticas a partir dos registros e manifestações dos participantes e busca-se verificar se as dificuldades nas resoluções possuem relação com a natureza ou com o contexto do problema. Os problemas propostos na intervenção envolveram conceitos algébricos, cálculo de área e perímetro, com natureza e contexto distintos, e foram resolvidos por um grupo voluntário de estudantes. Para analisar as respostas dos alunos, busca-se apoio nos pressupostos teóricos da heurística de resolução de problemas do Schoenfeld, Bruder e na perspectiva da mudança e jogo de quadros de Douady. Os resultados mostraram que os estudantes apresentaram diferentes heurísticas, ligadas a diferentes quadros, para resolverem o mesmo problema. As heurísticas apresentadas nas soluções evidenciaram que o contexto do problema não causou dificuldades de interpretação e não interferiu na mobilização de estratégias, mas a natureza dos problemas foi o que causou mais dificuldades ao pensar matemático dos estudantes.

Palavras-chave: IDEB. Ensino Médio. Heurística. Mudanças de Quadros.

Abstract

In this article, we bring an experience report that aims to analyze the problem-solving heuristics of high school 1st grade students. We investigated the heuristics from the records and manifestations of the participants, seeking to verify whether the difficulties of the students to solve problems of large-scale evaluations, whether due to the nature or context of the problems. The problems proposed in the intervention involved algebraic concepts and area and perimeter calculation, with different nature and context, and were solved by a voluntary group of students. To analyze the students' answers, we sought support in the theoretical assumptions of the problem-solving heuristic of Schoenfeld, Bruder and from the perspective of the change and play of Douady's frames to analyze the students' responses. The results showed that the students presented different heuristics, linked to different pictures, to solve the same problem. The heuristics presented in the solutions showed that the context of the problem did not cause difficulties in interpretation and did not interfere in the mobilization of strategies, but the nature of the problems was what caused the most difficulties in the students' mathematical thinking.

***Keywords**: IDEB. High School. Heuristics. Frame Change.*

1 Introdução

Este artigo é parte de uma pesquisa de Doutorado em desenvolvimento e tem por objetivo apresentar um relato de experiência destinado a investigar se, a partir das heurísticas de resolução de problemas apresentadas por um grupo de estudantes do Ensino Médio, é possível verificar se as dificuldades na resolução possuem relação com a natureza, ou seja, às características e dificuldades inerentes ao conteúdo abordado, ou com o contexto em que o problema é apresentado. Os problemas selecionados são da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e da Avaliação de Aprendizagem em Processo do Estado de São Paulo (AAP).

A investigação a ser apresentada inicia-se apoiada nos resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) do ano de 2017, divulgados em 2018, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), que revelou dados preocupantes sobre a aprendizagem em Língua Portuguesa e Matemática no âmbito nacional, estadual e municipal. Em relação à área de Matemática, os relatórios do IDEB pontuam baixo desempenho dos estudantes em resolução de problemas. Estes resultados têm causado impasses entre os professores e pesquisadores, especialmente em relação aos resultados dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, que são os mais baixos (Brasil, 2019).

1 A referida professora atuou como orientadora da primeira autora no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo – UNIAN até 07/12/2020. Atualmente é professora colaboradora aposentada junto ao Departamento de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo – USP.

Concentramos nossos estudos nas avaliações de larga escala realizadas por escolas públicas do estado de São Paulo. As provas do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP), da AAP, da OBMEP e do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) possuem características comuns: a avaliação das habilidades matemáticas por meio da resolução de problemas e a avaliação de múltiplas habilidades matemáticas em uma única questão. Vimos na literatura que esta última característica é pouco investigada nas pesquisas, e este fato nos conduziu a investigar se as dificuldades na resolução de problemas possuem relação com a natureza ou com o contexto do problema (Allevato, 2005, Onuchic, 2014, Siqueira, 2019, Sena, 2017).

A escolha dos problemas aplicados na intervenção deu-se a partir de estudos de resultados divulgados sobre o desempenho dos estudantes em problemas propostos no SARESP e na AAP aplicados para estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e da 1ª série do Ensino Médio das escolas públicas do Estado de São Paulo. Investigou-se em quais conteúdos o índice de acertos era baixo. Verificou-se que os menores números de acertos ocorreram em questões que envolvem conhecimentos de equações, funções, cálculo de área e perímetro, logo, os problemas que escolhemos para aplicar no diagnóstico contemplam estes conteúdos. Foram escolhidos dois problemas para ser aplicado na intervenção. O problema 1, foi escolhido da AAP e o problema 2, foi escolhido da Olímpiada Brasileira das Escolas Públicas de Matemática (OBMEP). Os dois problemas são de acesso público.

O suporte teórico adveio dos pressupostos da heurística de resolução de problemas de Schoenfeld (1985), Bruder (2016) e na perspectiva da mudança de quadro e jogo de quadros de Douady (1992), para analisar os as respostas dos estudantes e responder a questão que norteia esta pesquisa inicial: é possível a partir das heurísticas de resolução de problemas e compreender se as dificuldades estão ligadas à natureza ou ao contexto do problema?

Os dados que apresentados neste artigo, coletados num trabalho preliminar à pesquisa principal, serviram para responder à questão desta pesquisa e também para que fosse possível a partir da análise realizada com as heurísticas de resolução de problemas, desenvolvidas pelos estudantes da 1ª série do Ensino Médio, selecionar, com mais propriedade, os problemas da intervenção da pesquisa do doutorado.

2 As Heurísticas de Resolução de Problemas

A heurística, na resolução de problemas, é constituída pelos caminhos, as descobertas e a criatividade que podem surgir durante o desenvolvimento de uma estratégia na resolução; por vezes, a estratégia pode ser reduzida, ampliada ou rejeitada, fatos que asseguram que a heurística é contínua no processo de resolução de problemas. Foi a partir desta perspectiva que a escolha recaiu nos pressupostos teóricos da heurística para investigar se as dificuldades na resolução de problemas, propostos nas avaliações de larga escala, possuem relação com a natureza ou com o contexto do problema.

Schoenfeld (1985) define a heurística como o conjunto de estratégias e técnicas para resolução de problemas. Segundo Polya (1978), a heurística é uma prática que não garante a solução do problema e não é um método de pensamento rígido, mas pode levar à solução. Bruder (2016) afirma que a heurística pode fornecer ao estudante orientações em direção ao desenvolvimento de habilidades para que o estudante se torne um bom resolver problemas.

Durante os processos de resolução de um problema, alguns procedimentos heurísticos podem ser utilizados para fazer analogias, desenvolver novos modelos ou reduzir um problema para um mais simples. Segundo Chaves (2014) estes procedimentos heurísticos são esquemas elásticos que permitem certo grau de variabilidade e capacidade de adaptação a determinadas condições e que orientam, de uma forma geral, a resolução de um problema. Logo, analisar as respostas dos estudantes nesta perspectiva heurística pode agregar mais variáveis para que os objetivos da pesquisa sejam atingidos.

3 Mudanças de Quadros sob a Perspectiva de Régine Douady

Optou-se por utilizar as noções de quadros estabelecidas por Régine Douady, como suporte teórico para investigar os as possíveis dificuldades apresentadas pelos estudantes para resolverem problemas. A escolha deste quadro teórico se deu por concordarmos que os elementos constitutivos desta teoria permitem um olhar para a natureza e o contexto do problema e estão muito próximos dos elementos que constituem o pensar matemático do estudante durante o processo de resolução de problemas.

Douady (1992) afirma que um quadro é constituído por objetos de um ramo da matemática, pelas relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diversas e pelas imagens mentais associadas aos objetos matemáticos.

Na Educação Básica o ensino de matemática transita por vários quadros, podendo ocorrer no quadro da aritmética, no quadro algébrico, no quadro geométrico, no quadro numérico ou no quadro das funções, dentre outros. Segundo Douady (1992) o estudante trabalha com a mudança de quadros quando, de acordo com a natureza do problema, ele necessita de outro suporte cognitivo para obter visualizações diferentes do quadro inicial do problema, ou seja, a mudança de quadro é um meio de obter formulações diferentes de um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na formulação original.

Durante a resolução de um problema o estudante pode mudar constantemente suas estratégias, trabalhar com dois quadros paralelamente ou migrar para um novo quadro. Este processo de devir, que é inerente à resolução de problemas, é definido por Douady (1992) como jogos de quadros. Segundo ela, quaisquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas podem terminar em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos, no enriquecimento do quadro original e dos quadros auxiliares. Os jogos de quadros são vistos, pela autora citada, como meios privilegiados para provocar desequilíbrios cognitivos e permitir a ultrapassagem desses desequilíbrios em um novo equilíbrio, que ela chama de nível superior.

A partir da perspectiva de Douady (1992) sobre jogos de quadros e das pesquisas sobre resolução de problemas (Bruder, 2016, Chaves, 2014, Polya, 1978, Schoenfeld, 1985), reforçamos a importância do ensino da matemática ser desenvolvido por meio da resolução de problemas, pois o antes, o durante e o depois da resolução de um problema propiciam ao professor a possibilidade de considerar os quadros auxiliares desenvolvidos pelo estudante, para fazer pontes com novos objetos matemáticos que se queira ensinar naquele ano/série e promover a progressão da aprendizagem. O ensino sob esta perspectiva pode agregar significados valiosos para o estudante, no que tange ao desenvolvimento de habilidades para resolver problemas.

Sobre o ensino por meio da resolução de problemas, Douady (1992) reforça a importância que deve ser dada por parte do professor à dialética ferramenta-objeto. Segundo ela, em determinado momento certo conceito matemático é objeto de estudo e em outro ele é utilizado pelo estudante como suporte cognitivo para construir um novo conceito, ou seja, torna-se uma ferramenta. Nesta visão, a autora sugere que este processo, que ela chama de cíclico, deve ser analisado sob duas perspectivas: o uso de certo conceito matemático por parte do professor quando ensina e o uso de certo conceito matemático por parte do estudante quando está apreendendo.

4 Metodologia da Pesquisa

Esta pesquisa foi desenvolvida segundo as características descritas pelo *Design Experiment* (Cobb et al., 2003). Esta metodologia acentua seus pressupostos sobre como os estudantes falam e fazem. Entendemos que essa compreensão é parte essencial para descrevermos os fenômenos que podem surgir durante o desenvolvimento da pesquisa. Segundo Cobb *et al*. (2003), o foco do investigador na perspectiva do *Design Experiment* deve estar no pensamento matemático dos participantes e nas possíveis modificações que poderão existir durante o processo de aprendizagem.

O presente estudo tem por objetivo apresentar um relato de experiência, que investigou se, a partir das heurísticas de resolução de problemas apresentadas por um grupo de estudantes do Ensino Médio, é possível verificar se as dificuldades na resolução possuem relação com a natureza ou com o contexto do problema. Para investigar esses aspectos, será apresentada uma análise prospectiva dos dois problemas e para investigar as heurísticas dos estudantes, apresentamos uma análise qualitativa dos problemas resolvidos. A expectativa é que, a análise dos dados, permita identificar acertos, erros, dificuldades, características positivas e negativas dos problemas, que, de alguma forma, possam orientar a escolha do conjunto de problemas para compor a intervenção da pesquisa da tese de Doutorado.

Para coletar os dados, foram escolhidos dois problemas, um da AAP e outro da OBMEP, que foram propostos no trabalho com cinco estudantes da 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo. A intervenção foi aplicada no mês de abril do ano de 2020. Neste período o Brasil passava uma forte pandemia de infecção da Covid-19, as escolas estavam fechadas, as aulas aconteciam de forma remota e os pesquisadores convidaram os participantes desta pesquisa via web para resolverem os problemas de modo que, no ato da aplicação dos problemas, pudesse haver comunicação entre os pesquisadores e os estudantes, por meio de videoconferência.

Ao finalizarem a resolução dos problemas os estudantes digitalizaram e enviaram seus protocolos para os pesquisadores. Todo o material audiovisual foi gravado e arquivado, com a concordância dos participantes, para instruir a análise e possíveis averiguações. Os participantes desta pesquisa foram referenciados pelas letras A, B, C, D e E, a fim de garantir o anonimato de suas identidades. A pesquisa teve aprovação pelo comitê de ética em pesquisa em seres humanos.

5 Análise Prospectiva dos Problemas

5.1 Problema 1

O problema 1, que está apresentado na Figura 1, foi elaborado no quadro geométrico, mas para o estudante resolvê-lo precisa desenvolver suas estratégias no quadro algébrico, utilizando os significados da função quadrática, e retornar para o quadro geométrico para validar a resposta obtida.

Figura 1 - Problema 1

Deseja-se cercar com muros um terreno retangular utilizando-se de uma parede já existente. Sabe-se que o comprimento do muro que será construído para cercar os outros três lados do terreno deverá ter 36 m de comprimento, conforme mostra a figura a seguir. Qual será a área máxima do cercado?

Fonte: Avaliação de Aprendizagem em Processo, 12ª Edição, 1ª série do Ensino Médio – SEE/SP, Questão 12, p. 38 (2016).

O problema trata de uma aplicação prática do cálculo de área e perímetro de figuras planas, mas a natureza do problema, proposto no quadro algébrico, trata em especial, dos conhecimentos sobre a variação da função quadrática, e a identificação de seu valor máximo. O estudo das funções quadráticas está indicado na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) para que seja ensinada no 9º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, como habilidade a ser desenvolvida para que o estudante consiga resolver e elaborar problemas em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais (Brasil, 2018). Este conteúdo é ensinado no 9º ano do Ensino Fundamental e ampliado na 1ª série do Ensino Médio.

Na matriz processual do Estado de São Paulo para o teste cognitivo da AAP, busca-se avaliar se o estudante consegue equacionar e resolver problemas que envolvem funções de 2º grau, particularmente os que envolvem otimização, pontos máximos ou mínimos (São Paulo, 2016). Na matriz de referência para testes cognitivos do Saeb, espera-se que o estudante saiba resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau (Brasil, 2019). Sendo assim, os objetivos da matriz de referência da AAP e do Saeb comungam os seus objetivos, evidenciam coerência com a aprendizagem esperado em relação às funções quadráticas, além do que, problemas semelhantes a este são propostos em provas do Saeb, Saresp, etc.

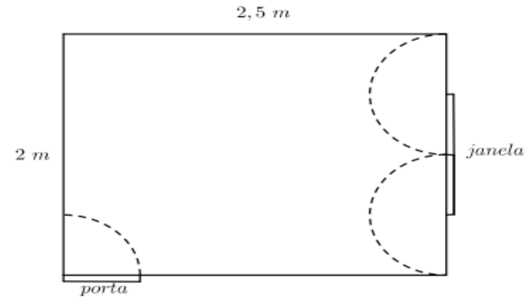
O problema foi apresentado no quadro geométrico, que é explícito para o estudante, ao contrário do quadro da função quadrática, que talvez seja implícito para o estudante, dada à apresentação do problema no contexto geométrico. Supomos que esta característica existente neste problema talvez possa ser um possível dificultador no desenvolvimento de estratégia por parte do estudante para resolvê-lo.

5.2 Problema 2

O problema 2, que apresentado na Figura 2, foi elaborado no quadro geométrico e para o estudante resolvê-lo precisa mudar para o quadro numérico. O objetivo deste problema é avaliar, por meio de uma aplicação prática, o que o estudante sabe sobre o cálculo de perímetro, área do retângulo e do círculo.

Figura 2 - Problema 2

Pedro acabou de se mudar para sua nova casa e ganhou um novo quarto. A figura a seguir mostra uma vista superior simplificada de seu novo quarto que possui 2m de largura por 2, 5m de comprimento.



A porta indicada na figura tem 50 cm de comprimento e pode ser aberta até encontrar a parede lateral. A janela é dividida em duas portas de mesmo comprimento que quando abertas encostam nas paredes vizinhas. Os arcos da figura mostram as aberturas da porta e da janela. A mãe de Pedro disse que ele deve colocar seus móveis no quarto de modo que não fiquem nos caminhos de abertura da porta nem da janela. Quantos metros quadrados Pedro tem em seu quarto para colocar os seus móveis?

Fonte: Banco de Questões OBMEP (2015).

As imagens das áreas de abertura da porta e das janelas são demarcadas na figura para que o estudante visualize partes de um círculo completo por meio da varredura da abertura e desenvolva estratégias a partir dessa visualização. Espera-se que o estudante represente, por meio de um registro, somente a parte que interessa para a resolução do problema, que são os registros numéricos correspondentes a , e o registro algébrico para a área do círculo .

Sobre a escolha do problema 2, como justificado na introdução deste trabalho, constatamos que as avaliações da AAP e da OBMEP possuem objetivos semelhantes aos da prova do Saeb, pois ambas consideram a importância da resolução de problemas como meio para avaliar o conhecimento matemático e o desenvolvimento do currículo em sala.

O estudo do cálculo de área de figuras planas está posto na BNCC (Brasil, 2018), no 8º ano do Ensino Fundamental e no Ensino Médio como habilidade a ser desenvolvida para que o estudante consiga resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como a de determinar a medida de terrenos (Brasil, 2018). Durante o Ensino Fundamental prevê-se o estudo do conceito de área das figuras planas elementares e no Ensino Médio estes conteúdos são retomados dentro de outros contextos da matemática, como por exemplo, no estudo das superfícies dos sólidos geométricos e na geometria analítica.

A OBMEP não trabalha com matrizes de referências ou parâmetros para a confecção dos seus testes cognitivos. Baseava-se anteriormente nas recomendações dos PCN (Brasil, 1998), agora na BNCC (Brasil, 2018), para observar a distribuição dos conteúdos ao longo dos anos de escolaridade. No caso deste problema 2, considerando as recomendações da BNCC (Brasil, 2018), ele pode ser resolvido por estudantes dos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental ou estudantes do Ensino Médio.

6 Análise dos Dados e Resultados

Nas próximas seções, apresenta-se uma análise qualitativa das respostas dos estudantes a partir da perspectiva da mudança e jogo de quadros de Douady (1992) e dos pressupostos teóricos da heurística de resolução de problemas de Schoenfeld (1985) e Bruder (2016).

6.1 Análise das respostas do problema 1

O problema 1 foi elaborado no quadro geométrico. Espera-se que, para resolvê-lo, o estudante desenvolvesse suas estratégias no quadro algébrico e, para finalizar, retornasse ao quadro original para validar a resposta obtida. Ao retornar para o quadro original, esperava-se que o estudante validasse a solução trabalhando no quadro numérico. Quatro dentre os cinco participantes desenvolveram estratégias e resolveram o problema (Estudante A, B, C, D); um não conseguiu desenvolver estratégias para resolver o problema (estudante E). Dentre os quatro que resolveram o problema, apenas um resolveu utilizando o raciocínio esperado.

Quadro 1 - Resumo – Heurísticas e quadros identificados na resolução do problema 1

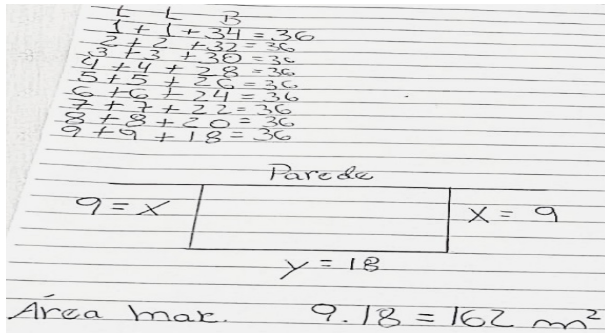
Estudantes	A heurística contemplou o quadro algébrico?	A heurística contemplou o quadro numérico?
A	Não	**Sim** - Utilizou estratégias no campo aditivo e multiplicativo.
B	**Sim** - Desenvolveu estratégias utilizando conhecimento do valor máximo da função quadrática.	**Sim** – Utilizou estratégias no quadro numérico para finalizar a resposta do problema.
C	**Sim** - Desenvolveu estratégias utilizando conhecimento do valor máximo da função quadrática.	Não
D	Não	**Sim** - Utilizou estratégias no campo aditivo e multiplicativo.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os estudantes A e D apresentaram indícios de que compreenderam o que o problema estava pedindo, mas apresentaram heurísticas diferentes da esperada para resolver o problema, trabalhando apenas no quadro numérico.

O estudante A não conseguiu desenvolver estratégias no quadro da função quadrática, conforme esperado. Ao ler o enunciado do problema, entendeu que o comprimento do muro, que seria construído para cercar os outros três lados do terreno, deveria ter de comprimento. A partir deste dado, o estudante A tomou ciência de que trabalharia apenas com três lados do retângulo e representou sua interpretação utilizando o registro algébrico para representar a soma dos comprimentos dos três lados do retângulo (Figura 3).

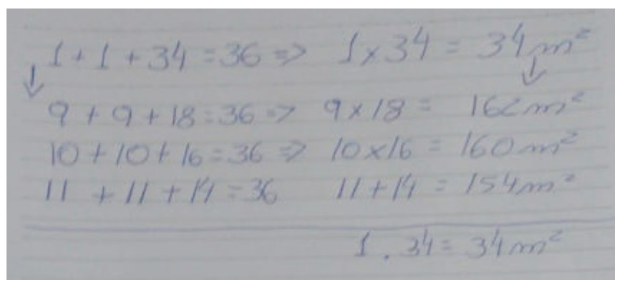
Figura 3 - Heurística do estudante A, problema 1



Fonte: Dados da pesquisa.

O problema questionou qual seria a área máxima do terreno cercado. O estudante A entendeu que se tratava do cálculo de área de um retângulo e resolveu o problema por meio de tentativas. A heurística apresentada pelo estudante A foi: "*tiro 2 de 36 e redistribuo nos lados e na base do retângulo , considero e e efetuo o cálculo da área . . Sigo com a tentativa, tiro 4 de 36 e redistribuo nos lados e base do retângulo , considero e e efetuo o cálculo da área* .

Figura 4 - Continuação da heurística do estudante A, problema 1

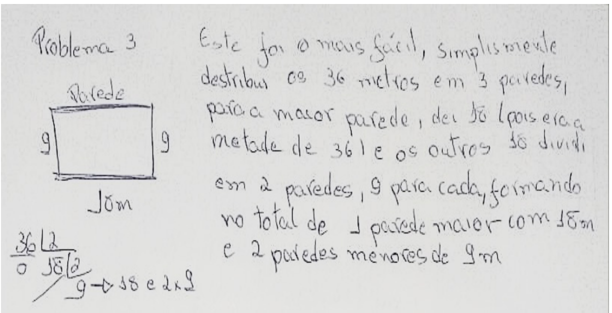


Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante A seguiu com os cálculos até , considerando e , efetuou o cálculo da área . Ao verificar que o valor da área, , foi inferior ao cálculo anterior, → , percebeu que o valor começou a decrescer, logo ele concluiu que o valor máximo da área do terreno cercado seria , considerando as dimensões e . Questionamos o estudante A a respeito da estratégia adotada e a resposta foi: "*quando bati o olho vi que dava para fazer como equação do 2º grau, mas decidi ver um método menos complicado, então realizei pelo método dessa tentativa* (estudante A)." Neste caso, constatamos, que o estudante A apresentou indícios de mobilização de estratégias ao ler e compreender o que o problema estava pedindo.

O estudante D interpretou os dados explícitos no quadro geométrico, compreendeu o problema e, assim como o estudante A, apresentou heurísticas de resolução do problema no quadro numérico. Para justificar sua resposta, escreveu afirmando que: "*este foi o mais fácil, simplesmente distribuir os 36 metros em 3 paredes, para a maior parede, dei 18, pois era a metade de 36 e os outros 18 dividi em 2 paredes, 9 para cada (*estudante D*)*". A heurística do estudante D foi distribuir os do perímetro nas 3 paredes, para a maior parede (a base do retângulo) ele considerou e os outros dividiu para as outras duas paredes (a altura do retângulo).

Figura 5 - Heurística do estudante D, problema 1.

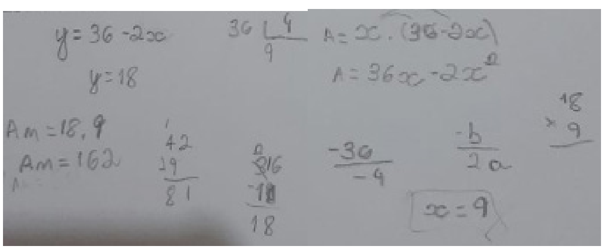


Fonte: Dados da pesquisa.

Questionamos o estudante D sobre o que o levou a esta estratégia e ele insistiu afirmando que, ao ler o problema, "*já veio na cabeça esta ideia*". O estudante D prosseguiu com o cálculo da área do terreno apresentando o registro de ² como resultado da resolução.

O estudante B identificou os dados e a partir da leitura, passou a trabalhar no quadro algébrico. Tomou ciência de que o perímetro da área cercada seria , reduziu o e isolou o , , seguiu substituindo na fórmula da área → .

Figura 6 - Heurística do estudante B, problema 1



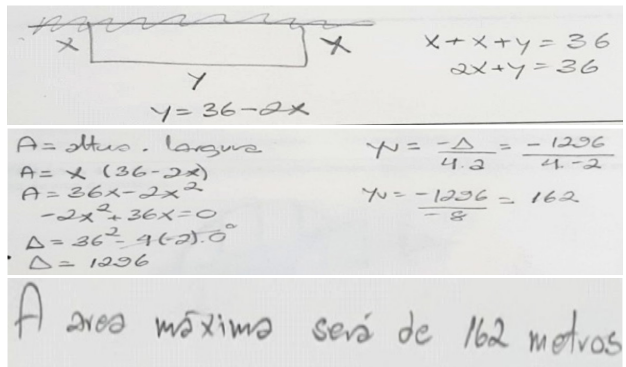
Fonte: Dados da pesquisa.

Consideramos que, a partir da função , o estudante B iniciou novas estratégias trabalhando com a função quadrática. Tomou ciência do conceito do valor máxima da função quadrática e utilizou a fórmula do = para achar o valor de (altura do retângulo). Substituiu o valor dos coeficientes e em = → . Após achar o valor do , retornou à equação do perímetro e substituiu → , logo . Neste ponto, o estudante B achou o valor da base e da altura , retornou ao quadro geométrico, substituiu o valor de e na fórmula → , afirmando que a área máxima do terreno = 162.

O esperado seria o registro numérico . Após observarmos a resposta = 162, perguntamos ao estudante B se a sua resposta final estaria correta, o estudante B após revisá-la, falou "*há, é 162 m²*". Questionamos o estudante B sobre as características ou informações do problema que o conduziram a utilizar o vértice de uma parábola para achar a altura do retângulo, para encontrar o de valor máximo. O estudante B, após pensar alguns segundos, respondeu: "*há não sei professor, lembrei que quando estudei funções resolvi um problema assim (*estudante B*)*". Neste caso, o estudante B lembrou-se que já havia utilizado esse fato, mas não soube explicar a relação existente entre os dois conceitos matemáticos envolvidos.

O estudante C interpretou os dados do problema explícitos no quadro geométrico, fez a escolha das variáveis e identificou que o perímetro é a soma ; isolou a variável e reduziu a expressão para a área à variável , usando a fórmula para calcular a área do retângulo, e obtendo a função quadrática .

Figura 7- Heurística do estudante C, problema 1



Fonte: Dados da pesquisa.

O esperado era que o estudante C trabalhasse, na sequência, com a ideia do valor máximo da função quadrática e associasse a altura do vértice da parábola à área do retângulo e conseguisse achar a área máxima do terreno cercado. Analisando as heurísticas do estudante C, observamos que ele identificou o vértice da parábola como o ponto de máximo da função quadrática e chegou à solução usando a fórmula do → → .

Questionamos o estudante C quais características, conjecturas ou informações o conduziram a adotar a estratégia desenvolvida para resolver o problema e se ele estava seguro da resposta; após pensar alguns segundos, respondeu: "*por que o representa largura e o altura (*estudante C*)*". A resposta do estudante C mostra indícios de que ele não interpretou corretamente os significados da parábola e não conseguiu visualizar a relação que existe entre a altura da parábola e a área do retângulo, confundindo as notações ou representações utilizadas.

6.2 Análise das respostas do problema 2

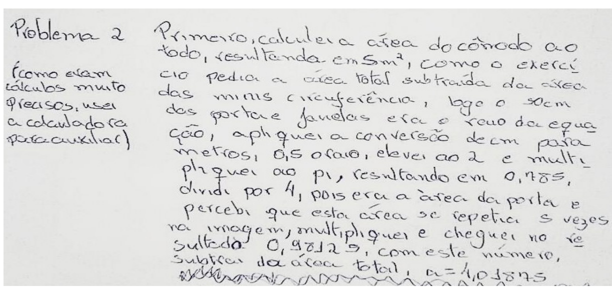
A partir de um modelo retangular apresentou-se o quarto do Pedro com três portas, as aberturas das portas varrem uma área equivalente a (abertura da porta) e (abertura das portas da janela) que representam partes do círculo. Pediu-se para o estudante calcular a área livre do quarto desconsiderando as áreas varridas pelas portas. O problema 2 foi apresentado no quadro geométrico e para resolvê-lo esperava-se que o estudante representasse suas estratégias de resolução no quadro numérico. Durante a intervenção constatamos que os estudantes trabalharam apenas com os quadros geométrico e numérico, conforme previsto.

Dentre os cinco estudantes que participaram da intervenção, consideramos que dois (estudantes B e D) resolveram o problema integralmente. Os estudantes A e C iniciaram a resolução, calcularam a área do retângulo corretamente, mas apresentaram indícios de dificuldades para trabalharem com a ideia de decomposição de figuras planas. Fizeram referências de que a abertura de uma das portas da janela era metade de uma circunferência e abandonaram a resolução do problema. O estudante E não conseguiu resolver os problemas propostos, após efetuar a leitura e refletir por alguns minutos afirmou que não sabia resolver nenhum problema.

O estudante D escreveu que

> primeiro calculei a área do cômodo ao todo, resultando 5m², como o exercício pedia a área total subtraí da a área das minis circunferências, logo o 50 cm das porta e janelas era o raio da equação, apliquei a conversão de cm para metros, 0,5 o raio, elevei ao 2 e multipliquei ao pi, resultando em 0,785, dividi por 4, pois era a área da porta e percebi que esta área se repetia 5 vezes na imagem, multipliquei e cheguei no resultado 0,98125, com este número, subtraí da área total, a = 4,01875".

Figura 8 - Heurística do estudante D, problema 2

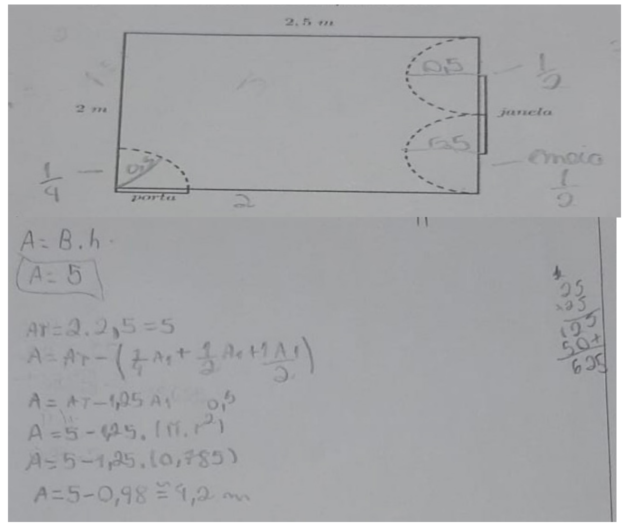

Problema 2
(como eram cálculos muito precisos, usei a calculadora para auxiliar)
Primeiro, calculei a área do cômodo ao todo, resultando em 5m², como o exercício pedia a área total subtraída da área das minis circunferência, logo o 50cm das porta e janelas era o raio da equação, apliquei a conversão de cm para metros, 0,5 o raio, elevei ao 2 e multipliquei ao pi, resultando em 0,785, dividi por 4, pois era a área da porta e percebi que esta área se repetia 5 vezes na imagem, multipliquei e cheguei no resultado 0,98125, com este número, subtraí da área total, a=4,01875

Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante D compreendeu o contexto do problema, desenvolveu suas estratégias no quadro numérico e o registro que representa o seu raciocínio foi A expressão representa para o aluno do círculo. O 5 representa a soma das áreas: a área da quarta parte da porta juntamente com as áreas correspondentes às partes da janela, ou seja, ele olhou para todas as áreas sombreadas das aberturas das portas. Ao observar que a abertura da porta equivale à quarta parte de um círculo, ele considerou que a abertura de cada porta da janela tinha 2 partes e dai somou Talvez o estudante D não compreendeu que o círculo é uma região plana, e a circunferência é uma curva, mas como o problema não sombreou a área varrida pelas aberturas, concordamos que esse fato possa ter causado um impasse conceitual.

Assim como o estudante D, o estudante B compreendeu o contexto do problema, desenvolveu suas estratégias no quadro numérico, mas apresentou dificuldades para representar registros dos seus raciocínios sobre o cálculo da área varrida pela abertura das portas. A primeira ação do estudante B foi calcular a área do retângulo e rabiscar na imagem, provavelmente após interpretar que precisaria subtrair as áreas varridas pela abertura da porta e das janelas da área total do quarto. Os rabiscos no quadro geométrico feito pelo estudante B representam a compreensão acerca dos elementos significativos do círculo.

Figura 9 - Protocolo do estudante B



Fonte: Dados da pesquisa.

O estudante B registrou a área varrida pela abertura da porta utilizando o registro e as duas áreas varridas pelas aberturas da janela o registro . A heurística do estudante B mostra indícios de que ele compreendeu o problema e identificou os elementos significativos do quadro geométrico. Ao migrar para o quadro numérico, o estudante B apresentou os registros = - (+ +) → = – 1,25. Questionamos neste ponto o estudante B sobre o registro numérico 1,25 e ele nos respondeu justificando que a "área da abertura da porta vale *0,25* e a área da abertura de uma janela 0,50, log*o tudo tem 1,25*". Seguiu os cálculos = – 1,25 . (π . r²) → A = 5 – 1,25 . 0,785 → A = 5 – 0,98 → A ≈ 4,2 m. O correto é o estudante escrever , mas observamos que a maioria deles responde apenas escrevendo (metro), não sabemos se por pressa ou se apresentam possíveis dificuldades no conceito de perímetro e área.

7 "A natureza e o contexto do problema" e os resultados à luz da mudança de quadros e da heurística

O objetivo desta pesquisa foi analisar as heurísticas de resolução de problemas dos estudantes da 1ª série do Ensino Médio para verificar se as dificuldades na resolução possuem relação com a natureza ou com o contexto do problema. A partir destes objetivos colocamos como questão de pesquisa: É possível a partir das heurísticas de resolução de problemas compreender se as dificuldades estão ligadas à natureza ou ao contexto do problema?

Após analisarmos as heurísticas dos estudantes a nossa resposta é sim, a partir dos dados obtidos nessa intervenção. Os resultados mostraram que os estudantes apresentaram diferentes heurísticas, ligadas a diferentes quadros, para resolverem o mesmo problema. As heurísticas dos estudantes evidenciaram que o contexto do problema não causou dificuldades de interpretação e não interferiu na mobilização de estratégias. Os estudantes mostraram indícios de terem compreendido a pergunta do problema e, também, que os problemas estavam propostos em contextos associados à matemática utilizada no cotidiano.

No problema 1, as dificuldades com o significado de otimização da função quadrática (altura máxima do vértice da parábola) e a sua relação com o quadro geométrico (área do retângulo), os estudantes utilizaram a estratégia matemática esperada, mas não compreenderam a ligação dos dois quadros envolvidos.

As dificuldades que identificamos no trabalho dos estudantes estavam mais relacionadas à natureza dos problemas. A maioria deles desenvolveu uma estratégia para resolver o problema, mas o ir e vir das mudanças de quadro do geométrico para o algébrico ou do geométrico para o numérico, no caso do problema 1 e as mudanças de quadro do geométrico para o numérico, no caso do problema 2 foi o que causou mais dificuldades para os estudantes.

As heurísticas mostraram indícios de que os estudantes possuem noções dos conteúdos inerentes aos quadros geométricos, algébricos e numéricos, mas que alguns conhecimentos prévios internos a estes quadros se mostraram insuficientes. No problema 2, o conceito de círculo e circunferência, a representação numérica das partes de um círculo, a fórmula da área do círculo pode ter sido o motivo de três estudantes abandonarem a resolução do problema.

Ao efetuaram as mudanças de quadros, os estudantes mostraram dificuldades para relacionarem os elementos significativos existentes entre os diferentes quadros trabalhados durante a resolução.

8 Conclusão

A partir das evidências nas heurísticas, conclui-se que os estudantes apresentaram dificuldades para relacionarem as características comuns dos quadros trabalhados para resolverem os problemas. Estas dificuldades estão associadas à natureza do problema, visto que, se os problemas das avaliações de larga escala avaliam múltiplas habilidades em apenas um problema e o estudante não possui todas elas desenvolvidas, compromete-se toda a resolução do problema.

As heurísticas e as análises agregaram a esta pesquisa reflexões atuais e pertinentes, pois, apesar de haver estudos relacionados à resolução de problemas a mais de trinta anos, é evidente a falta de habilidade deste grupo de estudantes do Ensino Médio para resolverem problemas com a natureza dos problemas propostos nas avaliações de larga escala.

Os diálogos estabelecidos com os estudantes evidenciaram o que eles entenderam do problema. A identificação dos conhecimentos mobilizados e a representação adequada são elementos importantes para compreendermos as escolhas das estratégias de resolução, os acertos e os erros dos estudantes.

A apresentação desorganizada dos cálculos por parte dos estudantes dificultou o nosso trabalho de análise, pois em alguns cálculos não era claro o início, o meio e o fim da estratégia por eles desenvolvida. Constatamos também que eles não têm o hábito de revisar a resolução do problema. Em nossas próximas intervenções adotaremos uma ficha para a resolução dos problemas, para conduzir o estudante a organizar seus cálculos.

Por fim, observamos nesta pesquisa que a resolução de problemas deve ir além das atividades individuais, buscando promover, dentre outros aspectos, um ambiente de interação entre estudantes e professor, para que as resoluções desenvolvidas pelos estudantes sejam analisadas e refletidas em um ambiente colaborativo em que o estudante fique a vontade para expor e justificar as suas heurísticas e compreender alguns fenômenos e resoluções de outros grupos de estudantes ou mesmo do próprio professor. Ações que pretendemos implementar em futuras pesquisas.

Referências

Allevato, N. S. G. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência*. Tese de Doutorado. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociência e Ciência Exata.

Allevato, N. S. G.; Onuchic, L.R. (2014). *Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas?* In: Resolução de Problemas: teoria e prática. Jundiaí: Paco editorial, 2014.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular, Educação é a Base*. Brasília: MEC/CONSED/UNDIME.

Brasil. (1998). Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Secretaria de Educação Fundamental*. 2ª ed. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2020). Ministério da Educação. *Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais*. Disponível em http://portal.inep.gov.br/web/guest/inicio. Acesso em janeiro de 2020.

Chaves, V. D. (2014). *Heurística e suas possibilidades de emergência nas aulas de matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Santa Cruz, Programa de Pós- Graduação em Educação Matemática, Ilhéus.

Cobb, Paul et al. (2003). *Design Experiments in Educational Research*. In: Educational Researcher, v. 32, n. 1, p. 9-13, Jan/Fev.

Douady, R.(1992). Repères. IREM, n. 6, Janvier.

Liljedahl, Peter et al. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. ICME -13 Topical Surveys, v. 1, n. 1, p.1-46. Springer International Publishing. http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-40730-2.

Olímpiada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. (2015). *Banco de Questões 2015*. Rio de Janeiro. Editora OBMEP. Disponível em http://www.obmep.org.br/ . Acesso em 05 de outubro de 2019.

George, P. (1978). *A arte de resolver problemas*. Trad. e adapt.: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência.

Alan Schoenfeld, H. (1985). *Mathematical problem solving*, Orlando, FL: Academic Press, 1985.

São Paulo. (2019). Secretaria Estadual de Educação. *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias*. Recuperado em 20 de dezembro, 2019, de http://www.escoladeformacao.sp.gov.br/portais/Portals/84/docs/pdf/curriculo_paulista_26_07_2019.pdf.

São Paulo. (2020). *Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Saresp*. Recuperado em 02 de março, 2020, de https://saresp.fde.sp.gov.br/Default.aspx.

São Paulo. (2020). Secretaria Estadual de Educação. *Avaliação de Aprendizagem em Processo. Matemática*. Recuperado em 05 de fevereiro, 2020, de https://www.educacao.sp.gov.br/avaliacoes.

Sena, M. R. (2017). *Resolução de Problemas Algébricos: Uma análise à luz dos Três Mundos da Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Siqueira, E. S. (2019). *Um estudo de funções por meio de problemas de otimização*. Dissertação de Mestrado, Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.