UNA PROPUESTA PARA LA INTRODUCCIÓN DE LAS CONCEPCIONES SUBJETIVA Y AXIOMÁTICA DE LA PROBABILIDAD EN LA UNIVERSIDAD

José Ignacio Barragués Fuentes [1]
Universidad del País Vasco
Jenaro Guisasola Aranzabal [2]
Universidad del País Vasco

RESUMEN

En este estudio describimos el diseño, la implementación en condiciones reales de docencia y la evaluación, de una secuencia de enseñanza y su correspondiente modelo de aplicación destinados a introducir las conceptualizaciones subjetiva y axiomática de la probabilidad en la enseñanza técnica universitaria. La propuesta se basa en los resultados de las investigaciones sobre las dificultades de aprendizaje de los conceptos relacionados con la probabilidad y en la perspectiva social constructivista del aprendizaje de las matemáticas. Los resultados obtenidos muestran una mejora significativa en diversos aspectos del razonamiento probabilístico, respecto a los estudiantes que reciben una enseñanza convencional. Además, hemos observado en los estudiantes hábitos metodológicos avanzados para la resolución de problemas y cierta perspectiva de las problemáticas que encierran cada una de las concepciones de la probabilidad.

Palabras clave: Probabilidad subjetiva, probabilidad axiomática, resolución de problemas, concepciones alternativas, paradigma de Heurísticos y Sesgos.

ABSTRACT

In this study we will describe the design, implementation in real university teaching conditions and evaluation of a teaching sequence and its corresponding

[1] mapbafuj@sp.ehu.es
[2] jenaro.guisasola@ehu.es

application model intended to introduce the subjective and axiomatic concepts of probability in technical university teaching. The proposal is based on results from research on the learning difficulties which arise in concepts related to probability and in the constructivist social perspective of learning mathematics. The results seem to show a significant improvement in different aspects of probabilistic reasoning regarding students that have received conventional teaching. We have also observed advanced methodological habits in the students to solve problems and a certain perspective of the problems surrounding each of the concepts of probability.

Key words: Subjective probability, axiomatic Probability, problem solving, misconceptions, Heuristics and Biases paradigm.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA INVESTIGADO

Actualmente se considera esencial la competencia estadística para ciudadanos capaces de orientarse en un entorno de fuertes interdependencias sociales, políticas y económicas, donde con frecuencia las decisiones con impacto social se toman sobre la base de estudios estadísticos. Pero la investigación didáctica está mostrando las dificultades que tienen los estudiantes para aprender de forma significativa los conceptos relacionados con el azar y la probabilidad (Borovcnik et al., 1991). Algunas de las dificultades están relacionadas con estrategias informales que suelen ser utilizadas por las personas cuando deben emitir algún juicio en situaciones de azar. Tales estrategias pueden resultar para los estudiantes más plausibles que las estrategias probabilísticas, y en consecuencia dificultar su aprendizaje. Por esta razón, uno de los criterios más importantes que se debe utilizar para analizar el aprendizaje consiste en investigar la persistencia de este tipo de razonamientos tras la enseñanza (Peard, 2008; Kapadia, 2008), algunos de los cuales se describen en el llamado Paradigma de Heurísticos y Sesgos (Borovcnik et al., 1991).

A propósito de la influencia que ha tenido la investigación didáctica en probabilidad sobre el currículo escolar de las tres últimas décadas, Kapadia (2008) muestra un panorama poco alentador. Por ejemplo, no se considera la probabilidad como forma de evaluar el riesgo en aplicaciones reales ni las concepciones previas de los estudiantes, y ha desaparecido la interpretación subjetiva de la probabilidad. Kapadia encuentra especialmente grave esta última omisión porque las nociones subjetivas sobre probabilidad son unas de las primeras que las personas desarrollan para valorar riesgos y tomar decisiones. Las ideas probabilísticas que se estudian se derivan solo de situaciones experimentales, esto es, se exploran fundamentalmente las concepciones frecuencial y Laplaciana de la probabilidad.

La interpretación frecuencial proporciona un carácter objetivo a la probabilidad, porque se trata de un hipotético valor, independiente del observador, hacia el que converge la frecuencia relativa del suceso. No obstante a su utilizad práctica, esta concepción plantea dificultades. Una de ellas es que el valor de la probabilidad nunca es conocido, sino estimado a partir de una muestra. Además, no siempre se dispone de una muestra suficientemente amplia, ni es posible repetir el experimento bajo idénticas condiciones (contextos de la vida diaria, sociales, sanitarios, económicos, históricos, etc.).

Por otra parte, la regla de Laplace apenas encuentra aplicación fuera de los juegos de azar, aplicación considerada actualmente poco relevante (Borovcnik, 2008a). Así pues, es necesario extender en el aula el concepto de probabilidad, más allá de las concepciones frecuencial y Laplaciana (Borovcnik, 2008a,b).

La concepción subjetiva concibe la probabilidad como un grado de creencia basado en la experiencia de la persona y en su sistema de conocimientos. A cualquier entidad aleatoria se le puede atribuir una probabilidad, que puede ser asignada de cualquier modo, a condición de que se esté dispuesto a aceptar apuestas basadas en dicha asignación y que no se desee realizar apuestas que con seguridad conducirán a una pérdida. Para un subjetivista existen dos categorías de información, una previa y una empírica. La información previa se encuentra en la mente del individuo y es ndependiente de cualquier dato experimental. La información empírica se obtiene e las frecuencias observadas en una repetición de experimentos. Ambos tipos de información se combinan en la fórmula de Bayes para dar lugar a una nueva probabilidad del suceso en cuestión. Esta concepción tiene una dificultad obvia: diferentes personas pueden asignar probabilidades distintas para un mismo suceso.

Desde la óptica axiomática se concibe la probabilidad como un concepto definido por un sistema de axiomas y el cuerpo de definiciones y teoremas que se deriva de él. Los teoremas justifican la operativa probabilística, pero su significado puede resultar oscuro para los estudiantes. La óptica axiomática proporciona soporte a las restantes concepciones, pero no contribuye a clarificar el significado de la probabilidad.demás, pasar de las concepciones frecuencial y Laplaciana (fuertemente intuitivas) a la concepción axiomática, puede llevar a los estudiantes a considerar esta última teoría como muy abstracta y sin conexión con la realidad. Ambas concepciones, subjetiva y axiomática, amplían enormemente el campo de aplicación de la probabilidad, y de hecho la estadística Bayesiana parte de la concepción subjetiva y aplica el cálculo probabilístico a todo tipo de situaciones.La importancia de la conceptualización subjetiva contrasta, sin embargo, con su inexistente tratamiento en los currículos escolares internacionales (Kapadia, 2008). Además, el modo de introducir ambas conceptualizaciones en muchos libros de texto universitarios adolece de importantes carencias epistemológicas y didácticas (Barragués y Guisasola, 2006).

A fin de abordar este problema didáctico, elaboramos una propuesta de enseñanza universitaria para la introducción de ambas concepciones de la probabilidad. En este trabajo resumimos los objetivos de aprendizaje establecidos, las actividades y estrategias de enseñanza utilizadas, los instrumentos de evaluación del aprendizaje empleados y los resultados obtenidos.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE QUE SE PERSIGUEN

Basándonos en el análisis epistemológico y en los resultados sobre dificultades de aprendizaje que se han presentado, establecimos los siguientes objetivos de aprendizaje:

Objetivo 1. Comprender las problemáticas de las distintas conceptualizaciones de la probabilidad (frecuencial, Laplaciana, subjetivista y axiomática).

Objetivo 2. Comprender cómo una valoración personal de la probabilidad puede incluirse en el proceso de cálculo de la probabilidad de un suceso.

Objetivo 3. Contribuir a que los estudiantes sustituyan sus intuiciones no probabilísticas por conceptos y procedimientos probabilísticos.

Objetivo 4. Comprender la necesidad de una concepción abstracta de la probabilidad, que proporcione criterios generales de asignación de probabilidad, y que proporcione propiedades estructurales independientes de la interpretación que se adopte.

Objetivo 5. Aproximar a los estudiantes al proceso de construcción de un marco teórico científico y a que valoren positivamente la utilidad de la teoría de la probabilidad para resolver problemas.

MARCO TEÓRICO

El diseño de nuestra propuesta ha estado dirigido por dos principios. El primero consiste tomar en consideración los resultados de las investigaciones sobre las dificultades de aprendizaje de los conceptos elementales de la teoría de la probabilidad (Borovcnik y Peard, 1996; Kapadia y Borovcnik, 1991; Batanero y Díaz, 2008; Sáenz, 1998). Hemos incorporado actividades expresamente dedicadas a ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades y sus concepciones erróneas (objetivos 2, 3 y 5).

El segundo principio es la perspectiva social constructivista del aprendizaje (Solow, 1993; Guershon y Trgalová, 1996). Como indican Sierpinska y Lerman (1996), los estudiantes aprenden matemáticas construyendo activamente nuevos significados a partir de la experiencia y el conocimiento previos. Para facilitar esa construcción, la estrategia consiste en proponer problemas y otras actividades colaborativas para cuya resolución sea necesario que los estudiantes tomen conciencia de sus conocimientos y estrategias informales (objetivo 3) y que desarrollen su capacidad de razonamiento y argumentación, a través de tareas matemáticas significativas (NRC, 1995; NCTM, 2000) (objetivos 1 a 5). Armella y Waldegg (1992) sostienen que “la matemática no es un cuerpo codificado de conocimiento, sino esencialmente una actividad” y Kilpatrick (1997) se refiere a la necesidad de proponer actividades en el aula que “animen a los estudiantes a convertirse en aprendices activos, participando en investigaciones y trabajando en grupo” (objetivo 5). Los objetivos de aprendizaje incluyen aspectos ontológicos (creencias, valores y actitudes) que deben ser tenidos en cuenta (objetivos 3 y 5). La investigación muestra que los aspectos emocionales y de valores no pueden considerarse sin una estrecha conexión con los procesos cognitivos (Armella y Waldegg, 1992). En este sentido, la búsqueda del interés de los estudiantes nos llevó a diseñar actividades relacionadas con Ingeniería en Electricidad, especialidad técnica de los grupos de alumnos con los que experimentamos nuestra propuesta. Muchas de las actividades planteadas hacen referencia a parámetros medibles de circuitos eléctricos tales como tensión, resistencia e intensidad. Por ejemplo, para hacer ver a los estudiantes la necesidad de una matemática del azar, simulamos experimentos en los que una pequeña fluctuación aleatoria en los parámetros de resistencia o tensión afectaba al funcionamiento del circuito hasta el punto de hacerlo imprevisible en términos deterministas. Este fue el problema que estructuró toda la (re)construcción del marco teórico probabilístico en el aula. Los estudiantes encontraron sorprendente y novedosa esta óptica de análisis de los circuitos (Barragués y Guisasola, 2009) (objetivo 5). Usamos, además, una amplia variedad de situaciones adicionales que hacían ver el carácter general de la teoría que se estaba desarrollando: juegos de azar, situaciones cotidianas, de interés social, uso de simulaciones por ordenador, etc. (objetivo 5).

DISEÑO DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

La secuencia de enseñanza que presentamos aquí se integra en un curso completo de probabilidad, y en consecuencia se presuponen ya comprendidos los conceptos y resultados probabilísticos básicos (espacio muestral, suceso, probabilidad frecuencial, equiprobabilidad, probabilidad condicionada, independencia, teorema de Bayes), el cálculo combinatorio y la regla de Laplace. La enseñanza de esta parte previa del temario, el tratamiento de las dificultades de los estudiantes (sesgos en el razonamiento y uso de heurísticas no probabilísticas) y los resultados obtenidos ya han sido analizados en anteriores trabajos (Barragués y Guisasola, 2007, 2009).

1. La problemática de las concepciones Laplaciana y frecuencial

Las actividades giran alrededor de la problemática que generan las interpretaciones clásica y frecuencial (objetivo 1). Diversos textos de divulgación matemática (Paulos, 1998; Stewart, 1998) dan oportunidades para discutir acerca del proceso histórico de construcción de la probabilidad (objetivo 5), de las intuiciones probabilísticas informales (objetivo 3), de las diferentes interpretaciones de la probabilidad y de una visión inmovilista de la matemática que cede terreno a otra visión diferente, la del debate y la controversia (objetivo 5). Las carencias de las concepciones clásica y frecuencial de la probabilidad se hacen visibles, y cobra forma una novedosa interpretación de la probabilidad: la interpretación subjetiva.

2. Introducción de la concepción subjetiva de la probabilidad

Se trata de que los estudiantes comprendan cómo un enjuiciamiento personal de la probabilidad puede también participar en el proceso formal de cálculo de la probabilidad (objetivo 2). A modo de ejemplo, mostramos en la Tabla 1 dos de las actividades que trabajamos en clase.

Tabla 1. Actividades de introducción de la probabilidad subjetiva

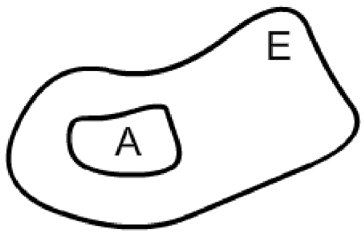
Problema 1 (máquina Bayesiana). Participamos en un concurso en el que se trata de adivinar cuántas bolas blancas y negras hay en una bolsa. Sólo sabemos que hay en total cuatro bolas. El presentador saca una bola de la bolsa, muestra su color, reintegra la bola a la bolsa y repite la misma operación varias veces. ¿Cómo podríamos decidir cuántas bolas hay de cada color?
Problema 2. Eres jefe/a de suministros de una empresa de transporte y debes comprar carburante. El precio oscila mucho, de modo que ahorrarás dinero si ordenas la compra antes de una subida de precio. Pero tampoco interesa comprar antes de una bajada del precio. La OPEC tiene previsto reunirse para decidir su política de producción de crudo para los próximos tres meses. Cada vez que aumenta la producción, el precio del carburante disminuye. La OPEC parece decidida a aumentar su producción al menos los dos primeros meses y quizá también el tercero. Sin embargo, se sabe que Irán hará todo lo posible por impedirlo. Quizá incluso consiga que la producción disminuya, con lo cual aumentaría el precio. Debes decidirte: comprar el combustible ahora o bien hacerlo dentro de tres meses.

La situación del problema 1 es sencilla de simular con una hoja de cálculo. Se utiliza el teorema de Bayes para calcular la probabilidad de cada uno de los cinco posibles contenidos de la bolsa después de cada nueva extracción. Sin embargo, ¿cuáles son las probabilidades iniciales de estos posibles contenidos? Quizá existan razones *sujetivas* para pensar que no son equiprobables. ¿Cómo van cambiando las probabilidades a medida que se extraen bolas y en función de los valores iniciales de probabilidad? (objetivo 2). En el problema 2 se trabaja con el espacio muestral E={SSS, SSB, SBS, BSS, SBB, BSB, BBS, BBB}, donde S significa "subida del precio en ese mes" y B "bajada del precio en ese mes". La probabilidad de cada suceso elemental se asigna subjetivamente, y debe decidirse el criterio de decisión final. Por ejemplo, el criterio podría consistir en calcular la probabilidad del suceso A="el precio del combustible sube al menos en dos de los tres meses" y comprar el combustible si p(A)>0.8. Por supuesto, la decisión final está fuertemente influenciada por los valores de probabilidad asignados subjetivamente (objetivo 2). Se trata de un problema en el que los estudiantes hacen uso de la probabilidad como criterio de medición del riesgo (objetivo 5), aspecto que Kapadia (2008) y Yingkang (2008) señalan tan importante como ausente en los currículos.

3. Introducción de la concepción axiomática de la probabilidad

Nuevas situaciones problemáticas hacen necesaria una concepción de la probabilidad que admita criterios más amplios de medición: la concepción axiomática (objetivos 2, 4 y 5). La Imagen 1 ilustra una de las situaciones que se discuten en clase, de nuevo relacionada con la medición de riesgos.

Imagen 1. Múltiples significados para la probabilidad del recinto A



La zona completa E puede representar una plancha metálica sobre la que se deposita óxido de forma aleatoria; o también una zona geográfica contaminada por una nube tóxica que se dispersa al azar. Nos interesará calcular la probabilidad de cada subregión $A \subset E$. En el primer caso, p(A) puede ser la probabilidad de que sobre A se deposite una cantidad de óxido excesiva. En el segundo caso, p(A) puede ser la probabilidad de que en el núcleo de población A se alcance un nivel de contaminación peligroso. Hacemos ver en clase cómo cada uno de estos casos requerirá un criterio completamente distinto con el que evaluar la probabilidad de cada región A, y este criterio no siempre será el frecuencial. El marco teórico de la probabilidad que admite esta variedad de criterios, incluyendo la asignación subjetiva de probabilidades (objetivos 2 a 5), será el de la axiomática de Kolmogorov, que solo dicta las propiedades mínimas que debe verificar la función de probabilidad, sin ninguna otra restricción. Las preguntas básicas que se abordan ahora: ¿Qué es una axiomática? ¿Cuál es la diferencia entre axioma y propiedad? ¿Por qué usar la axiomática de Kolmogorov y no cualquier otra? ¿Quién decide qué axiomática debe emplearse? ¿Cómo pueden ahora (re)definirse de los conceptos de probabilidad que ya conocíamos? ¿Serán ciertos también ahora resultados como el teorema de la probabilidad total o el de Bayes? ¿Cómo puede una función y(x) definir un criterio axiomáticamente admisible con el que medir la probabilidad? La Tabla 2 muestra tres de los problemas que los estudiantes trabajan.

Tabla 2. Actividades de introducción de la probabilidad axiomática

Problema 3. Vamos a contruir una axiomática diferente, formada por los axiomas A1, A2 y A3. Analiza esta nueva axiomática.

Axioma A1.-$p(A^C)=1-p(A)$
Axioma A2.-$p(\emptyset)=0$
Axioma A3.-$p(E)=1$

Problema 4. Razona si son ciertos los siguientes enunciados, donde A, B y C son sucesos y p una función de probabilidad:

a.-Si $p(C)=0$, entonces $C=\emptyset$. (Falso)
b.-Si $A\subset B$ entonces $p(A) \leq p(B)$. (Cierto)
c.-Es posible que $A\neq B$, $A\subset B$ y sin embargo $p(A)=p(B)$. (Cierto)
d.-Si A y B son sucesos independientes, también los sucesos contrarios A^c y B^c son sucesos independientes. (Cierto)

Problema 5 (Falacia del jugador). Muchos jugadores que están apostando por un número en la ruleta, lotería, etc, creen que a medida que aumenta el número de jugadas en las que su número no ha salido, aumenta también la probabilidad de que su número salga en la siguiente jugada. Supongamos que un jugador está apostando a los dados por el número 3, que lleva k jugadas en las que no ha salido su número y que cree que la probabilidad de que salga 3 es mayor en la jugada (k+1) que en la anterior jugada k. Un posible modelo matemático para evaluar la probabilidad en la jugada (k+1) bajo esta creencia es el siguiente:

$$E=\left\{3,\bar{3}\right\},\quad p(\bar{3})=\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}\quad p(3)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{k+1}\quad k=0,1,2\ldots\quad \text{modelo (1)}$$

mientras que en una interpretación frecuencial de la probabilidad, suponiendo que el dado está equilibrado, el modelo será:

$$E=\left\{3,\bar{3}\right\},\quad p(\bar{3})=\frac{5}{6},\quad p(3)=\frac{1}{6}\quad \text{modelo (2)}$$

Analizar los modelos (1) y (2) desde la óptica de la axiomática. Estudiar cuál de ellos se ajusta mejor a los resultados experimentales.

En el problema 3, la "axiomática" propuesta no es tal, porque A2 se demuestra mediante A1 y A3. La idea a discutir en clase es que no se trata de escribir sistemas axiomáticos arbitrarios, sino sistemas que den lugar a propiedades y conceptos útiles. En el problema 4 se trabaja de modo abstracto con la axiomática y se obtienen resultados esperables en los apartados (b) y (d) y conflictivos en los apartados (a) y (c). En el problema 5 exploramos una concepción errónea conocida con el nombre de *falacia del jugador*, en la idea de que provoque en los alumnos un nuevo conflicto cognitivo. Según Peard (2008), trabajar en el aula este error contribuye a reforzar las actitudes responsables hacia el juego. Los estudiantes exploran mediante simulaciones la utilidad de dos criterios diferentes para medir la probabilidad, ambos admisibles desde el punto de vista de la axiomática. Sin embargo, el modelo subjetivo (1) resultará inservible para fines prácticos, a diferencia del modelo frecuencial (2). La idea es que un modelo no solo debe ser formalmente impecable, sino también ser capaz de formular inferencias acerca del fenómeno estudiado.

Algunos de los enunciados que utilizamos son similares a cuestiones y ejercicios de los libros de texto y también son utilizados en la enseñanza habitual, pero aquí se emplean de forma diferente. Se hace un tratamiento de las dificultades de los estudiantes, se desarrolla sistemáticamente la necesidad de modelos probabilísticos cada vez más generales y se proporcionan oportunidades para revisar los conceptos y los modelos con progresiva profundidad, según una estrategia en espiral (Yingkang, 2008). Por ejemplo, una vez construida la conceptualización axiomática de la probabilidad, se discuten diversos problemas en los que es plausible revisitar desde esta nueva óptica las interpretaciones frecuencial y subjetiva (problema 5 de la Tabla 2), y los conceptos y resultados que ya se habían establecido en lecciones anteriores.

CONTEXTO Y ORGANIZACIÓN DE LA ENSEÑANZA

Esta secuencia de enseñanza viene siendo aplicada y evaluada en España con grupos de estudiantes (N=35-50) de segundo curso de Ingeniería en la Universidad del País Vasco (19-20 años), en la asignatura Métodos Estadísticos de la Ingeniería. Esta asignatura cuenta con una docencia de tres horas semanales de aula más una hora de ordenador, con un total de 60 horas. Su programa incluye estadística descriptiva elemental, probabilidad, variables aleatorias y análisis de la regresión. En este trabajo presentamos los resultados obtenidos con un grupo de 46 estudiantes de la especialidad de Ingeniería en Electricidad. Utilizamos aproximadamente ocho horas de clase para completar todas las actividades.

De acuerdo con el enfoque socio-constructivista adoptado, la metodología de trabajo en el aula incluye un análisis de los aspectos sociales del problema, la discusión y búsqueda de soluciones en grupo, la puesta en común a cargo del profesor y un informe final del grupo.

EVALUACIÓN DE LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA

Hemos utilizado varios métodos de adquisición de datos a fin de contrastar la validez y la fiabilidad del trabajo (Cohen et al., 2007, p. 141). La secuencia de enseñanza se evaluó de cuatro formas. En primer lugar, buscamos algún dato acerca de la efectividad de la secuencia y del modelo de enseñanza, comparada con la del enfoque de la enseñanza habitual. Se utilizó un cuestionario post-test con problemas relacionados con los objetivos de aprendizaje (ítems 1 a 4 del anexo). Las cuestiones fueron contestadas por los estudiantes del grupo experimental (N=46) y por dos grupos de estudiantes que seguían la enseñanza habitual del tema a cargo de otros profesores (grupo de control, N=60).

El perfil de ingreso de los estudiantes de los grupos experimental y de control era similar porque a), habían recibido en su enseñanza secundaria al menos un curso de matemáticas que incluye una introducción a la probabilidad y la estadística; b), superaron el mismo examen de matemáticas para acceder a la universidad; y c), fueron sometidos al inicio del curso a un cuestionario de probabilidad que ya hemos validado mediante otras investigaciones (Guisasola y Barragués, 2002a,b; Barragués et al., 2005). La única distinción significativa entre ambos grupos de estudiantes fue el tipo de enseñanza recibida y los objetivos de aprendizaje establecidos. Los estudiantes del grupo de control recibieron su enseñanza a cargo de profesorado que contaba con amplia experiencia docente, según la secuenciación habitual en la universidad: presentación formal de conceptos, propiedades y ejemplos. No se consideró de forma significativa el trabajo en equipos de alumnos ni se prestó atención a las dificultades de aprendizaje en el sentido que señala la didáctica.

En los ítems utilizados en este primer instrumento de evaluación, los estudiantes debían elegir una respuesta de entre las propuestas y justificarla. Los ítems 1 y 2 son ejemplos del tipo de situaciones que utilizamos para detectar el uso de heurísticas no probabilísticas (objetivo 3). Estos dos ítems tratan de revelar el uso de un mecanismo de enjuiciamiento llamado heurística de representatividad, que consiste en estimar la probabilidad de un suceso de acuerdo a lo representativo de cierta población que parece ser dicho suceso (Kahneman y Tversky, 1972). El uso de la heurística de representatividad es un criterio subjetivo con el que medir la verosimilitud de un suceso, y por ello creemos que su utilización en vez de un razonamiento formal constituye un posible criterio para comparar el aprendizaje logrado por los estudiantes de ambos grupos.

En la situación del ítem 1, el perfil que se describe de R.M. parece representativo de una persona que colabora con una ONG y puede concluirse que el suceso (2) es más probable que el (1). Sin embargo, un análisis del modo en que se han definido ambos sucesos revela que (1) está construido con una sola condición, mientras que (2) está construido además con una segunda condición, por tanto $p(2) \leq p(1)$.

Con la situación del ítem 2 intentamos detectar el uso del criterio subjetivo de existencia de simetrías en una muestra aleatoria a la hora de establecer su probabilidad (objetivos 2 y 3). La probabilidad de cada secuencia es la misma, pero el uso erróneo de una heurística de representatividad puede sugerir que las simétricas muestras (2), (3) y (4) son menos probables que la (1).

Los ítems 3 y 4 se han construido para detectar diversos tipos de sesgo (objetivo 3). En el ítem 3 no se proporciona información acerca de los valores de $p(R)$, $p(V)$, $p(AF)$ y $p(AI)$. La respuesta más general consiste en escribir la probabilidad en términos de dos parámetros desconocidos $p(\{R,V\})=p(R)+p(V)$. Pero también consideramos correcta una respuesta que asigne *subjetivamente* valores numéricos a $p(R)$, $p(V)$, $p(AF)$ y $p(AI)$, a condición de que se reconozca explícitamente la falta de datos y se decida establecer los valores elegidos como hipótesis (objetivos 2 y 3). Es de señalar que la creencia en la equiprobabilidad de todos los sucesos asociados a un experimento aleatorio es una nueva dificultad de aprendizaje que se conoce con el nombre de sesgo de equiprobabilidad (Lecoutre, 1985) (objetivo 3). Nosotros admitimos en el ítem 3 como correcta una respuesta que suponga la equiprobabilidad, siempre y cuando tal suposición se establezca explícitamente como hipótesis (Romo y Oktaç, 2007)

El ítem 4 admite una discusión parecida a la del ítem 3. La solución con mayor capacidad explicativa es la solución paramétrica en términos de las probabilidades de subida de las acciones de cada una de las tres empresas, $p(S_1)$,

$p(S_2)$, $p(S_3)$. Este ítem se ha utilizado también para detectar cierta forma de interpretación causal del azar, llamada sesgo determinista, que se mostraría a través de respuestas del tipo “la economía es un fenómeno demasiado complejo y por ello no es posible realizar predicciones” (objetivo 3). Pero, en relación con el aprendizaje de la probabilidad subjetiva, los ítems 3 y 4 sirven para estudiar de qué modo los estudiantes tratan la ausencia de información sobre valores de probabilidad y cómo lo justifican.

El segundo instrumento de evaluación (ítems 5 a 7) se aplicó también a ambos grupos de estudiantes. Uno de los objetivos era detectar el uso de estrategias no probabilísticas (objetivo 3), pero en el grupo experimental deseábamos valorar también la comprensión metodológica que habían alcanzado los estudiantes trabajando en equipo, y por ello planteamos las situaciones problemáticas para su resolución en equipo. En cambio, para el grupo de control planteamos las situaciones a una muestra aleatoria de 15 alumnos, a quienes entrevistamos individualmente a fin de profundizar en sus formas de razonamiento probabilístico.

La situación del ítem 5 buscaba los mismos objetivos que la del ítem 3 y usamos idénticos criterios de evaluación. Nótese que puede resultar más plausible que en el ítem 3 la hipótesis de equiprobabilidad en la elección de camino en cada bifurcación. Pero la dificultad inicial es idéntica: existen probabilidades desconocidas acerca de cuyos valores hay que tomar una decisión, quizá subjetivamente.

En la situación del ítem 6 valoramos el establecimiento explícito de la regla de Laplace como metodología a aplicar, el cálculo correcto de la probabilidad (10^{-5} cada número) y reconocer como idéntica la segunda situación que se plantea en el ítem. De nuevo, el uso erróneo de una heurística de representatividad puede sugerir que las probabilidades de los tres números (22211, 12345 y 83056) son diferentes a juzgar por su aspecto, o razonamientos del tipo “es más probable extraer el número 12345 con el segundo bombo porque con el primero hay que formar el número dígito a dígito, mientras que con el segundo el número ya está formado” (Barragués et al., 2005) (objetivo 3). El ítem 7 describe una conflictiva situación conocida como urna de Falk (Sáenz, 1998; Borovcnik y Bentz, 1991; Borovcnik, 2008b). Se trata de calcular la probabilidad de un suceso (AS1) sabiendo que otro suceso *posterior en el tiempo* ha tenido lugar (AS2). La urna de Falk puede servir para detectar la confusión entre la independencia causal y la estocástica, que llevaría en el ítem 7 a elegir incorrectamente la opción (a). Se trata una de las muchas dificultades que tiene el concepto de independencia (Batanero y Díaz, 2008) (objetivo 3). El resultado fundamental que los estudiantes deben emplear en este ítem es el teorema de Bayes, que permite revisar los valores de probabilidad a priori (p(AS1)=1/2) a la luz de la nueva información disponible (AS2). En este caso valoramos la interpretación correcta de la situación y la aplicación del teorema de Bayes, concluyendo p(AS1/AS2)=1/3.

El tercer instrumento de evaluación consistió en una entrevista a los equipos de estudiantes del grupo experimental. Las cuestiones planteadas tenían como objetivo observar la perspectiva que habían adquirido acerca de la problemática de las diferentes concepciones de la probabilidad (objetivos 1 y 2), de la necesidad de una axiomática (objetivo 4), del uso de criterios ingenuos para asignar probabilidades (objetivo 3) y del proceso de construcción de un marco teórico científico (objetivo 5).

Con el cuarto instrumento de evaluación estudiamos las actitudes de los estudiantes y su valoración del trabajo realizado y del marco teórico de la probabilidad. Se pasó un cuestionario anónimo con preguntas que versaban acerca de los contenidos, la forma y la satisfacción con que se había trabajado.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y EJEMPLOS

Respecto al cuestionario post-test de razonamiento probabilístico (ítems 1 a 4), se formuló para cada ítem de forma separada la hipótesis nula de independencia entre los factores ‘porcentaje de respuestas correctas‘ y ‘grupo de alumnos’, y empleando un test Chi-cuadrado (Cohen, 2007, p. 525) se rechazó dicha hipótesis con un nivel de confianza 0.95 o mayor, esto es, concluimos que el porcentaje de respuestas correctas es significativamente superior en el grupo experimental. La

Tabla 3 muestra para cada ítem los porcentajes de respuestas correctas, el estadístico χ^2 y el p-valor.

TABLA 3

	% respuestas correctas			
	Grupo experimental (N=46)	Grupo de control (N=60)	Estadístico χ^2	p-valor
Ítem 1	58.1	16.7	36.7	<<0.01
Ítem 2	87	50	31.6	<<0.01
Ítem 3	80.4	60	10.0	0.016
Ítem 4	53.5	16	31.0	<<0.01

Respuestas correctas para los ítems 1 a 4

Las tablas 4 a 7 muestran el modo en que se distribuyeron los diferentes tipos de respuestas (una misma respuesta podía contener varios errores diferentes). Nótese cómo los estudiantes del grupo experimental ofrecieron respuestas de mayor calidad explicativa que los del grupo de control.

Tabla 4. Tipos de respuesta obtenidos en el ítem 1

	% de respuestas	
Tipos de respuesta	Grupo experimental	Grupo de control
Emplea la expresión de la probabilidad de la intersección (correcta)	30.2	0
El suceso (1) se forma mediante una única condición mientras que (2) exige una segunda condición, por tanto (2) es menos probable (correcta)	27.9	16.7
Heurística de representatividad (incorrecta)	9.3	77.1
En blanco o no codificable (incorrecta)	32.6	6.3

Tabla 5. Tipos de respuesta obtenidos en el ítem 2

	% de respuestas	
Tipos de respuesta	Grupo experimental	Grupo de control
La probabilidad de cada secuencia es la misma puesto que todas ellas tienen la misma longitud y según el enunciado se supone equiprobabilidad (correcta)	87	50
Heurística de representatividad (incorrecta)	0	28.1
Confusión entre un resultado elemental y un conjunto de sucesos elementales. Por ejemplo, confundir el resultado CCCCXXXX, con el conjunto de los 70 resultados que pueden formarse con 4 caras y 4	4.3	18.7

cruces (incorrecta)		
En blanco o no codificable (incorrecta)	8.7	6.3

Tabla 6. Tipos de respuesta obtenidos en el ítem 3

	% de respuestas	
Tipos de respuesta	Grupo experimental	Grupo de control
Solución paramétrica (correcta)	21.7	0
No es posible el cálculo porque la probabilidad de cada estado es desconocida (correcta)	23.9	45.7
Establece explícitamente equiprobabilidad de cada estado (correcta)	34.8	14.3
Errores de cálculo de la probabilidad (incorrecta)	6.5	0
Sesgo de equiprobabilidad (incorrecta)	8.6	34.3
En blanco o no codificable (incorrecta)	8.7	5.7

Tabla 7. Tipos de respuesta obtenidos en el ítem 4

	% de respuestas	
Tipos de respuesta	Grupo experimental	Grupo de control
Solución paramétrica general (correcta)	4.7	0
Formula explícitamente la hipótesis de probabilidad de subida de las acciones igual a 0.5 para cada empresa y se obtiene correctamente la solución numérica de 0.5 (correcta)	11.6	0
Las probabilidades subida de las acciones de cada empresa son desconocidas y en consecuencia no es posible calcular la probabilidad pedida (correcta)	37.2	16
Error en el cálculo de la probabilidad (incorrecta)	4.7	52
Sesgo de equiprobabilidad (incorrecta)	11.7	54.7
Sesgo determinista (incorrecta)	7	20
En blanco o no codificable (incorrecta)	27.9	9.3

Ya se ha indicado que la segunda prueba de evaluación se aplicó como entrevista personal a una muestra de 15 alumnos del grupo de control y como tareas a resolver en equipo para los del grupo experimental. Para los primeros, detectamos importantes deficiencias en el razonamiento, en términos de una creencia implícita en la equiprobabilidad (ítem 5), ideas erróneas acerca del azar (ítem 6), interpretación causal del azar y falta de comprensión del concepto de probabilidad condicionada (ítem 7) (Barragués et a. 2005; Guisasola y Barragués, 2002a, b). Pero en el grupo experimental, la mayoría de los 13 equipos de estudiantes que se formaron afrontó las tareas correctamente desde el marco teórico estudiado (8 equipos en el ítem 5, 11 equipos en el ítem 6 y 10 equipos en el ítem 7). He aquí dos ejemplos de respuesta correcta tomados del informe final que los equipos debían entregar.

Ejemplo 1. Respuesta clasificada como correcta (ítem 5)

Podríamos elegir varias hipótesis, porque no sabemos si el caminante tiene tendencia a ir siempre hacia el mismo camino. Imaginemos que el caminante elige izquierda o derecha lanzando una moneda no cargada al aire, eligiendo izquierda si sale cara o derecha si sale cruz.

H='Equiprobabilidad a la hora de elegir el camino'

[En la Imagen 2 marcan como X el camino derecho desde P y como Y el izquierdo]

p(1)=p(Y)p(1/Y)=0.5 0.5=0.25

p(3)=p(X)p(3/X)=0.5 0.5=0.25

p(2)=1-p(1)-p(3)=1-0.5=0.5

Si rechazamos la hipótesis de equiprobabilidad y trabajamos con parámetros:

Decidimos llamar a la probabilidad de que el caminante vaya a la izquierda p(i) y la de que vaya a la derecha 1-p(i)

p(1)=(1-p(i))(1-p(i))

p(3)=p(i)p(i)

p(2)=1-p(1)-p(3)

Consideramos que en el punto X la probabilidad de que vaya a la izquierda es q(i) y la probabilidad de que vaya a la derecha es 1-q(i). En el punto Y la probabilidad de ir a la izquierda es r(i) y la de que vaya hacia la derecha es 1-r(i)

p(1)=(1-p(i))(1-r(i))

p(3)=p(i)q(i)

p(2)=1-p(1)-p(3)

Ejemplo 2. Respuesta clasificada como correcta (ítem 6)

Al azar le da igual, luego los tres resultados tienen la misma posibilidad de salir. Podemos suponer la hipótesis de equiprobabilidad, es decir, todos los números tienen la misma probabilidad de salir. En un principio podemos llegar a pensar que una combinación como 83056 que no tiene para nosotros ningún orden, sea más fácil de salir que el 12345 que es un resultado peculiar. Pero ninguna combinación tiene más tendencia a salir que otra.

La probabilidad de que salga cada número de estos la podemos hallar así, mediante la regla de Laplace:

p(22211)=p(12345)=p(83056)=casos favorables/casos posibles

Hipótesis: importa el orden (22211$\neq$21212)

p(22211)=1/$VR_{10,5}$=10^{-5}

La probabilidad de que sea un número cualquiera es: p(nº)=10^{-5}

Podemos comprobar que las 2 situaciones son iguales, por ello no cambia la situación. Si en la primera urna no reemplazamos las bolas, la probabilidad cambiaría, pero como no es así, en la primera urna vamos construyendo el número sacando las bolas de una en una y en el segundo sacamos el número directamente.

En el ejemplo 1, obsérvese el análisis cualitativo previo, el establecimiento explícito de la hipótesis de equiprobabilidad y las dos posteriores generalizaciones. En el ejemplo 2, el equipo analiza cualitativamente la situación, discutiendo el "aspecto" de los dos primeros números (22211 y 12345). El conflicto parece resolverse rechazando la idea de atribuir mayor o menor probabilidad en función de este criterio. En cinco de los equipos se observaron discusiones similares, de modo que es de suponer que los estudiantes tienen muy presentes las discusiones en clase acerca de esta cuestión (Barragués y Guisasola, 2009, 2007).

Respecto a los resultados de las entrevistas (tercera prueba de evaluación), los equipos de trabajo parecen entender las carencias de la interpretación frecuencial de la probabilidad y la necesidad de la axiomática, y se han formado una opinión acerca de su significado (objetivos 1, 2 y 4). A modo de ejemplo, he aquí un fragmento de entrevista.

Ejemplo 3. Fragmento de entrevista a equipo de estudiantes

Profesor: ¿Cuál de las interpretaciones de la probabilidad os parece más útil o sugerente?

Estudiantes: Yo pienso que aunque sea inconscientemente lo que cuenta es la probabilidad subjetiva. Cuando uno está trabajando, yo, por ejemplo, cuando estoy trabajando, por mucho que sea ingeniero, igual quien lleva muchos años sabe detectar mejor los problemas, y eso es probabilidad subjetiva, la experiencia. Igual para algo matemático, para reflejar la situación de unas variables, es mejor la frecuencial. Pero para el uso diario es mejor la subjetiva.

Profesor: ¿Y la interpretación Laplaciana de la probabilidad?

Estudiantes: Juegos de azar, cosas muy concretas no sometidas a ninguna variable.

Profesor: ¿Dónde entra en todo esto la axiomática?

Estudiantes: La axiomática de Kolmogorov viene a decir que vale para cualquier interpretación, a partir de ahí se demuestran las propiedades, son unos mínimos a cumplir.

Profesor: ¿Quién nos dice cómo asignar un valor de probabilidad a cada suceso?

Estudiantes: Uno mismo. Basándose en lo que quiera, en subjetiva, en frecuencial o en equiprobable...

Nótese en el ejemplo 3 cómo los alumnos parecen haberse formado una opinión acerca de las distintas acepciones de la probabilidad y entienden la utilidad de la axiomática. Respecto a las ideas acerca del modo en que se configuran las muestras aleatorias, los estudiantes parecen entender el conflicto que hay entre una subjetividad ingenua y la objetividad que proporcionan los resultados experimentales que se obtienen (objetivo 3). Sin embargo, estas ideas ingenuas son muy resistentes al cambio, como ilustra el ejemplo 4.

Ejemplo 4. Fragmento de entrevista a equipo de estudiantes

Profesor: Estudiamos el "aspecto" de una secuencia aleatoria. Realmente, ¿una secuencia aleatoria debe tener algún "aspecto" determinado?

Estudiantes: Si hay equiprobabilidad al azar le da igual las ideas que tengas en la cabeza sobre si 2323 es menos probable.

Profesor: ¿Os pareció extraño que una secuencia como 12345 o 01010 aparezca con igual frecuencia relativa a largo plazo que cualquier otra?

Estudiantes: Sí, porque la cabeza está estructurada de un modo totalmente diferente al azar. Para funcionar mediante métodos, lo aplicas y sale. Ahí entra lo de la probabilidad subjetiva. Yo ya tenía la idea de que da igual el 11111 que otro, pero si te dieran a comprar ese cartón yo no lo compraría.

Respecto a la adquisición de una visión más ajustada del proceso de construcción de un marco teórico científico (objetivo 5), los estudiantes señalan a una situación problemática como punto de partida de un trabajo científico y perciben que el azar tiene influencia en cualquier situación real. Veamos algún ejemplo.

Ejemplo 5. Fragmento de entrevista a equipo de estudiantes

Profesor: Los científicos, a la hora de comenzar una investigación, ¿de dónde parten?

Estudiantes: De un problema. Surge un problema y hay que modelizarlo y hay que resolverlo.

Profesor: ¿Y qué entendéis vosotros por problema?

Estudiantes: Algo que no tiene solución, que no tenemos método, que tenemos que encontrar.

Profesor: ¿Y cuál ha sido nuestro problema?

Estudiantes: Intentamos diseñar un circuito y vimos que simplemente con las ecuaciones que hay en electricidad no nos valían porque los valores que influyen son aleatorios.

Profesor: Entonces, ¿estas ecuaciones no tienen utilidad?

Estudiantes: Si, son necesarias para modelizar el problema pero no son suficientes. Valen, pero hay otros factores que influyen también.

Profesor: Y en otras situaciones, aunque no sean de electricidad, ¿Creéis que aparecerán dificultades similares?

Estudiantes: En la primera charla ya hablamos de la meteorología, de la economía...Para modelizar, para tener una cierta idea de cómo funciona sí podemos, pero dar una respuesta segura, no es posible.

Ejemplo 6. Fragmento de entrevista a equipo de estudiantes

Profesor: Eso de que puedan interpretarse de modo diferente los conceptos matemáticos, ¿No se escapa de la idea de la matemática que tenéis?

Estudiantes: Sí, lo que hemos estudiado hasta ahora de matemáticas son cosas exactas, calculas una ecuación con dos resultados posibles, y es uno o es otro. Pero lo que hemos estudiado en probabilidad y estadística es que hay un abanico de posibilidades, que ningún resultado es más legítimo, ninguna interpretación que cumpla la axiomática es más legítima, al fin y al cabo hay muchas variables que no puedes tener en cuenta y que pueden alterar el resultado que tú has predicho.

Profesor: ¿Cuál es la versión de la matemática que os parece más real? ¿La de las definiciones y teoremas establecidos e inmóviles o la de la controversia, la discusión, el debate y la diferencia de interpretaciones?

Estudiantes: La de la controversia y el debate, porque es más real, contempla mejor la realidad. La matemática es exacta, surge discusión al aplicarla.

Nótese en el ejemplo 5 cómo los estudiantes resumen el problema estructurante que ha servido para construir el marco teórico probabilístico, esto es, la necesidad de hacer participar variables aleatorias en el trabajo de diseño de un circuito eléctrico (Barragués y Guisasola, 2009). En el ejemplo 6 se aprecia cómo los alumnos perciben discrepancias entre el significado que, para ellos, tenían previamente de las matemáticas y los nuevos aspectos que se han hecho visibles a lo largo del programa de actividades, relacionados con los diferentes modos de interpretar los conceptos, la falibilidad de las predicciones y la limitación en el alcance de las teorías matemáticas.

Finalmente, respecto al interés y actitud de los estudiantes experimentales (cuarta prueba, escala de 1 a 10), los resultados muestran una actitud positiva hacia los contenidos trabajados. Los alumnos creen que los objetivos perseguidos son interesantes (media=7.2, desviación típica=1.3, moda=7, mediana=7), que el método utilizado proporciona buenas condiciones para aprender (media 7.1, desviación típica=1.4, moda=7, mediana=7) y que se percibe un clima de cooperación en clase (media=6.3, desviación típica=1.3, moda=6, mediana=6).

CONCLUSIONES

Nuestro trabajo trata de ser una contribución a la búsqueda de métodos efectivos de enseñanza y de evaluación del aprendizaje de la teoría de la probabilidad en estudios técnicos universitarios. Nos hemos centrado en la introducción de las concepciones subjetiva y axiomática de la probabilidad porque encontramos en ellas un problema didáctico muy poco investigado. La bibliografía señala la gran importancia que tiene la concepción subjetiva, pero prácticamente no se considera en los currículos, y menos aún en los tecnológicos. Proponemos un modelo de enseñanza en el que los conceptos y los procedimientos se construyen investigando en equipo los problemas que los originan. Los resultados ofrecen indicios de que los estudiantes han adquirido hábitos metodológicos avanzados para la resolución de problemas, tales como el análisis cualitativo, la formulación de hipótesis y la búsqueda soluciones generales. Las entrevistas a los equipos de trabajo revelan que los estudiantes pueden haber adquirido cierta perspectiva de los significados de la probabilidad y de la construcción de un marco teórico científico, en particular de una teoría matemática. Finalmente, los estudiantes parecen valorar positivamente la utilidad de la teoría de la probabilidad como marco para la resolución de problemas reales, y se muestran satisfechos con el tipo de trabajo llevado a cabo en el aula.

Ahora bien, los resultados obtenidos no pueden atribuirse exclusivamente a las actividades que los estudiantes han llevado a cabo en esta unidad temática, dedicada a las concepciones subjetiva y axiomática de la probabilidad. Previamente se había llevado a cabo un similar proceso de construcción basado en problemas de los conceptos y resultados probabilísticos básicos, y un tratamiento de algunas de las múltiples dificultades de los alumnos. Así pues, es en este contexto global de aplicación del modelo de enseñanza descrito, donde interpretamos los resultados obtenidos.

A la hora de realizar conclusiones e implicaciones para la enseñanza es necesario tener en cuenta que los profesores que implementan la secuencia son conocedores de las estrategias de enseñanza utilizadas y han participado en su diseño. Así pues, no podemos aportar evidencias para contextos más generales o con profesorado no formado. Nuestro proyecto no se diseñó con la intención de proporcionar evidencias concluyentes sobre la causa de cualquier mejora en el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, nosotros pensamos que la existencia de una relación entre la mejoría del aprendizaje, los objetivos de aprendizaje definidos y la implementación de la secuencia de enseñanza diseñada es una explicación plausible. Hay evidencias de que los estudiantes obtuvieron mejores resultados en objetivos que también se contemplan en la enseñanza habitual (operativa del cálculo de probabilidades), pero además hemos recogido resultados positivos en otros objetivos (epistemológicos y actitudinales) que tienen una escasa o nula presencia en la enseñanza habitual. Pero quedan abiertos muchos interrogantes. Por ejemplo, sería necesario estudiar los efectos a medio y largo plazo que tiene un programa como el nuestro sobre un conjunto de arraigadas concepciones erróneas acerca del azar, que no podemos suponer relegadas. Continuar con el diseño de materiales y de estrategias, así como en su evaluación para muestras más amplias y de distintos centros escolares nos parece una línea de investigación crucial para intentar comprender ‘cómo’ y ‘en qué condiciones’ los estudiantes aprenden.

REFERENCIAS

Armella, L. M. & Waldegg, G. (1992). Constructivismo y Educación Matemática. *Educación Matemática*, 4 (2), 7-15.

Barragués J.I. & Guisasola J. (2006). La introducción de los conceptos relativos al azar y la probabilidad en libros de texto universitarios. *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (2), 242-256.

Barragués J.I., Guisasola J. & Morais, A. (2005). Concepciones de los estudiantes de primer ciclo de universidad sobre estimación de la probabilidad. *Educación Matemática*, 17 (1), 55-85.

Barragués J.I. & Guisasola J. (2007). ¿Qué son las secuencias aleatorias? Enseñanza de la probabilidad basada en la resolución de problemas. *UNO: Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 107-123.

Barragués J.I. & Guisasola J. (2009). Una propuesta para la enseñanza de la probabilidad en la universidad basada en la investigación didáctica. *Educación Matemática*, 21 (3), 127-162.

Borovcnik, M., Bentz, H. J. & Kapadia, R. (1991). A Probabilistic Perspective. En R. Kapadia & M. Borovcnik (Comps.), *Chance encounters: probability in education* (27-70). Dordrecht (The Netherlands): Kluwer Academic Publishers.

Borovcnik, M. & Peard, R. (1996). Probability. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Comps.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 239-287). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2007). *Research methods in Education*. New York: Routledge.

Guisasola J. & Barragués J. I. (2002a). Heurísticas y sesgos de los estudiantes de primer ciclo de universidad en la resolución de problemas de probabilidad. *Enseñanza de las Ciencias*, 20 (2), 285-302.

Guisasola J. & Barragués J. I. (2002b). Formas de razonamiento de los estudiantes en el cálculo de la probabilidad en cursos introductorios de estadística de primer ciclo de universidad. *Epsilon*, 53, 219-242.

Guershon, H. Y Trgalová, J. (1996). Higher Mathematics Education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Comps.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 675-700). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kahneman, D. & Tversky, A. (1972). Subjetive Probability: a judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, 5, 430-454

Kapadia, R. & Borovcnik, M. (1991). *Chance encounters: probability in education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J. (1997). Confronting Reform. *The American Mathematical Montly*, 104 (10), 955-962.

Lecoutre, M. P. (1985). Effect d´informations de nature combinatoire et de nature frécuentielle sur le judgements probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 193-213.

National Research Council (1995). *National Standards for Science Education*. Whashington D. C. National Academy Press.

Paulos, J. A. (1998). La probabilidad. En J.A. PAULOS, *Más allá de los números* (211-215). Barcelona (España): Tusquets Editores.

Romo, A. & Oktaç, A. (2007). Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. *Relime*, 10 (1), 117-143.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Comps.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 827-876.

Stewart, I. (1998). Una ramera llamada fortuna. En I. Stewart, *De aquí al infinito* (pp. 181-195). Barcelona: Drakontos.

Solow, A. (1993). *Learning by discovery*. MAA notes, 27. USA: MAA.

FUENTES ELECTRÓNICAS

Borovcnik, M. (2008a). A plea for relatively strong role for probability within stochastics curricula. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading & A. Rossman, (Comps.), Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics, Challenges for Teaching and Teacher Education, Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table conference. Recuperado el 22 de abril de 2010, de:

http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Plenary_Sessions/Panel2_Borovcnik.pdf

BOROVCNIK, M. (2008b). Panel discussion: Some fundamental ideas in probability. Topic Study Group 13. Monterrey: ICME 11. Recuperado el 22 de abril de 2010, de:

http://www.ethikkommission-kaernten.at/ICME11/ICME11_TSG13_panel_Borovcnik_icme_discussion_S.pdf

Batanero, M. C. & Díaz, C. (2008). Student's Biases in Conditional Probability Reasoning. Topic Study Group 13. Monterrey: ICME 11. ICME 11. Recuperado el 22 de abril de 2010, de:

http://www.ethikkommission-kaernten.at/ICME11/p02_ICME11_TSG13_diaz_EE.pdf

KAPADIA, R. (2008). Chance Encounters 20 years later. Fundamental ideas in teaching probability at school level. Topic Study Group 13. Monterrey: ICME 11. Recuperado el 22 de abril de 2010, de:

http://www.ethikkommission-kaernten.at/ICME11/p_23_ICME11_k_v3_EE.pdf

National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Recuperado el 15 de marzo de 2009, de: http://standards.nctm.org/document

Peard, R. (2008). Teaching the Mathematics of Gambling to Reinforce Responsible Attitudes towards Gambling. Topic Study Group 13. Monterrey: ICME 11. Recuperado el 22 de abril de 2010, de:

http://www.ethikkommission-kaernten.at/ICME11/p15_ICME11_TSG13_peard_mb1_EE_pic.pdf

Yingkang, W. (2008). Panel discussion: Probability Teaching at School Level in China. Topic Study Group 13. Monterrey: ICME 11. Recuperado el 22 de abril de 2010, de:

http://www.ethikkommission-kaernten.at/ICME11/ICME11_TSG13_panel_yingkang_S_.pdf

ANEXO. INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN

1. Cuestionario escrito individual (grupos experimental y de control)

Item 1.-(Adaptado de Kahneman y Tversky (1972)) R.M. es una persona joven, abierta, brillante, universitaria y muy interesada en las cuestiones sociales. ¿Cuál de las situaciones (1) o (2) te parece más probable?: (1) R. M. trabaja en un banco; (2) R. M. trabaja en un banco y es miembro de una ONG (Organización No Gubernamental).

a) La situación (1) es la más probable b) La situación (2) es la más probable
c) Ambas situaciones tienen la misma probabilidad d) Otra respuesta

Item 2.-Lanzamos ocho veces una moneda equilibrada. ¿Cuál de las siguientes secuencias en el orden indicado es más probable? ¿Cuál de ellas es menos probable?

(1)XXCCCXCX (2)XCXCXCXC (3)XXXXCCCC (4)CCCCCCCC (5)CCXCXXCC

a)La secuencia más probable es:
b)La secuencia menos probable es:
c)Todas las secuencias tienen la misma probabilidad.

Item 3.-El semáforo que regula el tráfico en cierto cruce puede encontrarse en uno de los cuatro estados siguientes: R=Rojo, V=Verde, AF=Ámbar fijo o AR=Ámbar intermitente. ¿Cuál es la probabilidad de que en un instante determinado el estado del semáforo sea Rojo o Verde?

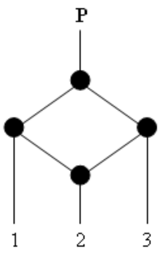
(a).-La probabilidad es 0.5 (b).-La probabilidad es 0.75
(c).-La probabilidad es: (d).-No puedo calcular la probabilidad

Item 4.-Un agente de bolsa ha comprado acciones de tres empresas. ¿Cuál es la probabilidad de que en el transcurso de un mes suban las acciones de al menos dos de las tres empresas?

2. Cuestionario escrito para resolución en equipo (grupo experimental) y para entrevista personal (grupo de control)

Ítem 5.-Observa la Imagen 2. Supongamos que un paseante parte del punto P y piensa llegar hasta alguno de los puntos (1), (2) o (3), pero no tiene decidido cuál será su destino. Lo decidirá según llegue a cada cruce. El paseante siempre camina hacia adelante. Calcula la probabilidad de que el paseante termine su paseo en cada uno de esos tres puntos.

Imagen 2. Ilustración para el ítem 5



Ítem 6.-Tenemos un bombo con diez bolas numeradas, del 0 al 9. Sacamos al azar una bola, anotamos su número y luego la devolvemos al bombo. Hacemos la misma operación cinco veces. Piensa en estos tres resultados posibles: 22211, 12345 y 83056. ¿Cuál de ellos te parece que tiene más posibilidades de salir? Ahora supongamos que tenemos un bombo con los 100000 números posibles y que sacamos uno. ¿Encuentras alguna diferencia respecto a la situación anterior?

Ítem 7.-Sobre la mesa tenemos cuatro cartas: dos ASES y dos REYES. Las colocamos boca abajo y las revolvemos. Si sacamos una carta al azar, la probabilidad de que salga AS es idéntica a la probabilidad de que salga REY (1/2). Extraemos una carta al azar pero la apartamos sin mirar qué carta es. Luego, de entre las tres cartas restantes sacamos otra, y esa sí la descubrimos y resulta que es un AS. Según este segundo resultado, la probabilidad de que la primera carta haya sido un AS ¿es ahora mayor, igual o menor que 1/2?

(a).-A la primera carta no le afecta el resultado de extraer una segunda carta. La probabilidad de que la primera carta haya sido un AS sigue siendo 1/2.
(b).-La probabilidad de que la primera carta haya sido un AS es ahora mayor que 1/2.
(c).-La probabilidad de que la primera carta haya sido un AS es ahora menor que 1/2.

Submitted: December 2011

Accepted: June 2012