DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2024v17n1p109-116

Álgebra e Pensamento Algébrico: História e Implicações Educacionais

Algebra And Algebraic Thinking: History and Educational Implications

Antonio Sales[a]; Jose Ricardo Camilo Ferreira[a]; Karina de Oliveira Castro[b]; Shinnayder Carlos Veloso[a]

[a]Universidade Anhanguera-Uniderp, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. MS, Brasil.
[b]Universidade Federal de Goiás. GO, Brasil.
*E-mail: profesales@hotmail.com

Resumo

Este trabalho tem finalidade didática e o objetivo desta síntese da história da álgebra é percorrer o caminho da sua construção desde a antiguidade, destacando os avanços e recuos no seu desenvolvimento em decorrência da falta ou presença de outros elementos fundamentais que foram sendo construídos em paralelo, visando subsidiar professores de Matemática em seu trabalho de conquistar a atenção do estudante para essa ciência. Tem como meta estimular a busca por uma justificativa para a inclusão da história as álgebra no currículo da Educação Básica. O percurso desta síntese histórica vai da álgebra retórica à simbólica, dos motivos sociais às transcendentais, de Diofanto a al-Kowarismi, da álgebra geométrica dos gregos e da álgebra prática dos árabes à álgebra abstrata dos nossos dias. Apresenta-se os fatores econômicos intervenientes, o papel da álgebra clássica, a contribuição da álgebra moderna, o enigma histórico, o pensamento algébrico, o papel da álgebra na educação, a generalização da aritmética, o que é uma mente para a Matemática, a capacidade numérica e a capacidade matemática, o senso numérico e a algoritmização como fatores necessários à compreensão da álgebra. Trata-se, portanto, de uma revisão sistemática apoiada em autores que abordam a História da Matemática e discutem o papel desempenhado por ela ao longo dos séculos. O resultado aponta para a necessidade de uma maior discussão sobre a contribuição da álgebra para a constituição da mente matemática e para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Álgebra Retórica. Algarismo. Algoritmo. Al-Kowarismi.

Abstract

This work has didactic and the objective of this synthesis of the history of algebra is to follow the path of its construction since antiquity, highlighting the advances and setbacks in its development due to the lack or presence of other fundamental elements that were being built in parallel, aiming to subsidize Mathematics teachers in their work to gain student attention for this science. It aims to stimulate the search for a justification for its inclusion in the Basic Education curriculum. The route goes from rhetorical algebra to symbolic, from social to transcendental motives, from Diophantus to al-Kowarismi, from the geometric algebra of the Greeks and the practical algebra of the Arabs to the abstract algebra of our days. It presents the intervening economic factors, the role of classical algebra, the contribution of modern algebra, the historical enigma, algebraic thinking, the role of algebra in education, the generalization of arithmetic, what is a mind for mathematics, numerical ability and mathematical ability, number sense and algorithmization as necessary factors for understanding algebra. It is, therefore, a systematic review supported by authors who address the history of Mathematics and discuss the role played by it over the centuries. The result points to the need for a greater discussion about the contribution of algebra to the constitution of the mathematical mind and to the development of algebraic thinking.

Keywords*: Rhetoric Algebra. Number. Algorithm. Al-Kowarismi.*

1 Introdução

Neste texto, discutiremos dois conceitos importantes na Educação Matemática: álgebra e pensamento algébrico. Percorremos um pouco a história da álgebra, especialmente a primeira e a segunda parte. Ao iniciar o terceiro estágio do seu desenvolvimento, daremos uma pausa para discutir o pensamento algébrico. É uma reconstrução, resumida, da riqueza e do conteúdo da álgebra.

Apresentamos, nas linhas, a seguir, uma breve abordagem dessa fascinante história. O objetivo da elaboração dessa revisão sistemática foi sintetizar a história da álgebra visando produzir um texto didático que possa servir de subsídios para o professor de Matemática que tem interesse em inserir os seus alunos no contexto da história da ciência. Foi elaborado pensando na sala de aula.

2 A Álgebra nos Tempos Antigos

Álgebra, etimologicamente, significa algo como transposição de termos, restauração de fragmentos que estão separados[1], e essa denominação surgiu com al-Khwarizmi

1 Literalmente: “ciência da reunião e da oposição” ou “ ciência da transposição e do cancelamento” (Eves, 1997, p. 266).

[790-840] devido ao nome de sua obra *Al-jabr*. Inicialmente houve o que se denominou de álgebra *retórica* (quando não há símbolos, tudo é escrito na língua corrente). Depois, veio a álgebra *sincopada* (quando tem início a transição entre a retórica e a simbólica por meio de abreviações) e, por último, a álgebra *simbólica* (quando ocorre uma síntese das representações por meio do uso sistemático de letras e símbolos) (Eves, 1997, Boyer, 1996).

A título de ilustração dizemos que, em álgebra retórica, a expressão algébrica $x^2 = 4$, que utilizamos hoje, se escreveria em Língua Portuguesa: “um número multiplicado por ele mesmo é igual a (ou resulta em) 4”.

Bekken (1994, p.22) apresenta um exemplo encontrado em um documento babilônico[2] de 1700 a.C.[3] e que foi catalogado com o número AO 8862[4].

> Multipliquei o comprimento pela largura e obtive a área. Em seguida somei a diferença entre o comprimento e a largura e obtive 3,3. Mais adiante, somei o comprimento e a largura, encontrando 27. Desejamos encontrar o comprimento, a largura e a área.

A resolução é explicada como segue: “Encontre primeiro a metade da soma e eleve ao quadrado, subtraia então o produto e tome a raiz quadrada. Você encontra o comprimento e a largura, tomando a metade da soma e adicionando (e subtraindo) a raiz quadrada” (Bekken, 1994, p. 22-24).

Não se encontram nos tabletes de argila, que compunha o material de registro dos babilônicos, nenhum simbolismo, nenhuma fórmula, nenhuma justificativa para o procedimento indicado. Elas são um receituário matemático.

A tradução na linguagem simbólica de hoje seria: comprimento (c), largura (l), área (a), soma (s) e a fórmula:

$$c = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - a} \quad \text{e} \quad l = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - a}$$

No entanto, em época anterior a essa produção dos mesopotâmicos, os egípcios já conheciam os números e no Papiro de Ahmes datado de 1650 a.C. já aparecem os problemas cuja solução requer o pensamento algébrico: “uma quantidade mais o seu sétimo é 19”; “Uma quantidade e sua metade fazem 16” (Bekken, 1994, p. 16)[5]. Os escribas egípcios usavam o método da falsa posição que consistia em adivinhar (“chutar”) um número e depois fazer os ajustes.

Antes de prosseguir, é importante dizer algumas palavras sobre a motivação ou sobre o cenário econômico, político e social que provocou o surgimento da álgebra. Um desses fatores foi, sem dúvida, o controle do estado sobre as suas propriedades. No Egito as inundações do Nilo alagavam as suas margens tornando-as férteis quando passava o tempo das cheias. O Faraó controlava a produção, arrendando as terras, recolhendo a sua parte e estocando mantimento para que não faltasse alimento no palácio e também ao povo, em época de crise. Os escribas, subvencionados pelo Faraó, cuidavam das medições de terra, controle estatístico do povo e do recolhimento e armazenamento dos produtos (Souto Maior, 1972). Na palavras de Doberstein (2010, p. 29, grifos do autor) “A necessidade de calcular os períodos das cheias do Nilo criou a astronomia egípcia e, com ela, o domínio da classe sacerdotal como orientadora da agricultura”. O outro fator foi a busca pela transcendência. O desejo de ir além, de explicar os fenômenos ligando passado, presente e futuro (D’Ambrósio, 2008).

Nas tábuas de barro (tabletes ou tabletas de argila, como são mais comumente conhecidos) da Mesopotâmia são encontrados muitos problemas envolvendo área o que sugere também um controle da produção. Segundo Bekken, referindo-se ao documento egípcio, o mais comum é encontrar solução para problemas lineares. Há também problemas envolvendo inclinação de pirâmides, distribuição de alimentos[6] e volumes. Nos documentos mesopotâmicos, predominam os problemas quadráticos e alguns casos de problemas cúbicos. Eves (1997, p. 60) sugere uma motivação agrária e comercial para a álgebra babilônica. Diz ainda que os “sumérios antigos estavam familiarizados com todos os tipos de contratos legais e usuais, como faturas, recibos, notas promissórias, crédito, juros simples e compostos, hipotecas, escrituras de compra e venda e endossos [...] pesos e medidas”.

Apesar de os egípcios e mesopotâmicos terem a sua motivação para o estudo da álgebra nos problemas práticos, não nos perece ser prudente supor que tivessem uma álgebra concreta, isto é, somente uma álgebra aplicada e limitada aos problemas cotidianos a serem resolvidos. Os problemas apresentados nas páginas antecedentes dão indicativos de quão dissociados da realidade estavam muitos problemas discutidos na “academia”. Era uma álgebra abstrata. A suposição é que, além de uma álgebra aplicada, propunham também problemas de ordem puramente intelectual.

Roque (2012, p.86) afirma que “a palavra ‘abstrair’ designa justamente que certas propriedades foram isoladas, separadas dos exemplos concretos em que estão presentes”.

---

2 Usaremos Mesopotâmia como sinônimo de Babilônia mesmo sabendo que Mesopotâmia (entre rios) é uma região onde hoje é o Iraque e que Babilônia foi uma cidade, uma civilização na antiga Mesopotâmia, [1792-539 a.C.], período de maior florescimento intelectual da região. Para efeitos da História da Matemática, as duas se confundem.

3 As datas antigas citadas neste texto são todas aproximadas. Deve-se ler, por exemplo, “aproximadamente 1700 a.C.”

4 O autor não indica o museu onde se encontra tal tablete.

5 Mais dois problemas dos babilônios: “Somei a área com o lado do meu quadrado e obtive 0;45. Qual é o lado?”; “Somei o volume e o dobro da superfície do meu cubo e obtive como resultado 52, 16. Encontre o comprimento do lado” (Bekken,1994, p. 28-29). Sobre o raciocínio egípcio da falsa posição iniciemos com um caso mais simples: um número e sua quarta parte fazem 20.

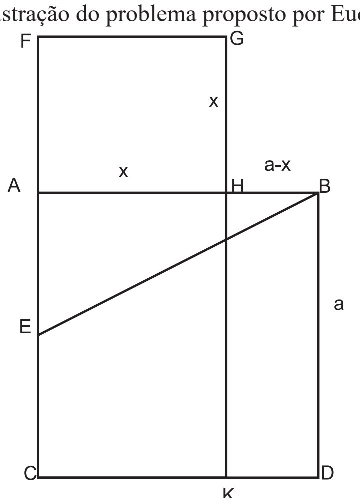
6 “Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas partes menores” (Eves, 1997, p. 84). Os egípcios também multiplicavam e dividiam por duplicação.

Ao que parece, não há praticidade em somar um número com a sua sétima parte e encontrar 19, a menos que 7 e 19 sejam números cabalísticos ou que o sistema de numeração da época fosse favorável a esse tipo de operação. O sistema decimal não posicional dos egípcios e a limitação das frações unitárias (com raras exceções) parece não favorecer a última hipótese.

O mesmo se pode dizer de muitos dos problemas encontrados nos tabletes babilônicos. Somar o volume e o dobro da superfície de um cubo, obter como resultado 52;16, e pedir a medida do lado, se parece mais com uma prazerosa divagação do espírito, com uma transcendência intelectual, do que com um problema que necessitasse ser resolvido para atender a uma demanda social ou econômica. Do mesmo modo que dividir pães em progressões geométricas, responder a uma pergunta de um amigo usando frações, em uma época em que os símbolos não facilitavam os cálculos, se parecem mais com desafios intelectuais, charadas de bom gosto, entre amigos que conhecem o potencial intelectual um do outro, também o problema que consiste em somar um número abstraído de um volume, com um número abstraído de uma área para obter um número abstraído de um medida linear, sugere um desafio intelectual do que a intenção de discutir utilidade. A questão da sobrevivência não era o único fator motivador da produção intelectual (D'Ambrósio, 2008).

Na Grécia, entre os anos 540 a.C e 300 a.C (aproximadamente), isto é, dos pitagóricos a Euclides, a álgebra era geométrica. Um exemplo interessante é: "se uma linha reta é dividida em duas partes quaisquer, o quadrado sobre a linha reta toda é igual aos quadrados sobre as duas partes junto com duas vezes o retângulo que as contêm. [Isto é, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$]" (Baumgart, 1992, p.7) (Figura 1).

Figura 1 – Ilustração do problema proposto por Euclides



Fonte: Pratt (1992, p.69).

Pratt (1992) esclarece que os gregos tinham uma dificuldade lógica com números irracionais e mesmo fracionários, bem como dificuldades práticas com os numerais gregos[7]. Portanto, não é de estranhar que optassem por trabalhar com a álgebra geométrica[8]. No tempo de Euclides, o produto *ab* era um retângulo de base *a* e altura *b* e a^2 era realmente um quadrado.

Um problema a ser resolvido foi proposto por Euclides nas seguintes palavras: "Dividir uma reta de modo que o retângulo contido pelo todo e uma das partes seja igual ao quadrado sobre a parte restante" (Figura 1).

Resolução:

> AB, ou a, é o segmento dado. Constrói-se o quadrado ABDC. Divide-se AC ao meio obtendo E. Traça-se EB. Estende-se CA até F de maneira que EF = EB. Constrói-se o quadrado FGHA. Então H é o ponto procurado. Dessa maneira AH = x é a raiz positiva de $x^2 + ax - a^2 = 0$ (Pratt, 1992, p. 69).

Os gregos tinham uma motivação intelectual para o estudo da Matemática. Alguns problemas a que se propunham estavam relacionados com a duplicação do cubo, trissecção do ângulo com régua e compasso, números primos, número amigos e a regularidade dos números naturais[8].

Ribinikov (1987) fundamenta-se no matemático e historiador chinês Ling Wang para afirmar que os conhecimentos matemáticos da China remontam ao XIV século antes da nossa era. Conheciam o sistema decimal, possuíam um símbolo especial para números, inclusive para o zero. O mais conhecido texto antigo tem 246 problemas resolvidos e divididos em nove pergaminhos que receberam o nome de nove livros ou, como chamaríamos hoje, livro com nove capítulos destinado a formar engenheiros, astrônomos, agrimensores, arrecadadores de imposto e outros. Para o cálculo com frações, o livro já utilizava a redução ao denominador comum. Embora o conteúdo seja majoritariamente composto de problemas práticos como medidas de áreas, construções (relacionadas com a guerra como muralhas e fossos), distribuição proporcional dos impostos. |No sétimo livro, aparecem problemas que conduzem às equações lineares e sistemas com duas variáveis. Esses problemas estão em ordem crescente de dificuldade, não são muito precisos nos enunciados e a solução proposta é a da falsa posição.

O problema nº 18 afirma que "9 lingotes de ouro pesam tanto quanto 11 lingotes de prata. Se forem intercambiados de um em um então o peso do ouro e da prata se diferenciaram em 13 lan (16 lan são iguais a um tzin)". No último livro, há problemas de determinação de distâncias cuja solução é apresentada usando o Teorema de Pitágoras.

---

7 Estes tinham um princípio semelhante aos algarismos romanos embora usassem outros símbolos. Essa dificuldade em operar com números é uma das causas da álgebra geométrica.

8 Termo cunhado pelo "historiador dinamarquês H. Zeuthen [...] como denominação para essas regras de cálculo e para métodos de tratamento das grandezas" (Bekken, 1994, p. 39). Álgebra na perspectiva de al-Kwarizmi é a arte de manipular expressões polinomiais e resolver equações.

9 São exemplos: números amigos, números perfeitos e números figurados. Um problema interessante consta em Bekken (1994, p. 40): "Honrado Pitágoras, quantos em tua casa participam da busca da sabedoria? Quero de dizer, Polícrates: a metade estuda arte, a quarta parte está estudando a natureza e a sétima parte, os pensamentos do coração. Além disso, há três mulheres. Estas são as intérpretes das musas que tenho em minha casa."

Mas, é na Idade Média que os elementos algébricos se manifestaram. Em 1303, apareceu o “espelho precioso de quatro elementos” que são as quatro incógnitas, também chamadas de “céu, terra, homem, objeto”. No entanto, a álgebra chinesa não influenciou a álgebra europeia da qual somos herdeiros.

3 Álgebra Sincopada

Na álgebra sincopada, a expressão $x^2 = 4$ se escreveria: xx*aeq* 4. *Aeq* porque nessa época a língua oficial da ciência já era o Latim. A Mesopotâmia estava no passado, a Índia tinha sido copiada (traduzida) pelos árabes e agora a ciência estava em mãos dos europeus (Boyer, 1996; Eves, 1997).

Vejamos um pouco dessa fase do desenvolvimento da álgebra:

Em 825, o matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (Maomé, filho de Moisés, de Khwarizmi[10]) escreveu o livro “Hisabal-jabrw´al-muqabalah”. Era um tratado de álgebra e era citado abreviadamente por Al-Jabr. Nesse livro, ele trata da restauração ou reunião e da redução dos termos que estavam separados (um de cada lado da igualdade) na equação. Na realidade, segundo Baumgart (1992), ele discutia a transposição e o cancelamento de termos como hoje fazemos. Ao traduzir para o Latim esse livro, recebeu o título de “Líber Algebrae et Almucabala” (Fragoso, 1999, p. 36; Boyer, 1996, p. 156).

Esse mesmo autor também discutiu em outro livro (“Livro de al-Khwarizmi”) o processo de cálculo com numerais indo-arábicos. A tradução desse outro livro para o Latim, com o nome de *Liber algorismi,* fez surgir as palavras algoritmo e algarismo. Dessa forma, algoritmo é qualquer processo de calcular. Refere-se a um processo, a um modo fazer. Por sua vez, algarismos são os símbolos e, na atualidade, aqui no ocidente, predominam os indo-arábicos.

Baumgart (1992) ainda informa que os árabes marroquinos introduziram a palavra algebrista na Espanha para indicar os “ortopedistas” da época que consertavam ossos quebrados e faziam sangrias como serviços adicionais oferecidos nas barbearias.

Retomando ao tema da sincopação (abreviação de palavras), temos em Baumgart que ela teria começado com Diafanto (séc. III d.C.), com os hindus (séc. VII e séc. XII d.C.) e com os árabes (séc. IX d.C) mas não recebeu a devida atenção. Os hindus que se destacaram no estudo da álgebra foram Brahmagupta (628 d.C.) e Bhaskara (1150 d.C.). As datas são aproximadas.

Fragoso (1999, p. 27) informa que as normas de Diofanto eram: “ = incógnita ao quadrado”. O símbolo era derivado “das duas primeiras letras da palavra grega ΔΥΝΑΜΙΣ (dunamis)” que significa potência. “ ⩚ = menos”. As letras “Λ e I da palavra ΛΕΙΨΙΣ (leipis) que significa menos”. A igualdade era representada “por ισ de ισοσ (isos) que significa igual”.

Segundo Baumgart (1992, p. 10) a equação “$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$ seria escrita por Diofanto como[11]: ou $x^3$2 x8 - $x^2$5 1.4 = 44”.

Brahmagupta expressou a equação $7xy + - 8 = 3x^2 + 10x$ da seguinte forma:

yaka 7 bha k(a) 12 ru ya v(a) 3 ya 10, na qual ya é abreviatura de *yavattavat* (primeira incognita); ka vem de *kalaka* (“negro”) segunda incógnita; bha (*bhavita*) é produto; k(a) é *karana* (“irracional ou raíz”); o ponto em cima do oito indica que esse número é negativo; ru (*rupa*) é um número puro ou comum; v(a) vem de *varga* (número ao quadrado) (Cummins, 1992).

> Os hindus resolviam equações quadráticas completando quadrados, aceitavam os números negativos e raízes irracionais; também tinham conhecimento de que uma equação quadrática (com raízes reais) tem duas raízes. O trabalho dos hindus com equações indeterminadas era superior ao de Diofanto. Eles tentavam achar *todas as soluções inteiras possíveis* e foram, talvez os primeiros a dar métodos gerais de solução (Baumgart, 1992, p. 10, destaques do autor).

Bekken (1994) afirma que na álgebra de Brahmagupta, que era voltada para a astronomia, já aparecem regras para trabalhar com frações[12] e com números negativos. Consta ainda que Brahmagupta escreveu:

> O produto de um número positivo por um negativo é negativo, de dois números negativos ou de dois positivos, dá um número positivo... A raiz quadrada de um número positivo pode ser positiva ou negativa. Não há raiz quadrada de um número negativo, já que nenhum negativo é um quadrado (Bekken, 1994, p.48).

O sistema de numeração hindu, que segundo eles esses algarismos tinham origem divina, foi incorporado pelos árabes a partir do trabalho de al-Kwarizmi. Segundo Roque (2012, p. 249), existiam os ingredientes para o desenvolvimento das equações algébricas. Gregos e indianos haviam proporcionado elementos suficientes, mas somente com os árabes se abriu a perspectiva da sua explicitação. Os árabes expandiram o conhecimento rompendo com a predominância do conhecimento grego e ultrapassando a divisão entre “números e grandezas”. Além das equações, eles criaram um “cálculo sobre expressões polinomiais [...]”.

Como já visto, o termo álgebra foi cunhado por al-Kwarizmi cujos livros foram traduzidos para o Latim em 1200 depois que os cristãos reconquistaram Toledo, na Espanha, das mãos dos mouros. Também os *Elementos* de Euclides e o *Almajesto* de Ptolomeu foram traduzidos nessa época. Para a Itália, o mais importante foi o trabalho de Fibonacci (Leonardo de Pisa) que em seu *Líber abaci* (1202) resolvia equações no

10 Há variantes na escrita de Khwarizmi como Khowarism, por exemplo, nome da cidade ou região onde nasceu o matemático.

11 é uma abreviação de KγΒΟΣ (KUBOS, “cubo”) e ς é abreviação de αριθμος (arithmos, “número”)” (Cummins, 1992, p.31).

12 As frações eram representadas como na atualidade: numerador e denominador, mas sem o traço. Os números negativos eram indicados por um ponto em cima.

estilo retórico e no estilo de al-Kwarizmi e defendia o uso dos algarismos indo-arábicos.

Os árabes denominavam a incógnita de coisa (*shai,* algo indeterminado), que no Latim foi traduzida por *res* de onde veio a nossa palavra república (*res pública*, coisa pública). Entre os árabes a matemática árabe floresceu sob os auspícios do Islã. Entre os anos 800 e 1000, da nossa era, existiu em Bagdá a Casa da Sabedoria com uma biblioteca composta de obras que estavam sendo traduzidas dos manuscritos gregos. As traduções eram espontâneas e não seguiam uma ordem racional,informa Roque (2012). Boyer (1996) credita às três califas (al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum) o patrocínio desse trabalho. Nessa casa, trabalhou al-Kwarizmi que teria morrido antes der 850 depois de escrever sobre matemática e astronomia. Um dos seus primeiros livros foi sobre a arte hindu de calcular e o outro que ficou conhecido como "álgebra al-Kwarizmi"[13] e do qual já se falou. Embora, como foi dito, a sincopação tenha começado com Diofanto, a álgebra não havia crescido na Europa. As contribuições de Diofanto e Brahmagupta não despertaram interesse.

Segundo Baumgart (1992, p.12) foram três os fatores que impulsionaram a álgebra e o renascimento na Europa:

1. A facilidade que o sistema de numeração indo-arábico oferecia para a manipulação de cálculos numéricos. O sistema romano requeria o uso de ábaco.
2. A "invenção da imprensa com tipos móveis" em 1450. Agora era possível padronizar com mais facilidade o simbolismo
3. O "ressurgimento da economia, sustentando a atividade intelectual". O comércio em ampla expansão e as viagens facilitavam a troca de ideias e de bens.

Isso explica por que o renascimento algébrico ocorreu na Itália entre 1200 e 1300.

Retomando a questão do simbolismo algébrico e da sincopação da *cossic art* (arte da coisa) e a *die Coss* (a coisa) como a álgebra era conhecida na Inglaterra e Alemanha, respectivamente. Vejamos como se deu a evolução da álgebra retórica para simbólica.

A equação $x^3 + 6x = 20$ teria sido escrita por Cardano em 1545 como afirma Baumgart (1992).

Viète (1591) escreveu[14]: IQC -15QQ+85C- 225Q+ 274 N *aequatur* 120 ($x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$

Harriot (1631): aaa -3bba === +2.ccc ($a^3 - 3b^2a = 2c^3$)

Descartes (1637): x^3 - 6xx + 13x -10 □ 0

Wallis (1693: $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

Esta é, segundo Baumgart (1992, p. 13), a evolução da simbologia da álgebra e segundo o mesmo autor, embora não se saiba quem tenha criado esses símbolos, dois deles têm pai identificado. O sinal de "=" que foi introduzido por Robert Record em 1557, por entender que não há nada mais igual do que duas retas paralelas, e o símbolo , que pode ter sido resultado de uma alteração do R de *radix* (raiz) e foi usado por Christff Rudolff no seu livro *Die coss* em 1525. Cummins (1992, p.32) escreve que: é abreviação de *piu* (mais) e vem de *meno* (menos).

Um destaque para Viète (1540-1603) é dado por Roque (2012) quando nos informa que foi sua iniciativa padronizar o uso das letras na álgebra. Ele adotou como critério que as incógnitas sejam representadas por vogais e os coeficientes por consoantes, todas maiúsculas. É certo que tanto os coeficientes quanto as incógnitas representam valores indeterminados, porém, o grau de indeterminação é diferente em ambas.

É impossível prosseguir sem abrir um parêntese para falar de Cardano e Tartaglia[15] (pronuncia-se Tartália) e as contribuições de ambos para a resolução da equação cúbica. A história registra uma trama em que Cardano, um médico de Milão e professor de Matemática, que Eves (1997, p. 303) chama de "gênio inescrupuloso", teria publicado, em seu livro *Ars Magna* (1545), a solução de Tartaglia sem a permissão deste. Ato este que gerou uma intriga em que Tartaglia foi vencido "feliz por ter escapado com vida".

Em *Ars Magna*, Cardano apresenta a solução para equação cúbica: "$x^3 + mx = n$". A proposta é: considerar $(a - b)^3 + 3ab(a - b) = a^3 - b^3$, em seguida fazer $3ab = m$ e $a^3 - b^3 = n$ e x é dado por $a - b$.

Resolvendo o sistema:

$$a = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}}$$

Fecha-se aqui o parêntese, interessante por um lado, e desinteressante por outro. Do ponto de vista da ciência, do seu progresso, muito interessante, e nada recomendável do ponto de vista da moral. No entanto, convém saber que esta não é a única versão para esta história. Outros autores contam-na com nuances menos agressivas de ambos os lados. A ciência não é produzida, necessariamente, por pessoas moralmente íntegras. O mito do intelectual desinteressado, foi criado por Comte (1996), mas não se sustenta.

Retomemos ao ponto onde ele foi aberto.

Dessa forma, Bekken (1994, p. 13) sintetiza a história da álgebra em três estágios, a saber: "1) o período pré-simbólico, antes de 1600 d. C.; 2) o simbólico-numérico, 1600-1800; 3) o simbólico-abstrato, depois de 1800".

Foi no século XVI que a Matemática começou o rompimento com a antiguidade e a álgebra evoluiu na resolução de equações (Ponte; Branco; Matos, 2009; Boyer, 1996; Eves, 1997).

---

13 Um dos problemas proposto no livro é: "um Mal e dez Jidhr iguala a 39 dinares". Solução proposta: tome a metade da quantidade de jidhr, multiplique essa quantidade por si mesma, some no resultado os Adad, extraia a raiz quadrada do resultado e subtraia desse resultado a metade dos Jidhr.Vocabulário: Mal (tesouro), quadrado da quantidade desconhecida; Jidhr (raiz), mas neste caso refere-se especialmente ao coeficiente da raiz; Adad, número ou quantidade (Roque, 2012, p.250-252).

14 Incógnita ao quadrado cubo – 15 incógnita ao quadrado do quadrado + 85 incógnita ao cubo -225 incógnita quadrado + 274 incógnita, igual a 120.

15 Nome: Nicolo Fontana de Brescia. Tartaglia, neste caso, é sinônimo de gago, alguém com dificuldade na fala.

4 A Álgebra na Educação Básica

Ao pensar sobre álgebra na Educação Básica, Gascón (1994) diz que ela é tratada como uma generalização da aritmética ou aritmética generalizada, como um prolongamento[16] da aritmética. Para ele, isso não é recomendável que aconteça porque a prática da aritmética generalizada se concentra na resolução de equações, inequações e aplicação de fórmulas. Os problemas resolvidos pela aritmética pertencem a uma relação de problemas simples com resultado numérico definido e que responde diretamente ao enunciado. Os problemas algébricos pertencem à outra categoria.

Enquanto o resultado de uma prática aritmética, via de regra, é um número, o resultado de uma prática algébrica é uma relação entre duas grandezas. Exemplos: $ax^2 = c$ ou $a^2 = b^2 + c^2$. Se na aritmética cada número tem o seu valor definido, na álgebra cada símbolo muda de significado em cada contexto. Ora são variáveis, ora são incógnitas e ora são generalizações de números, como na identidade: $ab – ac = a(b – c)$. Na aritmética, os símbolos de operação (+, –,×, ÷, =) possuem sentido único. Na álgebra, eles possuem certa duplicidade. O sinal de adição (+), na álgebra, pode indicar uma ação, como em $x + 12 = 15$, ou uma permanência, como em $ab + ac = a(b + c)$. O mesmo se pode dizer do sinal de igual (=), pois, em $4m + 3m = 7m$, indica resultado e em $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ indica equivalência.

A álgebra é uma nova disciplina com uma nova generalização. Essa compreensão é necessária para identificarmos as limitações do campo aritmético e nos mostra que o que temos feito é uma aritmetização da álgebra. Tomamos emprestado da álgebra alguns instrumentos de trabalho como +, –,= e os particularizamos.

Conclui-se que nosso modo de ensinar Matemática depende do nosso conceito de Matemática e de cada um dos seus temas (aritmética, álgebra, etc.).

4.1 O Pensamento Algébrico

A partir deste parágrafo os nossos pensamentos estarão fixados no sentido de álgebra e pensamento algébrico, cujo entendimento do que seja será exposto mais adiante. Álgebra, hoje, engloba estudos das equações (número de soluções possíveis, relações entre raízes), estudo das igualdades e desigualdades (inequações), funções algébricas (polinomiais e racionais) e “funções mais complexas, ditas transcendentes, onde intervêm operações como radiciação e exponenciação, logaritmos e razões trigonométricas, bem como condições de natureza geométrica e mecânica, por exemplo, relativas a movimentos”. (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 6). Nas funções, ainda temos o conceito de limite, a derivada e Análise Infinitesimal.

Tudo isso faz parte da álgebra clássica. A álgebra moderna começou com Abel (1802-1829) ao provar a “impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4.º [...] “e “a formulação das condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4.º tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois (1811-1832)” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p.7). Antes de Abel, Ruffini (1765-1822) demonstrou, em 1799, que a equação geral de grau superior ao quarto não poderia ser resolvida por meio de radicais. Mais tarde percebeu-se falhas na sua demonstração, ficando para Abel o mérito com a sua publicação em 1824 (Lima, 1987). Foi Galois quem pela primeira vez considerou a estrutura de grupo. Foi ainda no século XIX que se encerrou a discussão sobre temas da álgebra clássica com “demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existem métodos algébricos gerais para a resolução de equações de grau superior ao 4º.” (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 7).

Em termos educacionais Almeida e Melo (2017) apresentam quatro concepções de álgebra, a saber: a) processológica, em que esse tema matemático é visto como técnica, artifício ou procedimento, “ uma sequência padronizada de passos”; b) linguístico-estilística, onde a álgebra é vista como uma linguagem; c) linguística-sintática-semântica, isto é, como uma linguagem específica, concisa, com caráter simbólico para representar quantidades genéricas e d) linguístico-postulacional, é quando além de representar quantidade genéricas, também representa “estruturas topológicas, as estruturas de ordem e as estruturas de espaço vetorial”.

Lima (1987) chama a nossa atenção para o que denomina de “enigma histórico”. Em que consiste esse enigma? Consiste no fato dos mesopotâmicos já saberem resolver equação do segundo grau mil e setecentos anos antes da Era Cristã e a humanidade ter esperado três mil anos para resolver a equação do terceiro grau. É que os progressos científicos ocorrem tanto períodos de necessidade material como de excitação intelectual. Há períodos da história em que a insatisfação com o produzido move os homens para novas discussões. Quando o que está posto não resolve mais os problemas emergentes, quando o conhecimento produzido não atende mais as necessidades, as explicações sobre a natureza ou razão da existência humana, já não satisfazem os seres humanos se põem a pensar sobre possibilidades de avançar, de superar o existente. Quando as produções, o fazer intelectual humano, transforma-se em rotina já não fascina mais, então busca-se a transcendência, os deleites do espírito que se expressam nas

16 Nossa experiência diz que, na prática, ela é tratada como uma ruptura do que vinha sendo trabalhado até então. O ingresso do aluno nos domínios da álgebra se dá de forma brusca e não há “retornos” para estabelecer ligação com o aprendido na aritmética. O que se tem observado em muitos casos é no primeiro dia de aula o professor anunciar que vai estudar polinômios, por exemplo, ou que se vai estudar equações do primeiro grau e apresentar uma expressão onde a incógnita é inserida bruscamente. Anuncia que isso se chama álgebra. Evidentemente que veem a álgebra na perspectiva processológica, como técnica.

artes e nas ciências (D´Ambrósio, 2008).

Do final do século XIX para cá as discussões algébricas giram em torno de temas relacionados às equações não algébricas, como: equações diferenciais (ordinárias e derivadas parciais), equações envolvendo funções, estruturas abstratas como grupo, espaço vectorial, anel e corpo. É a álgebra moderna (Ponte; Branco; Matos, 2009).

No nível de Ensino Fundamental, estudam-se regras de transformações de expressões (monômios e polinômios), produtos notáveis, frações algébricas, expressões com radicais, equações de primeiro e segundo graus e funções também de primeiro e segundo graus, números inteiros. São os primeiros passos na álgebra clássica.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009, p. 8), alguns currículos da Educação Básica traziam até poucas décadas o termo cálculo algébrico para se referir ao estudo das equações. Outros definiam a álgebra como o estudo dos símbolos. No entanto, eles admitem ser uma redução não apropriada porque reduz a álgebra ao formalismo, a uma linguagem, a "um jogo de símbolos sem significado". Eles entendem que álgebra é algo mais amplo e mais complexo do que isso.

Para contornar este problema, que tem função redutora, surgiu na década de 1980 a discussão sobre pensamento algébrico. Pensamento algébrico, em determinada perspectiva, tem a ver com a capacidade de sistematizar, formalizar, a partir de observações de regularidades.

Para James Kaput,

> o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. Kaput identifica, em 1999, cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si: (i) a generalização e formalização de padrões e restrições; (ii) a manipulação de formalismos guiada sintacticamente; (iii) o estudo de estruturas abstractas; (iv) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (v) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 9).

Entendemos que, na Educação Básica, o pensamento algébrico se manifesta na "generalização e formalização de padrões e restrições", no "estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos" (Ponte; Branco; Matos, 2009, p. 9). Onde aparecem esses fatores? Na PA (Progressão Aritmética), PG (Progressão Geométrica), nas funções lineares, discussão e modelização de um problema.

Devlin (2004, p. 26) trata de uma mente para a Matemática. Para ele há uma capacidade numérica e uma capacidade matemática. Como a aritmética é uma parte da Matemática (a parte utilitária, segundo ele), também a capacidade numérica é apenas uma parte da capacidade que precisa ser desenvolvida. Explica que já entendemos como se desenvolveu a capacidade numérica, mas ainda está por explicar o desenvolvimento da capacidade matemática. Para ele, a Matemática é a "ciência dos padrões" "reais ou imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, utilitários ou recreativos".

Em seguida, ele trata dos padrões que são objetos de estudo nas diferentes áreas da Matemática. Padrões de números e cálculo numérico (teoria dos números); padrões de formas (geometria); padrões de movimento (cálculo infinitesimal); padrões de raciocínio (lógica); padrões do acaso (probabilidade); padrões de proximidade e posição (topologia). Uma vez que esses padrões são, na maioria, abstratos faz-se necessária uma notação abstrata (algébrica) para expressá-los. Por exemplo, a propriedade comutativa da adição (vale para todas as operações de adição) é expressa por: "a ordem das parcelas não altera a soma" (álgebra retórica) ou "m + n = n + m" (álgebra abstrata).

Para desenvolver Matemática, Devlin (2004, p. 28-29) apresenta algumas condições básicas que ele denomina de "atributos mentais":

1. "Senso numérico": Não exige a capacidade de contar, mas de distinguir, entre dois conjuntos finitos, normalmente com poucos elementos, qual tem mais elementos. Alguns animais também possuem senso numérico. Para Ifrah (1989) crianças ainda muito pequenas já têm o senso numérico e o senso de grandeza. Quando as diferenças não são pequenas, elas percebem quem é maior e quem é menor, onde tem mais e onde tem menos.
2. *Capacidade numérica*: Saber que em cada elemento que passa diante dos olhos estão incluídos todos que o antecederam. Ao dizer cinco, por exemplo, deve-se ter a ideia de que o quatro e o três estão incluídos. Exige ainda que seja capaz de perceber que a sequência de contagem pode continuar indefinidamente. Este é um atributo tipicamente humano, embora, segundo o autor, alguns primatas possam contar até dez. Dantzig (1970) cita o caso de um corvo que contou corretamente até quatro. Alguns homens montaram uma embocada para enganar a ave. Esconderam-se em uma choupana e foram saindo um a um na expectativa de que o corvo voltasse para o ninho enquanto alguns o aguardavam na choupana para abater-lhe. O corvo somente perdeu a conta quando cinco homens se esconderam e quatro deles saíram.
3. *Capacidade algorítmica*: É a capacidade de lidar com uma sequência de atividades diversas como fazer um bolo, operar com números ou resolver uma equação. Berlinski (2002, p. 16) define algoritmo como "um procedimento eficaz, um modo de fazer uma coisa em um número finito de passos discretos". Os procedimentos algébricos são algoritmos.
4. *Capacidade de lidar com abstrações*: É uma capacidade associada à linguagem, que todos têm, embora muitos não consigam aplicar à Matemática.

5 Conclusão

Dado que o objetivo deste texto é prover elementos para discussão em sala de aula sobre a genealogia da álgebra e parte do seu desenvolvimento, produzir um texto didático que possa ser útil ao professor, e considerando que uma trabalho dessa natureza não se esgota em poucas páginas, mas que é necessário, em algum momento, por um final, direcionamos o trabalho para a finalização. Não é um estudo exaustivo e o que se propõe é que os alunos se inteirem do assunto através de uma leitura cuidadosa e que na sala de aula se tenha uma conversa produtiva e a análise de algumas atividades teóricas e práticas sobre o tema.

Na nossa perspectiva, estudar a história não consiste apenas em percorrer os caminhos de certa linha de pensamento ou fixar-se em fatos isolados. É preciso pensar também nos percalços, nos textos extraviados ou queimados pela ignorância humana. Dessa vez não fizemos isso por não fazer parte do objetivo proceder uma análise crítica da história da ciência, mas convidamos o leitor a consultar as fontes e descobrir o que se perdeu e dos quais se sabe apenas porque foi citado por outro contemporâneo, ou quase contemporâneo, do autor.

Um trabalho investigativo dessa natureza pode ser produtivo e ser capaz de mobilizar estudantes para o estudo da história da ciência. Ao descrever, ainda que suscintamente e numa perspectiva linear, o caminho percorrido pela álgebra fornecemos alguns elementos que podem desencadear um processo de investigação histórica em sala de aula.

Deve-se destacar ainda que neste caso, a evolução da álgebra, justifica-se contar a história dos vencedores, isto é, das ideias que sobreviveram, das notações que permaneceram porque elas são as melhores. Temos hoje o melhor sistema de numeração e os melhores e mais práticos símbolos algébricos. Esta afirmação se deve ao fato de que apenas os instrumentos melhores, ou mais aceitos, perduram. Nossos símbolos são os que melhor se prestam para cálculos cotidianos. É possível que a expansão da tecnologia em breve ponha em xeque o sistema decimal substituindo-o por bits e bytes e, nesse caso, ao invés de pensamento algébrico teremos que pôr em pauta o pensamento computacional. Sair de uma regularidade linear para uma regularidade rizomática como aparecem nas estruturas de programação.

Ainda, do ponto de vista educacional, o texto forneceu informações para respostas a possíveis perguntas de sala de aula. Por que letras na Matemática? Por que as incógnitas são sempre x e y? O que diferencia um algarismo de um número? Algarismo e algoritmo são uma mesma coisa?

Embora alguns temas da matemática tenham se perdido, pressupomos que fomos capazes recuperar a ideia e imprimir neles uma nova roupagem e simbologia apropriada, assim com seremos capazes de incorporar os novos sistemas que virão.

Duas questões permanecem em aberto e, talvez, encontremos as respostas em buscas na Base Nacional Curricular Comum, nos Parâmetros Curriculares Nacionais e nos debates sobre as ideias da álgebra. São elas: a) apresentar uma justificativa para a presença da álgebra simbólica no Ensino Fundamental e b) elaborar um plano para estimular o pensamento algébrico na Educação Básica.

Referências

Almeida, J.R. & Melo, M.M.C. (2017). Aspectos Históricos da Álgebra que Permeiam Documentos Oficiais. *In*: A.P.A.B. Lima, , I. M.S. Lima, L.F. Araújo, & V. L.V.X. Andrade. *Fenômenos Didáticos em uma aula de introdução Álgebra:* múltiplos olhares e perspectivas teóricas. v.2: Recife: UFPE.

Baumgart, J.K. (1992). *História da Álgebra.* São Paulo: Atual.

Bekken, O.B. (1994). *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: USU; GEPEM.

Berlinski, D. (2002). *O Advento do Algoritmo*: a ideia que governa o mundo. São Paulo: Globo.

Comte, A. (1996). *Curso de Filosofia Positiva*. São Paulo: Nova Cultural.

Cummins, K. (1992). Equações e as maneiras como são escritas. In: Baumgart, J. K. (ed.). *História da Álgebra (pp.30-33).* São Paulo: Atual.

D´Ambrósio. U. (2008). *História Concisa da Matemática no Brasil*. Petrópolis: Vozes.

Doberstein, A.W. (2010) *O Egito antigo*. Porto Alegre : EDIPUCRS.

Dantzig, T. (1970). *Número:* a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar.

Devlin, K. (2004). *O Gene da Matemática*. Rio de Janeiro: Record.

Eves, H. (1997). *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Unicamp.

Fragoso, W.C. (1999). *Equação do 2º Grau*: uma abordagem histórica. Ijuí: Unijuí.

Gascón, J. (1994). *Un nouveau modele de l'algèbre elementaire comme alternative à l'«arithmétique généralisée»***.** Barcelona: Universitat Autonoma de Barcelona.

Ifrah, G. (1989). *Os números:* a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo.

Lima, E.L. (1987). *A Equação do Terceiro Grau.* Matemática Universitária. 5, 9-23.

Ponte, J. P., Branco, N. & Matos, A.(2009). *Álgebra no Ensino Básico***.** Lisboa: Ministério da Educação de Portugal.

Pratt, G. V. (1992). Álgebra Grega Primitiva. In: Baumgart, J. (Org.). *História da Álgebra (pp.68-71)***.** São Paulo: Atual.

Ribinikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Roque, T. (2012). *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar.

Souto Maior, A. (1972). *História Geral*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.