DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2022v15n2p116-124

El *Instrumento Jacente no Plano* como Recurso para la Enseñanza de Congruencia de Triángulos

The *Intrumento Jacente no Plano* as Resource for Teaching Triangle Congruence

Francisco Wagner Soares Oliveira[a]; Ana Carolina Costa Pereira*[a]

[a]Universidade Estadual do Ceará. CE, Brasil.
*E-mail: carolina.pereira@uece.br.

Resumen

Este estudio, tiene como objetivo conocer el potencial didáctico del *instrumento jacente no plano* para la enseñanza de congruencia de triángulos en la formación del futuro profesor de matemáticas. Entonces, para un enfoque cualitativo de investigación, fue realizada una actividad de uso del instrumento con estudiantes de Licenciatura, esa acción se sostuvo bajo la Actividad Orientadora de Enseñanza, que tiene bases en el concepto de actividad de Leontiev (1903-1979) y en la teoría histórico-cultural. El uso del *instrumento jacente no plano*, hace posible que los estudiantes utilicen conocimientos matemáticos en situaciones prácticas y además colabora para entender como diferentes conceptos geométricos se relacionan. Concluimos que el aporte del aparato a la enseñanza favorece el flujo de pensamiento de los estudiantes, en el sentido de aprender, significar y reconfigurar conceptos.

Palabras-clave: *Instrumento Jacente no Plano.* Congruencia de Triángulos. Conexión Entre Historia y Enseñanza de Matemáticas. Formación de Estudiante de la Licenciatura en Matemáticas.

Abstract

This study aims to know the didactic potential of the instrumento jacente no plano for the teaching of congruence of triangles in the formation of the future mathematics teacher. Then, for a qualitative research approach, an activity was carried out to use the instrument with undergraduate students, this action was held under the Teaching Guiding Activity, which is based on the concept of activity by Leontiev (1903-1079) and in historical-cultural theory. The use of the instrumento jacente no plano makes it possible for students to use mathematical knowledge in practical situations and also helps to understand how different geometric concepts are related. We conclude that the contribution of the apparatus to teaching favors the flow of thought of the students, in the sense of learning, meaning and reconfiguring concepts.

Keywords*: Instrumento Jacente no Plano. Congruence of Triangles. Connection Between History and Math Teaching. Student Training for the Bachelor of Mathematics.*

1 Introducción

El presente artículo sigue la dirección de un conjunto de trabajos que buscan construir una relación entre historia y enseñanza de la matemática (Urbaneja, 1991). Al hablar de conexión, se tiene en mente un conjunto de acciones y producciones que surgen del dialogo entre las dos áreas de estudio, teniendo como foco la enseñanza y que se constituyen mediante una aproximación entre las partes que las envuelven y nutren los temas en cuestión (Saito y Dias, 2013, Saito, 2016, Pereira & Saito, 2019a).

Aquí, la educación matemática e historia de la matemática son áreas de investigación que promueven una articulación, ambas se aproximan de forma para dialogar entre sí, a partir de elementos como el propio conocimiento matemático, en que son contempladas tanto cuestiones históricas como también didácticas. Para esta interacción, del campo de la educación matemática, se vuelcan los esfuerzos para la enseñanza de conocimientos geométricos en la formación de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas (equivalente a alumnos de grado en España). Ya del campo de la historia de la matemática, es utilizado como recurso el *instrumento jacente no plano,* propuesto por Pedro Nunes (1502-1578) en el s. XVI. La elección por este aparato reposa en el hecho de que en su construcción y uso hay incorporados conceptos de geometría.

También tuvo importancia la selección de ese aparato, la compresión de que los instrumentos no son neutros, y por esa razón pueden revelar el proceso de construcción del conocimiento (Hankins & Silverman, 1995, Van Helden & Hankins, 1993, Martínez & Aymerich, 2014). Ellos hacen parte de un contexto particular de una época, buscaban atender necesidades y demandas específicas, en este sentido, hacían parte de una episteme, o sea, del mapa, de conocimiento que circulaba en su periodo de elaboración (Saito, 2014).

En el caso específico del *instrumento jacente no plano*, la lectura a priori de la descripción de construcción y del uso, escrita por Pedro Nunes en *De arte atque ratione navigandi* (1573), ya apunta algunos de los conocimientos que son promovidos, por ejemplo, de navegación y construcciones geométricas (graduación de una circunferencia en 360 grados y construcción de un triángulo rectángulo isósceles). Él fue propuesto como una alternativa más para determinación de la medida de la altura del Sol por encima del horizonte, para ese fin ya se tenían, por ejemplo, el astrolabio y el cuadrante náutico (Nunes, 2012).

Del presente estudio, es fruto de una investigación iniciada en el ámbito de una investigación de máster, en la cual se buscó explorar el *instrumento jacente no plano* con vistas a favorecer la enseñanza de matemáticas a partir de una unión entre historia y enseñanza de la matemática (Oliveira & Pereira, 2021). Aquí, se vuelve la mirada del análisis para la etapa de la acción formativa en que estudiantes de la Licenciatura en Matemática, discuten acerca de la medida ofrecida por el referido aparato, particularmente al promover el concepto de congruencia de triángulos.

En ese sentido, la indagación específica del presente estudio es saber: ¿como el *instrumento jacente no plano* puede favorecer la enseñanza de la congruencia de triángulos en la formación de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas? De tal pregunta, fue establecido como objetivo: conocer el potencial didáctico del *instrumento jacente no plano* para la enseñanza de la congruencia de triángulos en la formación del futuro profesor de matemáticas.

Como forma de potenciar la exposición de ese estudio, en la secuencia, ya es indicado el marco teórico que sustenta esta investigación, posteriormente son presentados los elementos metodológicos que guían da investigación, ya en una tercera sección se da lugar a los resultados y por fin, se tienen las posibles conclusiones.

2 Marco Teórico

2.1 ¿El que es el *instrumento jacente no plano*?

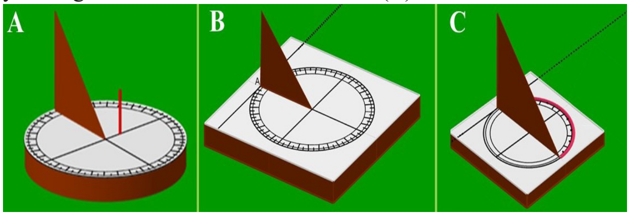
El *instrumento jacente no plano* es una concepción del Cosmógrafo-mor[1] Pedro Nunes, que estaba desarrollado a atender la necesidad de determinar la altura del Sol por encima del horizonte. Medida esa, que era bastante calculada por navegantes para favorecer el cálculo de la latitud (Oliveira & Pereira, 2019). Aquí, ese aparato es analizado a partir del cuarto volumen de las obras de Pedro Nunes publicado por la fundación Calouste Gulbenkian y la Academia de las Ciencias de Lisboa, *De arte atque ratione navigandi* de 2008, edición moderna que corresponde a la publicación del quinhentista[2] en 1573.

En esa obra, el instrumento se encuentra en el segundo libro, titulado: *sobre as regras e os instrumentos para descubrir as aparências das coisas, tanto marítimas como celestes, partindo das ciências matemáticas*, de Pedro Nunes, de Alcácer do Sal. En particular, el instrumento es descrito en sexto capítulo, el cual trata sobre los instrumentos con que se toman las alturas y las distancias de los astros. De entre las instrucciones para la construcción, se dice:

> Se divide, entonces, una tabla circular abcd en 360 grados, como es costumbre, colocándola paralela al horizonte y se fabrica, en un material duro, un triángulo rectángulo e isósceles fgh, de modo que los lados fg y gh hagan un ángulo recto y sean iguales al semidiámetro del circulo trazado. Colóquese entonces ese triangulo perpendicularmente a la tabla circular, de tal modo que el lado gh se ajuste perfectamente a ae, semidiámetro del circulo, esto es, que se quede g con a, y h con e; por consiguiente el punto f se quedará por encima. Colóquese también un punzón perpendicularmente al plano, en cualquier punto del diámetro bd. (Nunes, 2008, p.58)[3]

Se nota que Pedro Nunes propone que para la fabricación se debe graduar una tabla circular en sus 360 grados, sobre la cual se debe poner un punzón y un triángulo rectángulo isósceles. En el recorrer de la exposición del *cosmógrafo-mor*, se comprende la existencia de dos posibles configuraciones, una de ellas, en una tabla circular y la segunda en una cuadrada (Canas, 2011, Leitão, 2008, Nunes, 2008, Nunes, 2012, Reis 2003). Sin embargo, en la tabla cuadrada, se nota la existencia de dos variaciones, una en que el punzón es sustituido por la construcción de una recta tangente y la tercera haciendo alteraciones en las dimensiones del triángulo y en la graduación del circulo. Sobre esas versiones, se observa (Figura 1):

Figura 1 – En la tabla circular (A); en la tabla cuadrada (B); en la tabla cuadrada con alteraciones en las dimensiones del triángulo y en la graduación de la circunferencia (C)



Fonte: autores.

En esas configuraciones, se observa que ellas tienen en común, el hecho de poseer un triángulo colocado perpendicularmente sobre la tabla del aparato. Pero, (A) y (B), divergen en la configuración de la tabla, en que una es circular y la otra cuadrada, además de eso, aún se diferencian por la existencia de un punzón (en la versión de la tabla circular) y de una recta tangente (en la versión de la tabla cuadrada). En la variación de la tabla cuadrada, al centro de la Figura 1, la recta tangente, aparece como alternativa

1 Nombre del más alto cargo público, del Reino de Portugal, que se dedicaba a la cosmografía.

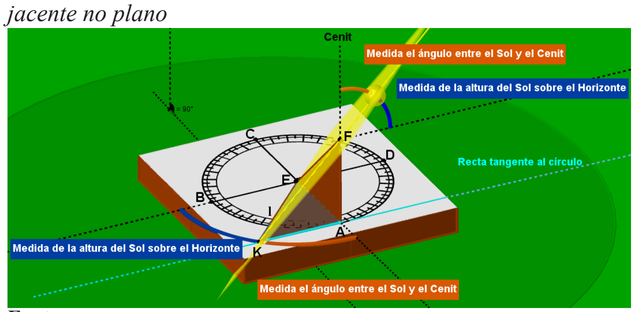
2 Relativo a *quinhentismo*, periodo artístico-científico portugués y brasileño que corresponde desde 1500 hasta 1601.

3 Traducción propia del original: Divida-se, então, uma tábua circular abcd em 360 graus, como é costume, colocando-a paralela ao horizonte e fabrique-se, num material duro, um triângulo rectângulo e isósceles fgh, de modo que os lados fg e gh façam um ângulo recto e sejam iguais ao semidiâmetro do círculo traçado. Coloque-se então esse triângulo perpendicularmente à tábua circular, de tal modo que o lado gh se ajuste perfeitamente a ae, semidiâmetro do círculo, isto é, que fique g com a, e h com e; por conseguinte o ponto f ficará para cima. Coloque-se também um estilete perpendicularmente ao plano, em qualquer ponto do diâmetro bd.(Nunes, 2008, p.358).

para sustituir el punzón, hecho eso, el instrumento aún así, mantiene su finalidad y validez. En el aparato ilustrado en (C), el triángulo puesto perpendicularmente sobre la tabla (sobre él, Pedro Nunes se refiere como triangulo duplicado), ahora tiene su lado congruente al diámetro de la circunferencia y la semicircunferencia está repartida en 90 partes congruentes.

Ya es sabido que el *instrumento jacente no plano* fue pensado como alternativa para determinar la medida de la altura del Sol encima del horizonte y, que para él ser utilizado, él debe ser puesto, paralelamente al plano del horizonte en el que el observador está. No obstante, cabe todavía exponer la lógica que asegura la validez del instrumento en obtener la referida medida. Para eso, tomando como referencia la configuración del aparato ilustrada en el dentro de la Figura 1, (A), se nota que los rayos del sol al incidir sobre el triángulo, hacen con que él proyecte una sombra sobre la circunferencia graduada en la tabla del aparato, sobra esa que es responsable por indicar la altura del Sol al Zenit, en cuanto que su complementar es la altura del Sol encima del horizonte (Figura 2).

Figura 2 – Representación hipotética de uso del *instrumento jacente no plano*



Fonte: autores.

En el borde de la tabla cuadrada del instrumento, se tiene la circunferencia graduada y su división en cuatro cuadrantes. La altura del Sol, como se puede observar, fue verificada en el aparato en base a la sombra proyectada por el triángulo *AEF*, que está perpendicular a la tabla. La sombra está formando, en la tabla del instrumento, otro triangulo *(AEK)*, en que su lado *EK*, al interceptar el cuadrante *AEB* de la circunferencia de centro E, proporciona el arco de la altura del Sol encima del horizonte (representado en esa ilustración por el arco en color azul) y su complemento, que se refiere a la medida del ángulo entre el Sol y el Zenit (representado por el arco en color naranja).

En la situación de uso, ocurre que el triángulo de la sombra proyectado sobre la circunferencia es congruente al triangulo *AFK* por L.AL. (Lado-Angulo-Lado). Asegurada esa congruencia entre los referidos triángulos, por definición de ángulo opuesto por el vértice, se sabe que el ángulo *AFK* corresponde a la altura del Sol al zenit, así como la parte sombreada sobre el cuadrante de la tabla también corresponderá a esa altura. Entonces, es posible concluir que el complementar del ángulo *AFK* indicará la altura del Sol encima del horizonte, que, en el instrumento, equivale al arco que va de B hasta la intersección del lado *EK* sobre el arco que forma el cuadrante *AEB*.

2.2 El fundamento teórico de la actividad

En cuanto a la propuesta de relacionar historia y enseñanza de matemática, aquí asumida, cabe destacar que en ella la función de la historia de la matemática es proporcionar recursos para que el profesor contextualice, comprenda y explore el conocimiento matemático. De entre, las innúmeras posibilidades que la historia puede ofrecer, investigaciones recientes han dado énfasis al trabajo con la construcción y/o uso de instrumento antiguos (Albuquerque, 2019, Alves, 2019, Batista & Pereira, 2020, Beo, 2015, Oliveira, 2021, Pereira & Saito, 2019a; Silva, 2019). Una de las justificativas, es que tales aparatos, promueven:

> Un movimiento de concepciones familiares para otras bastantes no comunes. Ese movimiento y la dialéctica proporcionada por la articulación entre dos concepciones diferentes (del pasado y del presente) favorecen la reconstrucción de las ideas matemáticas ya preconcebidas y sedimentadas por el discente, haciéndolo (re)significar el objeto matemático. En ese movimiento el objeto matemático es desconectado de las redes formales y reintegrado al proceso de su elaboración, haciendo al discente tomar conciencia de que la formalización es también una construcción. (Saito, 2014, p.29)[4]

En ese sentido, se entiende que el estudio de instrumento se presenta como alternativa capaz de hacer posible a los discentes significar y aprender conceptos de la Matemática históricamente construido. Pensando en el trabajo con los conceptos geométricos, activados a través del uso del *instrumento jacente no plano*, se puede recorrer a la episteme de la época de elaboración del aparato como forma de buscar elementos que conduzcan a los estudiantes a procesos de pensamiento que permitan corregirlo, complementarlo y desarrollarlo.

Para el desarrollo de la propuesta de relación entre historia y enseñanza de matemática en cuestión, son previstos dos movimientos: “el movimiento del pensamiento en la formación del concepto matemático” y el “contexto en el cual los conceptos matemáticos fueron desarrollados”. La finalidad de esos movimientos es hacer posible al educador promover la reflexión sobre el proceso histórico de la construcción del conocimiento matemático (Saito & Dias, 2013). Las inquietaciones/dudas del profesor, frente al desarrollo de esas dos etapas, hacen surgir un nuevo objeto. Así que ese “objeto es arrancado de su trama, él revela las diversas conexiones

4 Traducción propia del original: Um deslocamento de concepções familiares para outras bastante incomuns. Esse deslocamento e a dialética proporcionada pela articulação entre duas diferentes concepções (do passado e do presente) favorecem a reconstrução das ideias matemáticas já preconcebidas e sedimentadas pelo discente, fazendo-o (re)significar o objeto matemático. Nesse movimento o objeto matemático é desconectado das malhas formais e reintegrado ao processo de sua elaboração, fazendo o discente tomar consciência de que a formalização é também uma construção. (Saito, 2014, p.29)

que dan sentido a su existencia en aquel contexto histórico, abriendo, así un campo de posibilidad a ser explorado por los educadores matemáticos" Saito & Dias, 2013, p.98)[5].

Para fundamentar y elaborar, la aplicación de actividades listadas a partir del diálogo con la historia de la matemática, fue asumida la Actividad Orientadora de Enseñanza – AOE, la cual tiene sus bases en el concepto de actividad de Leontiev (1978) y en la teoría histórico-cultural. Sobre esas bases, la noción de actividad asumida, lleva en consideración el contenido de enseñanza, las acciones educativas y los sujetos que hacen parte de la actividad (Moura et al., 2016). Esos elementos funcionan como un engranaje que da cuerpo a la actividad educativa. Sobre esa relación y aproximación entre ellos, se sabe que es importante considerar la interdependencia que los impregna durante toda la acción pedagógica (Moura et al., 2016).

En cuanto al contenido a ser enseñado por el docente, en la lógica de una actividad en el AOE, se sabe que debe ser considerado por los estudiantes como un objeto de aprendizaje. Para la teoría histórico-cultural, cabe puntuar que "eso solo es posible si ese mismo objeto se construye como una necesidad para ellos. Así, los conocimientos teóricos son al mismo tiempo objeto y necesidad en la actividad" (Moura et al., 2016).[6]

En este sentido, la AOE en cuanto modo de organización de enseñanza, tiene como contenido central "el conocimiento teórico y su objeto es la constitución del pensamiento teórico del individuo en el movimiento de apropiación del conocimiento" (Moura et al., 2010, p.210)[7]. De ese modo, el hecho del profesor organizar las acciones que objetivan el enseñar, favorece la resignificación de sus conocimientos, así la AOE forma tanto a los sujetos profesores como también a los sujetos alumnos.

El papel de las acciones en ese engranaje que nutre la actividad de enseñanza es justamente considerar las condiciones objetivas de la escuela, en cuanto institución formadora. En que, de un lado, se tienen las acciones del profesor en la actividad de enseñanza, las cuales deben contemplar la definición de los procedimientos de cómo trabajar con conocimientos teóricos y del otro lado las acciones de aprendizaje de los estudiantes en la actividad, que por su vez, deben estar orientadas a resolver los problemas del aprendizaje.

3 Metodologia

El estudio fue guiado metodológicamente por un enfoque cualitativo de investigación (Lüdke & André, 2013), de entre sus tipos, fue explorado en algunos momentos, una investigación del tipo bibliográfico (Marconi & Lakatos, 2003) y en otros, del tipo cualitativo documental (Godoy, 1995). Esa marca cualitativa fue valorizada, visto que, ella hace posible aproximar al investigador del ambiente y a la situación de investigación, también da importancia al significado que los sujetos dan a las cosas, y también da mayor destaque al proceso que propiamente al producto del estudio, entre otras características (Lüdke & André, 2013).

Como ya fue dicho en la sección anterior, la AOE es aquí utilizada para ir más allá de su aporte teórico, que se fundamenta en el concepto de actividad de Leontiev (1978) y en la teoría histórico-cultural, ella también contribuye para la parte metodológica. Por su aproximación con la propuesta de relación entre historia y enseñanza de matemática (Pereira & Saito, 2019a; Saito & Dias, 2013), se observa un diseño metodológico para la actividad, a saber (Cuadro 1):

Cuadro 1 – Estructura pensada para la actividad formativa

Organización de la Actividad	**Recopilación de Datos**	**Análisis de los Datos**
Intencionalidad y plan de acción.	Grabaciones de audios y de vídeos.	Observar conexiones e interconexiones entre elementos de la actividad.
Tratamiento didáctico.	Fotografías.	Relacionar las manifestaciones de los discentes cuanto a los motivos, acciones y operaciones.
Desarrollo.	Producción de informes	Observación de nexos conceptuales.

Fonte: autores.

Por lo expuesto en la cuadro 1, la actividad fue subdividida en tres momentos: 1) intencionalidad y plan de acción 2) tratamiento didáctico del documento; e 3) desarrollo. Sigue el modelo que la propuesta de relación entre historia y enseñanza de matemática apunta para el trabajo con un instrumento histórico (Pereira & Saito, 2019a, Saito & Dias, 2013). Ya las estrategias enumeradas para los momentos de recopilación y análisis de datos, se deben a lo observado en otras investigaciones que también trabajan sobre el aporte de la AOE (Panossian et al., 2017). Con esos recursos de obtención de los datos, se entiende que será posible identificar el juego de interacciones entre el contenido de la enseñanza, las acciones educativas y los sujetos que hacen parte de la actividad. La idea con ese boceto metodológico, fue tanto para dimensionar las implicaciones de la actividad en el aprendizaje o resignificación de conceptos de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas como también para ayudarlos

5 Traducción propia del original: "objeto é arrancado de sua trama, ele revela as diversas conexões que dão sentido a sua existência naquele contexto histórico, abrindo, assim, um campo de possibilidades a ser explorado pelos educadores matemáticos" (Saito & Dias, 2013, p.98)

6 Traducción propia del original: "isso só é possível se esse mesmo objeto se construir como uma necessidade para eles. Assim, os conhecimentos teóricos são ao mesmo tempo objeto e necessidade na atividade" (Moura et al., 2016, p.105).

7 Traducción propia del original: "o conhecimento teórico e seu objeto é a constituição do pensamento teórico do indivíduo no movimento de apropriação do conhecimento" (Moura et al. 2010, p.210)

a reflexionar sobre su práctica.

La actividad fue desarrollada en 2019, con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas sobre la orientación de un profesor/investigador y de una profesora/observadora, la cual fue responsable por auxiliar el funcionamiento y discusión. La acción formativa ocurrió en formato de curso de extensión, realizado presencialmente, en territorio brasileño en la Universidad Estadual de Ceará – UECE/Campus de Itaperí. Los espacios utilizados para la actividad fueron el Laboratorio de Matemáticas y Enseñanza Profesor Bernardo Rodrigues Torres (LAbMAtEn/UECE) y la plaza de la rotonda de la UECE.

Con un total de 20h/c, subdivididas en tres encuentros. Participaron de la acción formativa 12 discentes, los cueles fueron distribuidos en cuatro grupos. En el primer grupo estuvieron la alumna 1, alumno 2, y el alumno3; en el segundo ya estaban el alumno 4, la alumna 5 y el alumno 6; en el tercero la alumna 7, alumna 8 y el alumno 9; y en el cuarto grupo la alumna 10, el alumno 11 y el alumno 12. Para asegurar la identidad de los participantes, esos fueron los nombres en código dados para la discusión en este estudio. Número de parecer do código de ética: 3.599.527 e número de CAAE: 19561119.6.3001.5534.

Para la gestión y desarrollo de la actividad a ser desempañada por los estudiantes dentro de los grupos, fueron atribuidas, por elección de cada miembro algunas funciones. Se tuvo, por ejemplo, un facilitador, un verificador, un relator y otro responsable por el gerenciamiento de materiales (Cohen & Lotan, 2017). Para el trabajo interno de los grupos se da de forma más equitativa, además fue solicitado el cambio de papeles en el recorrer de la acción formativa.

En el primer día, la tarea solicitada a los discentes fue que entendiesen cada una de las partes del instrumento y para sirven, y después listar los conocimientos geométricos que surgían. Como recurso se dispuso la descripción de Pedro Nunes para la construcción y de uso del instrumento, la cual se encuentra en las páginas 358 a 360 de la obra *De arte atque ratione navigandi* de 2008. Sobre esa descripción, antes de ser dada a los estudiantes, con el fin de favorecer la interpretación, fue hecho previamente un tratamiento didáctico, en que fue expuesto el significado de algunos términos, no muy usuales en la modernidad, tales como, horizonte, Zenit, sombra recta y sombra diversa.

Ya en el segundo encuentro, la tarea todavía fue la misma que al encuentro anterior, entretanto, como forma de potenciar la interpretación y movimiento del pensamiento de los discentes, se dio para cada grupo una réplica del *instrumento jacente no plano*. Los aparatos dados fueron elaborados bajo las instrucciones de Pedro Nunes para su construcción.

En el último encuentro, la tarea solicitada fue que determinasen la medida de la altura del Sol encima del horizonte a partir del *instrumento jacente no plano*. Posteriormente, ya en clase tuvieron que relatar sobre la situación de uso apuntando elementos de orden práctica, de orden material y de orden matemática. Como recursos para esa actividad práctica, también se dieron escuadras, nivel de burbuja, una manguera y botella con agua usados en comparación del nivel en la construcción civil, plomada, hilos y compases.

Durante tres días, se buscó enumerar y fomentar discusiones que ayudasen a los discentes a significar y/o resignificar conceptos de la Matemática Moderna. En el presente artículo, es dada relevancia a las consideraciones tejidas en el tercer día de actividad, en especial las que se provocaron sobre la comprensión de la medida proporcionada por el *instrumento jacente no plano* a partir de la relación de congruencia entre triángulos.

4 Resultados

El elemento central que da impulso a la discusión alrededor de la congruencia y de la semejanza de triángulos es comprender la validez de la medida proporcionada por la sombra proyectada sobre la tabla del *instrumento jacente no plano* a partir del triángulo rectángulo isósceles, que está puesto en la perpendicular (Figura 3)

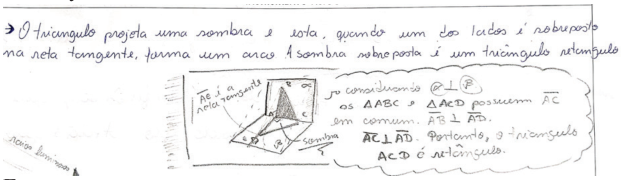
Figura 3 – Determinación de la altura del Sol encima del horizonte por los estudiantes

Fonte: autores.

En esa imagen, la cual fue registrada a las 10h y 05min del día 3 de agosto de 2019, se puede observar a los discentes del grupo 4, los cuales a partir del instrumento determinaron que la medida de la altura del Sol encima del horizonte en el momento correspondía a 55 grados. Detalles sobre el momento que antecede a la determinación de esa medida, como por ejemplo sobre el posicionamiento de la tabla, pueden ser verificados en Oliveira & Pereira (2021). Aquí, se destaca más una vez que el punto de partida son las discusiones generadas a partir de la determinación de esa medida, particularmente alrededor de la posibilidad de congruencias entre los triángulos que proporcionan la medida.

Ahora de inicio, por la dependencia directa de la figura formada por la sombra con el triángulo perpendicular a la tabla, los estudiantes del Grupo 4 destacan que ellos poseen un lado común y, que cuando el cateto AD del triángulo de la sombra coincide con la recta tangente a la circunferencia en el punto A, ese ΔACD de la sombra, pasa a ser también rectángulo (Figura 4).

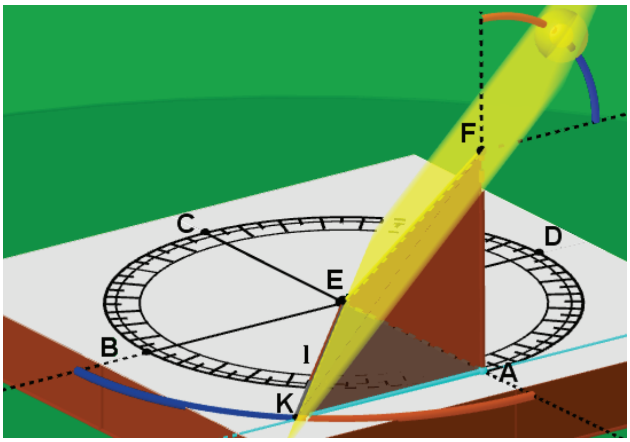
Figura 4 – Boceto de los estudiantes sobre la relación entre el ΔABC y el ΔACD



Fonte: autores.

Una relectura de ese boceto presentado por los discentes, a partir de la descripción y nomenclatura dada por Pedro Nunes, apunta la siguiente sistematización (Figura 5).

Figura 5 – Representación del ΔAEK y del $\Delta FGH(\Delta AEF)$ en la situación de uso del instrumento

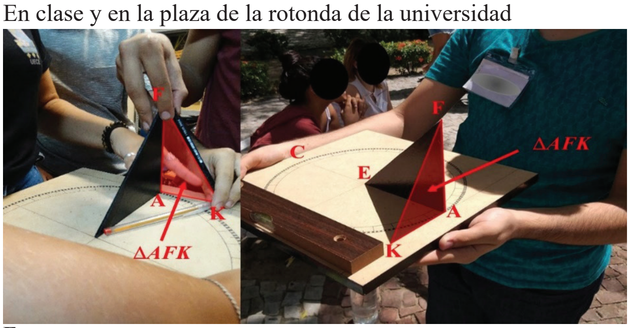


Fonte: autores.

Aquí, el ΔAEK *formado* por la proyección de la sombra y el ΔAEF, tienen en común el lado AE, segmento ese que corresponde al cateto de esos triángulos que coincide con el diámetro del circulo trazado. Y el cateto AK del ΔAEK de la sombra es el que está sobre la recta tangente a la circunferencia en el punto A.

Con un nuevo análisis sobre la situación, ahora ya bajo la nomenclatura hecha por Pedro Nunes al describir el instrumento, la alumna 2 del Grupo 1 afirma que está viendo otro triangulo además del ΔFGH que está perpendicular a la tabla y del ΔAEK representado por la sombra. Interrogados sobre cuál es ese triangulo, el alumno 3 que también lo vio, dice que es ΔAFK (Figura 6).

Figura 6 – De derecha a izquierda se identifica el tercer triangulo: En clase y en la plaza de la rotonda de la universidad



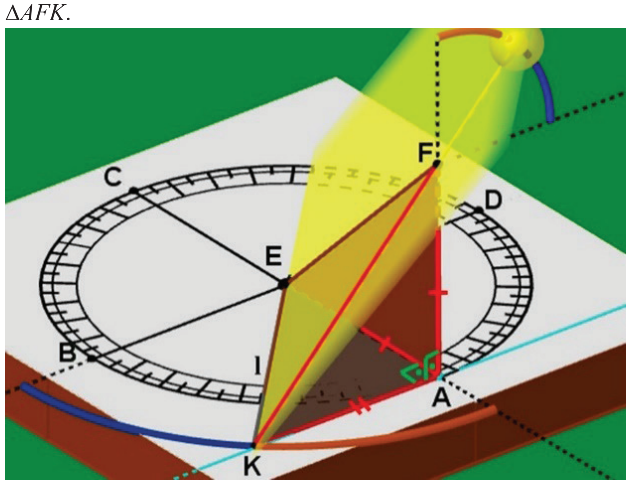
Fonte: autores.

Todavía sobre ΔAFK, el alumno 3 destaca que notó ese triangulo, por el hecho de que Pedro Nunes al describir el aparato, dice de la "ligación entre el F y el K". Indagados sobre una posible relación del ΔAFK con los otros dos ya destacados, el alumno 11, es el primero a hablar, y apunta que "él también es rectángulo por lo visto". En la figura 4, expuesta anteriormente, es posible verificar que los discentes del grupo 4, ya habían apuntado a la existencia de esa perpendicularidad, eso al afirmar que el segmento AB, aqui nombrado AF está perpendicular a AD, que está siendo llamado de AK. En su descripción, Pedro Nunes justifica que es recto a partir de la tercera definición del Libro 11 de los Elementos de Euclides, en que existe la condición necesaria y suficiente para una recta ser perpendicular a un plano (Euclides, 2009). En esos términos, Pedro Nunes quiere mostrar que los segmentos de rectas AK y AE pertenecientes al plano de la tabla del instrumento, a lo cual AF se encuentra perpendicular, tocan AF a ángulos rectos.

Como se puede observar hasta aquí, para la interpretación inicial sobre la relación existente entre los triángulos que componen la situación práctica de uso del *instrumento jacente no plano* los estudiantes tuvieron que actuar, que dialogar y que reflexionar. De ese modo, bajo el concepto de actividad de Leontiev (1978) y de la teoría histórico-cultural, se comprende que la apropiación del conocimiento incorporado al aparato es fruto de la actividad colectiva (Rubtsov, 1996) entre los participantes.

Otra observación de los discentes, particularmente apuntada por el alumno 5, sobre el ΔAFK fue que "él es igual al de la sobra". La justificativa para ese hecho es que ambos son rectos en el punto A y también poseen dos catetos congruentes, o sea, de misma media, son ellos, AE e AF, y también el lado AK es común a ΔAFK y ΔAEK (Figura 7).

Figura 7 – Representación de la congruencia entre el ΔAEK y el ΔAFK.

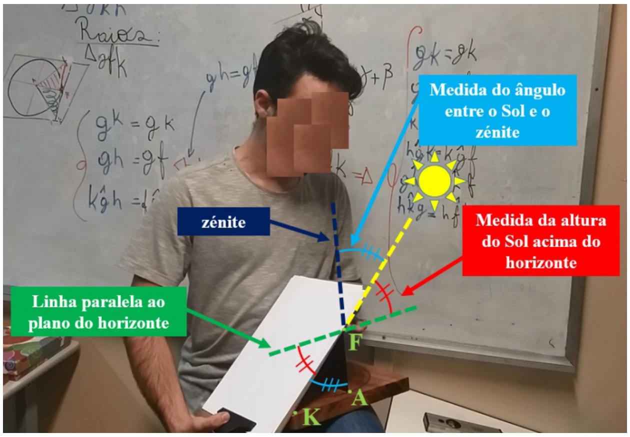


Fonte: autores.

En esa representación, es posible observar que el lado AE del ΔAEK de la sombra, es congruente al lado AE del ΔAEF, que está perpendicular a la tabla. Así, como AF del ΔAEF es congruente al cateto AE de ese mismo triangulo. Entonces, ΔAEK y ΔAFK poseen un lado congruente. Como ya fue destacado, el lado *AK* es común al Δ*AFK* y al Δ*AEK*. Visto eso, cabe destacar que “dos triangulos que poseen dos lados y el angulo comprendido entre ellos respectivamente congruentes son congruentes” (Silveira & Marques, 2013, p.245)[8]. Como se puede observar, los discentes afirman que Δ*AFK*Δ*AEK* por L.A.L (Lado-Ángulo-Lado). Esa conclusión se entrecruza con los destacado, anteriormente, en la sección del marco teórico, al tratar sobre la situación de uso, en que en esa ocasión, se notó que la validez del instrumento se apoyo justamente en esa relación de congruencia entre los triángulos en cuestión.

En ese sentido, el Δ*AEK* da sombra, se hace necesario, visto que, sin él, no tendríamos la medida, pues él marca el largo del arco en el circulo graduado cuando dos de sus vértices están sobre el segmento de la recta tangente. Las conclusiones de los discentes pueden ser observadas en la siguiente imagen (Figura 8):

Figura 8 – Representación de las conclusiones de los alumnos sobre el uso del instrumento[9]



Fonte: autores.

Por lo destacado por los discentes, el Δ*AEK* de la sombra proyectada sobre la circunferencia es congruente al Δ*AFK* por L.A.L. Partiendo de ese principio, por definición de ángulo opuesto por el vértice, según el alumno 12 el ángulo “es lo que le falta al Sol para llegar al medio día”, en otras palabras, eso corresponde a la altura del Sol al Zenit. Entonces, la parte sombreada sobre el cuadrante de la tabla también corresponderá a esa altura. Siguiendo esa lógica, concluyen que el complementar de ángulo indica la medida de la altura del Sol encima del horizonte.

En esa argumentación que ilustra la sistematización de los estudiantes sobre la validez de la medida encontrada, se nota un potencial del instrumento histórico para hacer posible que los participantes entiendan como los conceptos geométricos que surgieron se relacionan.

Hecho que posiblemente favorece la ampliación de la comprensión de los conocimientos matemáticos.

El movimiento del pensamiento de los estudiantes realizado para comprender la medida dada por el *instrumento jacente no plano*, revela el papel del conocimiento matemático como objeto y como necesidad en la situación propuesta (Davidov, 1988). Hecho que va al encuentro de lo defendido por la teoría histórico-cultural, la cual está en la base de sustentación de la AOE (Moura *et al.*, 2016)

Se puede también apuntar, que al proporcionar el concepto de congruencia de triángulos como necesidad para comprender la situación concreta de medición con el *instrumento jacente no plano* los alumnos ampliaron el significado del concepto, pues atribuyen a él una finalidad práctica.

Cabe todavía puntuar, que la existencia de la congruencia entre el Δ*AFK* y el Δ*AEK*, abre espacio para la discusión no solo sobre el concepto de congruencia. Algunos interrogantes pueden ser elucidados, por ejemplo, ¿el Δ*AFK* y el Δ*AEK* siempre serán congruente, para toda y cualquier sombrea que venga a formar la figura el Δ*AEK*? ¿Los triángulos *AFK* y *AEK* por ser congruentes entre sí, serán siempre semejantes? ¿Los triángulos *AFK* y *AEK* pueden en alguna de sus posibilidades de medida de la altura del Sol ser congruentes o semejante al Δ*AEF*, el cual está puesto perpendicularmente a la tabla? ¿Qué es necesario para que dos triángulos sean semejantes? (Zakaryan *et al.*, 2018). ¿Qué es necesario para que dos triángulos sean congruentes? ¿Existe alguna relación entre congruencia y semejanza de triángulos?

En este sentido, dependiendo de la intención didáctica o pedagógica del educador matemático, a partir de preguntas bajo la situación práctica de uso del *instrumento jacente no plano*, se puede dar impulso al movimiento del pensamiento de los estudiantes en el sentido de promover, aprender, o resignificar conceptos de congruencia y de semejanza, sea entre segmentos, ángulos o figuras.

5 Conclusiones

Delante de la interacción entre los conceptos propuestos, las acciones educativas y los sujetos de la actividad, cabe preguntarse es que: ¿Cómo el *instrumento jacente no plano* puede favorecer la enseñanza de congruencia de triángulos en la formación de estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas?

Se entiende que es a través de la necesidad de los estudiantes en comprender los conceptos que están sintetizados en el instrumento, para que de esa forma, puedan entender la validez de la medida de la altura del Sol encima del horizonte. Se entiende que esa constatación, va al centro de los destacado por la teoría histórico-cultural, visto que aquí en esa actividad práctica, el concepto de congruencia de triangulo es al mismo tiempo objeto y necesidad.

Otra contribución que el instrumento puede traer a la enseñanza, se refiere a la comprensión de cómo los conceptos

8 Traducción propia del original: “dois triângulos que possuem dois lados e o ângulo compreendido entre eles respectivamente congruentes são congruentes” (Silveira & Marques, 2013, p.245)

9 Traducción de los cuadros informativos en la Fig. 8: Cuadro verde: Línea paralela al plano horizontal; Cuadro azul marino: Zenit; Cuadro azul celeste: Medida del ángulo entre el Sol y el zenit; Cuadro rojo: Medida de la altura del Sol encima del horizonte.

geométricos se relacionan. Por ejemplo, al discutir la congruencia entre los triángulos que componen la situación de uso, se nota que los alumnos articulan los conceptos de ángulo, de perpendicularismo, de congruencia y de longitud.

La necesidad de los estudiantes en utilizar el *instrumento jacente no plano*, también favorece el aprendizaje, pues hace posible que ellos atribuyan nuevos significados a conceptos trabajados en el cotidiano escolar. En ese caso específico, ellos pudieron notar la congruencia de triángulos en términos prácticos.

Como se puede observar, los discentes tuvieron que considerar cuestiones de orden práctica, de orden material y de orden matemática durante la situación de uso. En ese sentido, se entiende que es importante preservar la relación de inseparabilidad existente entre esas cuestiones, caso se tenga como intención trabajar con la enseñanza y el aprendizaje de conocimientos geométricos, a partir de la propuesta de construcción de relación entre historia y enseñanza de la matemática.

En la propuesta de construcción de relación entre historia y enseñanza de la matemática aquí asumida, esas cuestiones fueron responsables por conducir a los alumnos a la asimilación de determinados objetos matemáticos. Entre las ventajas de considerarlas, se comprende que sea la abertura para la elucidación de "procesos que conducen, por ejemplo, a comprender el papel de la representación, visualización, abstracción, razonar, demostración, métodos, definiciones, etc, en la construcción del conocimiento, bien como otros aspectos de la matemática y de su práctica" (Saito, 2016b, p.277)[10].

Referencias

Albuquerque, S.M. (2019). *Um estudo sobre a articulação entre a multiplicação contida no Traité de Gerbert (1843) e o ensino na formação de professores de matemática* (Tesis de maestria, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza).

Alves, V.B. (2019). *Um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred* (Tesis de maestria, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Fortaleza).

Batista, A.N.S., y Pereira, A.C.C. (2020). A balhestilha (1603) como um instrumento matemático para o estudo de medidas na formação de professores de matemática. *Acta Scientiarum. Education*, *43*(1), 1-12. doi:10.4025/actascieduc.v43i1.48188

Beo, N. (2015). *O estudo do Tratado del Radio Latino: Possíveis contribuições para a articulação entre História da Matemática e ensino* (Tesis de maestria, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo).

Canas, A.J.D.C. (2011). *A obra náutica de João Baptista Lavanha (c. 1550 – 1624)* (tesis de doctorado, Universidade de Lisboa Faculdade de Letras Departamento de História, Lisboa).

Cohen, E.G., & Lotan, R.A. (2017). *Planejando o trabalho em grupo*. Porto Alegre: Instituto Sidarta.

Davídov, V.V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico: investigación psicológica teórica y experimental*. Moscou: Editorial Progreso.

Godoy, A.S. (1995). Pesquisa Qualitativa Tipos Fundamentais. *Raje-revista de Administração de Empresas*, 35(3), 20-29.

Hankins, T.L., y Silverman, R.J. (1995). *Instruments and the Imagination*. Princeton: Princeton University Press.

Leitão, H. (2008). Anotações ao De arte atque ratione nauigandi. Em: P. Nunes. P, *Pedro Nunes Obras.* (pp.515-794). Lisboa: Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian.

Leontiev, A. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. São Paulo: Moraes.

Lüdke, M., & André, M.E.D.A. (2013). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. Rio de Janeiro: E.P.U.

Marconi, M.A., & Lakatos, E.M. (2003). *Fundamentos de metodologia científica*. São Paulo: Atlas.

Martínez, A.G., & Aymerich, M.I. (2014). Contribución de la História de las Ciencias al desarrollo profesional de docentes universitarios. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(1), 265-81. doi:10.5565/rev/ensciencias.758

Moura, M. O. et al. (2010). Atividade orientadora de ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. *Rev. Diálogo Educ*., 10(29), 205-29. doi: 10.7213/rde.v10i29.3094

Moura, M.O. et al. (2016). A Atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: M.O. Moura. *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural* (pp.93-126). São Paulo: Autores Associados.

Nunes, P.J.A. (2012). *Os instrumentos náuticos na obra de Pedro Nunes* (Tesis de maestria, Universidade de Lisboa, Lisboa).

Nunes, P. (2008). *Obras, Vol. IV: De Arte Atque Ratione Navigandi*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Oliveira, F.W.S., & Pereira, A.C.C. (2019). Elementos iniciais da relação entre o instrumento de Pedro Nunes, jacente no plano, e o cálculo da latitude no século XVI. *História da Ciência e Ensino: Construindo interfaces*, 19(1), 39-53. doi:10.23925/2178-2911.2019v19p39-53

Oliveira, F.W.S., & Pereira, A.C.C. (2021). *Sobre os conhecimentos geométricos incorporados na construção e no uso do instrumento jacente no plano de Pedro Nunes (1502-1578) na formação do professor de matemática*. Iguatu: Quipá Editora.

Oliveira, G.P. (2021). Um primeiro olhar de aspectos gerais do tratado a arte de navegar (1606) de Simão d'Oliveira. In: *Actas del XIV Seminário Nacional de História da Matemática* (pp. 1-15). Minas Gerais: Even3.

Panossian, M.L. et al. (2019). A atividade orientadora de ensino como pressuposto teóricometodológico de pesquisas. *Revista Reflexão e Ação*, 25(3),279-98. doi:10.17058/rea.v25i3.9765

Pereira, A.C.C., & Saito, F. (2019a). A reconstrução do báculo de Petrus Ramus na interface entre história e ensino de matemática. *Cocar*, 13(25), 342-372. doi:10.31792/rc.v13i25

Pereira, A.C.C., & Saito, F. (2019b). Os conceitos de

10 Traducción propia del original: "processos que conduzem, por exemplo, a compreender o papel da representação, visualização, abstração, raciocínio, demonstração, métodos, definições, etc, na construção do conhecimento, bem como outros aspectos da matemática e de sua prática" (Saito, 2016b, p.277)

perpendicularidade e de paralelismo mobilizados em uma atividade com o uso do báculo (1636) de Petrus Ramus. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(1), 405-432. doi:10.23925/1983-3156.2019v21i1p405-432

Reis, A.E. (2003). Os instrumentos de medida. *As Novidades do Mundo: conhecimento e representação na Época Moderna* (pp.145-167). Lisboa: Edições Colibri.

Rubtsov, V. (1996). A Atividade de aprendizado e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. Em: C. Garnier, N. Bednarz, I. Ulanovskaya. *Após Vygotsky e Piaget: perspectivas social e construtivista escolas russa e ocidental* (pp.129-37). Porto Alegre: Artes Médicas.

Saito, F. (2016a). Construindo interfaces entre história e ensino da matemática. *Ensino da Matemática em Debate*, 3(1), 3-19.

Saito, F., & Dias, M. S. (2013). Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciências & Educação* 19, 89-111. doi:10.1590/S1516-73132013000100007

Saito, F. (2016b). História e Ensino de Matemática: Construindo Interfaces. En: J.F. Salazar, & F.U. Guerra, *Investigaciones en Educación Matemática* (pp.253-291). Lima: Fondo Editorial PUCP.

Saito, F. (2014). Instrumentos matemáticos dos séculos XVI e XVII na articulação entre história, ensino e aprendizagem de matemática. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - Rematec*, 9(16) 25-47.

Silva, A.P.M. (2019). *Uma interface entre história e ensino de matemática: contribuições na formação de conceitos de estudantes na construção e utilização de um instrumento de medida do século XVI – o quadrante geométrico* (Tesis de maestria). Universidade Estadual Paulista, Bauru. Obtenida de https://repositorio.unesp.br/handle/11449/181621

Silveira, Ê. & Marques, C. (2013). *Matemática: compreensão e prática. Obra em quatro volumes para os 6º, 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental II*. São Paulo: Moderna.

Urbaneja, P.M. G (1991). História de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 9*(3), 281-289.https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.4731

Van Helden, A., & Hankins, T. L. (1994). Introduction: Instruments in the History of Science. *Osiris*, 9(1), 1-6.

Zakaryan, D. et al. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conoci-miento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(2), 105