

# A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO CAMPO METODOLÓGICO PARA O PLANEJAMENTO DE AULA DE MATEMÁTICA: ANÁLISE DE UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA PARA O ESTUDO DE GEOMETRIA ESFÉRICA

Wanderley Pivatto Brum<sup>1</sup>

Universidade Regional de Blumenau

Elcio Schuhmacher<sup>2</sup>

UFSC

## RESUMO

Este artigo apresenta o relato de uma experiência didática construída a partir das etapas da Engenharia Didática, envolvendo situações das quais afloram problemas reais, com incentivo à pesquisa e atividades relacionadas à Geometria Esférica, contribuindo para a formação e a compreensão de conceitos geométricos por parte dos estudantes. O estudo está embasado na Didática da Matemática, que prioriza resultados de experiências em sala de aula. A metodologia segue os princípios da Engenharia Didática, que valoriza tanto o aspecto teórico como experimental, a fim de analisar as situações didáticas ocorridas no ambiente escolar. A atividade foi vivenciada em aulas de Matemática com quatorze estudantes do segundo ano do ensino médio. Os resultados apontam uma facilitação na compreensão de conceitos de Geometria Esférica por parte dos estudantes, permitindo o desenvolvimento de competências para sua utilização nos problemas do cotidiano.

**Palavras-chave:** Engenharia didática; Metodologia; Ensino de matemática; Geometria esférica.

## ABSTRACT

This article presents a learning experience built from the steps of the Didactic Engineering, evolving situations that arise real problems with encouraging research

---

<sup>1</sup> [ufsc2013@yahoo.com.br](mailto:ufsc2013@yahoo.com.br)

<sup>2</sup> [elcio@furb.br](mailto:elcio@furb.br)

and activities related to spherical geometry, contributing to the formation and understanding of geometric concepts by students. The study is grounded in the teaching of mathematics that focuses on experiences in the classroom. The methodology follows the principles of Didactic Engineering, which values both the theoretical and experimental aspects, in order to analyze teaching situations occurring in the school environment. The activity was experienced in mathematics classes with fourteen students of the second year of high school. The results indicate an easing in understanding concepts of spherical geometry by students, allowing the development of skills for use in everyday problems.

**Keywords:** Didactic Engineering, Methodology, Teaching Mathematics; Spherical Geometry.

## INTRODUCTION

A Matemática é considerada como uma das mais antigas ciências, tendo sempre ocupado um dos lugares de destaque nos currículos escolares. Suas características se remetem a predicados muito específicos, compreendidas como um processo de pensamento que implica a formação e a aplicação de uma cadeia de conhecimentos, muitas vezes abstratos, sem uma conexão com a realidade do estudante.

Nessa direção, a reprodução e a memorização de conceitos matemáticos, muitas vezes sem significado, com cita D'Ambrósio (2009), fortalece a técnica tradicional de ensino, embora um grande esforço tem sido realizado por parte de pesquisadores e professores para mudar esse cenário. Aliados a esse esforço, os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) (1998) enfatizam a importância de o estudante compreender vários aspectos do cotidiano por meio de conhecimentos matemáticos, explorando e investigando situações que levem a pensar, criticar e resolver tais problemas.

Embora as situações do cotidiano sejam fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata (BRASIL, 1998, p. 23).

Nessa direção, o papel do professor é desafiador, e perpassa pelo constante estado de atualização de conhecimentos e estratégias de ensino, primeiramente, por não ser considerado como único detentor do conhecimento, e, por outro lado, o estudante deixou de ser uma página em branco e um agente passivo no processo de aprendizagem. Com essa perspectiva, o professor, de acordo com Fiorentini e Nacarato (2005), constitui-se como agente reflexivo de sua prática pedagógica, passando a buscar subsídios teóricos e práticos que ajudem a compreender e enfrentar os problemas da sala de aula.

Com o intuito de contribuir para a ação docente, um dos referenciais que pode ser trabalhado em sala de aula é conhecido como Engenharia Didática, balizada pelas reflexões de Brousseau (1996), e estruturado nas investigações de Artigue (1996). A propósito, estruturar sequências de ensino é um dos objetivos da Engenharia Didática que coloca em destaque as relações mútuas entre professor, estudante e o conhecimento. Para Artigue (1996), essa metodologia possibilita encarar problemas práticos de sala de aula, e, ao mesmo tempo, busca valorizar o trabalho do professor.

## **A ENGENHARIA DIDÁTICA**

Segundo Artigue (1996), a Engenharia Didática é um processo empírico que objetiva conceber, realizar, observar e analisar situações didáticas. Inicialmente associada como metodologia para a análise de situações didáticas, a Engenharia Didática foi concebida como um trabalho didático de modo análogo ao:

[...] ofício do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados na ciência e, portanto, a enfrentar [...] problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta. (ARTIGUE, 1996, p. 193)

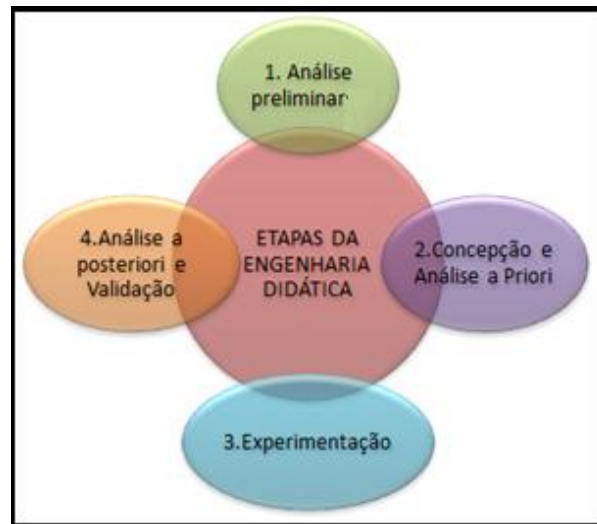
A metodologia que constitui a Engenharia Didática surgiu como consequência dos estudos conhecidos como Didática da Matemática. Douady (1985) define a Didática da Matemática como a área da ciência que estuda o processo de transmissão e de aquisição de diferentes conteúdos nos ensinos básico e universitário, propondo-se a descrever e explicar fenômenos relativos ao ensino e a aprendizagem específica da Matemática. No entanto, a Didática da Matemática não se reduz a pesquisar uma boa maneira ou modelo de ensinar uma determinada ideia ou conceito científico. Para Artigue (1996), é preciso uma metodologia de investigação científica que procure extrair relações entre pesquisa e ação sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos preestabelecidos. Nessa direção, a Engenharia Didática enquanto metodologia caracteriza-se como produto didático

que envolve plano de ensino, criação de materiais didáticos e esquema experimental, baseado nas realizações didáticas em sala, ou seja, sobre a concepção, realização, observação e avaliação.

Deste modo, o trabalho do professor é “[...] propor ao estudante uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor” (BROUSSEAU, 1996, p. 49). Em geral, o papel do professor é oferecer um conjunto de boas sequências de ensino, de modo a aperfeiçoar a ação autônoma do estudante e sua efetiva aprendizagem. Estas sequências buscam criar um ambiente que permita que o estudante atue com a mínima interferência explícita ou tácita do professor.

A atuação ativa do estudante no seu processo de aprendizagem apresenta um requisito fundamental que precisa ser valorizado, que é a pesquisa. Enquanto trabalho que envolve planejamento, o sucesso da pesquisa também está condicionado ao procedimento, envolvimento e habilidade de escolher o caminho adequado para verificar os objetivos da investigação. A Engenharia Didática, enquanto vertente da pesquisa qualitativa, busca estudar os problemas inerentes à aprendizagem de conceitos específicos da Matemática: diagnóstico de concepções, compreensão do desenvolvimento lógico das estratégias dos estudantes e aprendizagem.

Assim, os pressupostos de Brousseau (1996) dentro da metodologia da Engenharia Didática buscam contribuir com a descrição e a compreensão de uma situação, estabelecendo questionamentos e observações, proporcionando significado ao objeto de estudo. A Engenharia Didática, como metodologia relatada por Artigue (1996), compreende quatro etapas: a 1ª etapa, das análises preliminares, a 2ª etapa da concepção e da análise a priori, a 3ª etapa, da experimentação e a 4ª e última etapa, da análise a posteriori e validação, conforme Figura 1.



**Figura 1:** Etapas da Engenharia Didática  
Fonte: Acervo próprio

A etapa 1 (**análises preliminares**) consiste na obtenção de um referencial teórico e analisa como se encaminha determinado conhecimento ao estudante, como ocorre o ensino atual em relação àquele conhecimento, as concepções dos estudantes, as dificuldades e ingerências, que, segundo Artigue (1996), marcam a evolução do conteúdo a ser estudado. Nesta etapa, portanto, realiza-se uma revisão literária envolvendo condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente em que ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e dos obstáculos encontrados pelos estudantes dentro deste contexto de ensino.

A etapa 2 (**concepção e análise a priori**) envolve a definição das variáveis que estarão sob controle (ARTIGUE, 1996), comportando uma parte descritiva e outra preditiva, na qual o comportamento do estudante é o ponto principal para análise. Nesta etapa, Machado (2002) ressalta que a pesquisa delimita as variáveis de comando, que podem ser locais ou globais pertinentes ao sistema didático (professor/aluno/saber) e que são consideradas essenciais pelo pesquisador/professor, sendo abordadas nas várias sessões ou fases de uma Engenharia Didática.

A etapa 3 (**experimentação**) é a ação de conhecer o *lócus* para aplicação da sequência didática, com população predefinida e os registros das observações

realizadas na investigação. Dessa maneira, a experimentação pressupõe: explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa; a determinação da população de estudantes que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; a aplicação do instrumento de pesquisa; o registro de observações feitas na experimentação (MACHADO, 2002). No contrato didático é essencial a consciência da não interferência explícita do professor, evitando-se explicações ou “dicas”, conforme Brousseau (1996), facilitando as resoluções por parte dos estudantes, propiciando, assim, condições que permita sua mobilização no enfrentamento e na resolução de um problema mesmo que parcialmente.

Por fim, a etapa 4 (**análise a posteriori e validação**) se assenta no conjunto de dados coletados para a experimentação, mas também na construção de conhecimentos dos estudantes dentro e fora da sala de aula. Para Artigue (1996), os dados são geralmente completados por informações obtidas por meio da utilização de instrumentos didáticos, como: questionários ou entrevistas individuais com pequenos grupos, realizados em diversos momentos do processo de ensino. Portanto, esta etapa se caracteriza pelo tratamento dos dados coletados e sua confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos resultados e em que condições as questões levantadas foram respondidas. Assim, é possível analisar se ocorreram e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

O aporte da Engenharia Didática para o ensino como campo metodológico refere-se à possibilidade de apresentar a fundamentação teórica para o professor conhecer seu significado, formando um elo entre a teoria e a prática em sala de aula. Baseado nessa premissa é que o artigo justifica sua importância.

## **SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA ESFÉRICA**

Com o objetivo de colocar em prática os pressupostos teóricos da Engenharia Didática, foi escolhido o tema Geometria Esférica, assunto ainda não pertencente ao currículo do ensino básico. A justificativa pela escolha desse tema vincula-se à

existência de discussões acerca da inserção de Geometria Esférica nos currículos escolares que se encontram nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998), os quais apresentam a importância do ensino de outras geometrias aos estudantes:

[...] a Matemática não evolui de forma linear e logicamente organizada. Desenvolve - se com movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Frequentemente um conhecimento é amplamente utilizado na ciência ou na tecnologia antes de ser incorporado a um dos sistemas lógicos formais do corpo da Matemática. Exemplos desse fato podem ser encontrados no surgimento dos números negativos, irracionais e imaginários. Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a Geometria Euclidiana, para aceitação de uma **pluralidade de modelos geométricos**, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico. (BRASIL, 1998, p. 24, grifo nosso).

Neste sentido, os PCN colocam que, entre os objetivos do ensino de Matemática, se encontra o desenvolvimento do pensamento geométrico. Recomenda-se a exploração de situações de aprendizagem que levem o estudante a resolver situações problema de localização e de deslocamento de pontos no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas e saber usar diferentes unidades de medida. Portanto, há uma orientação para situações de aprendizagem que levem o estudante a conhecer, além da geometria euclidiana, conceitos de Geometria Esférica, construindo e interpretando suas representações.

Os avanços da Geometria Esférica se devem aos trabalhos do alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann<sup>3</sup>. Com base em uma linguagem intuitiva, Riemann apresentou um conjunto de conceitos e postulados que mais tarde passaria a ser conhecido como Geometria Esférica. De acordo com Mlodinow (2010), Riemann afirmava que o plano é a superfície de uma esfera, e uma reta é interpretada como o círculo máximo. Por fim, estabeleceu a impossibilidade de traçar retas paralelas a

---

<sup>3</sup> Bernhard Riemann (1826-1866) foi o primeiro a reconhecer a Geometria Esférica como um tipo de geometria não Euclidiana na qual não existem retas paralelas. Contudo, ao contrário do que acontece na Geometria Hiperbólica e na Geometria Euclidiana, na Geometria Esférica duas retas (dois círculos máximos) distintas não se interceptam em apenas um ponto, mas sim em dois pontos antípodas, não se verificando, portanto, o primeiro postulado de Euclides, que implica que dois pontos definem uma única reta.



um ponto qualquer da esfera e concluiu que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico é superior a dois ângulos retos.

Segundo Petit (1982) e Courant e Robbins (2000), a Geometria Esférica colocou em xeque o sistema geométrico de Euclides. Se Riemann não tivesse sido tão imprudente em incluir a Geometria na sua lista de interesses, o instrumento matemático que Einstein precisou para explicar a teoria da relatividade não teria existido.

Passamos a descrever as quatro fases (Análises preliminares; Concepção e Análise a priori; Experimentação; Análise a posteriori e validação) da Engenharia Didática que foi aplicada a um grupo de quatorze estudantes do ensino médio de uma escola da rede pública de Tijucas, Santa Catarina.

### **1ª etapa: Análises preliminares**

Como premissa na utilização da Engenharia Didática, a 1ª etapa (das análises preliminares) apresenta a justificativa (Figura 2) para a importância da Geometria Esférica para o ensino básico, levando-se em consideração os pressupostos necessários deste nível de ensino e as contribuições promovidas por sua inserção em sala de aula.

Segundo Almouloud (2004), apesar da Geometria ser um ramo importante da Matemática, por servir principalmente de instrumento para diversas áreas do conhecimento, existe atualmente problemas relacionados ao seu ensino, caracterizadas pela carência de correlação com outras áreas do conhecimento, o que impede uma visão mais ampla e crítica por parte do estudante. Cabariti (2006) cita alguns estudos e práticas docentes a partir do levantamento de informações que destacam o interesse de professores por uma proposta de ensino que possibilite o aprofundamento da geometria euclidiana, cujos conceitos são objetos de ensino na educação básica. A autora ainda afirma que a riqueza da história da Geometria pode proporcionar um estudo sobre Geometria Esférica.



Figura 2: Algumas justificativas para a importância da abordagem do tema.  
Fonte: Acervo Próprio

Barreto (2007), no seu artigo intitulado: “*Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias não Euclidianas*”, publicado na revista *Vértices*, aponta a Geometria como um dos tópicos de discussão da atualidade, necessitando de reformulação do ensino no Brasil. Ela menciona que a Geometria Esférica forma um ramo da Matemática importante sob os pontos de vista histórico e educacional.

Leivas (2012), em seu artigo: “*Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em Geometria*”, publicado na revista *SBEM-RS*, realiza uma reflexão teórica a respeito do tema educação geométrica, buscando oferecer subsídios para a formação inicial e continuada de professores de Matemática no processo de ensino de Geometria. Passamos ao delineamento do quadro-síntese (Quadro 1) das ponderações que permearam a primeira etapa.

<b>1</b>	<b>Quadro didático, desenvolvido de acordo com a Teoria das Situações Didáticas de</b>
----------	--

<b>Brousseau (1996).</b>	
2	Nos conhecimentos mais específicos envolvendo Geometria Esférica, embasado na Geometria, cujo desenvolvimento fornece subsídios para compreensão de sua relevância e lugar no ensino básico.
3	As várias concepções metodológicas e conceituais encontradas no decurso do desenvolvimento histórico da Geometria Esférica e da relação com as possíveis resoluções em situações-problema contextualizadas.
4	Pesquisas que constataam a escassa exploração de situações-problema no livro didático de Ensino Médio envolvendo implicitamente conceitos de Geometria Esférica.
5	Os possíveis entraves que se situam na utilização pelos estudantes de habilidades como a interpretação e a busca de heurísticas para a resolução de problemas contextualizados no globo terrestre.

Quadro 1: Ponderações à primeira etapa da Engenharia Didática:

## 2ª etapa: A Concepção da sequência didática e a Análise a priori

Na segunda etapa, determinamos as variáveis globais que permitiram a caracterização e a concepção da sequência didática envolvendo Geometria Esférica, a saber: a adoção de alguns aspectos da teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996); a utilização de situações-problema como recurso didático; a realização de atividades que viabilizam a comunicação entre os estudantes para possível utilização de conhecimentos como ferramenta para a resolução das atividades. Na análise a priori de cada questão (Figura 3), é importante determinar o objetivo, avaliar as variáveis didáticas envolvidas e prever as estratégias de resolução. Ressalta-se a importância de realizar uma análise a posteriori objetivando verificar se se faz necessária uma correção na elaboração da sessão seguinte.

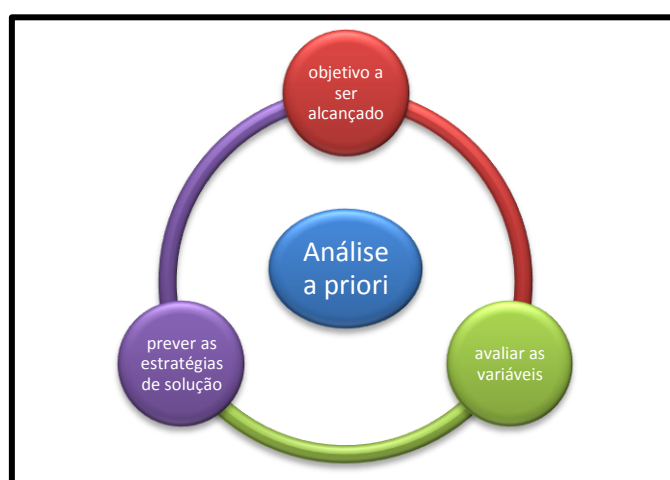


Figura 3: Elementos observáveis na análise a priori

Fonte: Acervo próprio

Passamos a descrever as considerações presentes nos três requisitos acima que foram realizados em sala de aula.

### **3ª etapa: A experimentação (sequência didática): 1ª fase.**

O objetivo da 1ª fase foi despertar o interesse sobre o tema com os estudantes, identificando suas concepções acerca da geometria terrestre e reconhecer a existência da Geometria Esférica. A Geometria Esférica encontra-se presente nos desenhos animados, na religião, na história da navegação, na natureza, nas artes e na ciência, ocupando desde tempos remotos, diferentes papéis na história da humanidade.

Campo da Matemática desenvolvido no fim do século XVII, a Geometria Esférica provocou a ira de diversos filósofos, não conseguindo imediata aceitação no meio científico. A relação do homem com este sistema geométrico permitiu pensar, certa vez, que o mundo era plano, e que, no fim do horizonte, os navios desapareceriam. Conhecer este sistema e compreender o mundo em que vive exige a tarefa de investigar sua gênese e desenvolvimento ao largo da história da Matemática, o que, para muitos, é uma missão desafiadora. A experiência didática relatada neste artigo ocorreu em uma escola do município de Tijucas, com quatorze estudantes cursando o segundo ano do ensino médio, tendo como foco o assunto Geometria Esférica. A atividade teve início por meio de uma conversa, conduzida pelo professor, autor desse artigo, em que os estudantes foram motivados a expor suas ideias, conhecimentos e inquietações a respeito da Geometria Esférica. No trânsito das conversas, foi proposto aos estudantes apresentar suas concepções para resolução de duas atividades.

#### Atividade 01: Correndo e não retornando.

As variáveis didáticas envolvidas nesta 1ª atividade foram:

- a noção de reta, pertencendo ao domínio da Geometria, de fácil compreensão e representação simbólica.

- a relação entre a distância percorrida e o formato da imagem do trajeto, que permite a existência de mais de uma solução.

**Problema: É possível ocorrer que um caçador ao partir de certo ponto da Terra, e andar 10 km para Sul, 10 km para Leste e 10 km para Norte, voltar ao ponto de partida?**

Para a organização do registro, escolhemos algumas respostas apresentadas pelos estudantes, apresentadas no Quadro 2.

<i>Superfície escolhida / concepção de geometria</i>	<i>Transcrições do estudante</i>
Plana (Geometria euclidiana)	<i>“Se ele for em linha reta não, mas se ele traçar linhas distintas, sim”</i>
Esfera (Geometria esférica)	<i>“Para voltar ao ponto de partida, caminharia sobre um círculo”</i>
Exclusão à Geometria Euclidiana.	<i>“Não é possível a menos que haja uma alteração no problema”</i>

Quadro 2: Tabela de organização das respostas

Dos estudantes participantes, quatro (28,57%) assinalaram que haveria solução cujo caminho seria formado por um triângulo. É possível que a escolha por esta solução esteja condicionada à obrigatoriedade dos estudantes encontrarem geralmente uma resposta, característica do ensino de Matemática, e também por desconsiderarem as noções de pontos cardeais, conteúdos trabalhados no ensino de Geografia desde o nível fundamental. Nove estudantes (64,28%) assinalaram que seria impossível retornar ao ponto de partida.

Este grupo percebeu que, numa superfície plana, de acordo com os dados do problema, não é possível o caçador retornar ao ponto de origem. Entretanto, o problema situa-se no planeta Terra, cuja geometria não é euclidiana (plana). Apenas um estudante assinalou que é possível o caçador voltar ao ponto de partida cuja trajetória seria por arcos de círculo, indicando indícios que utilizou conceitos de Geometria Esférica.

#### Atividade 02: De uma ilha a outra.

As variáveis didáticas envolvidas nesta segunda atividade foram:

- o percurso da tripulação, sendo a representação dele de fácil compreensão;
- noção de geodésica que permite demonstrar a noção de reta na Geometria

Esférica;

- o número de soluções apresentadas: duas, trajetória retilínea e curvilínea;

**Problema: Seja bem-vindo estudante! Você agora é parte da tripulação do navio LOBARIEMAN. A sua missão é encontrar uma coleção de artefatos da coroa que, há muitos anos, esteve escondido em Fernando de Noronha, Brasil. Para não levantar suspeitas da marinha brasileira sobre as atividades, você partirá da ilha de Florianópolis, capital de Santa Catarina. Essa missão exige o máximo de sigilo e precisão.**

**a) Para a tripulação LOBARIEMAN chegar a Fernando de Noronha, como você acha que será o percurso percorrido?**

**b) Em Geometria, qual a figura você usaria para representar esse percurso?**

**c) Como você representaria no papel a situação a) e b)?**

Para a organização do registro, escolhemos algumas respostas apresentadas pelos estudantes, apresentadas no Quadro 3.

<i>Transcrições dos estudantes</i>
<i>Teria que fazer uma curva para chegar até a outra ilha.</i>
<i>De Florianópolis a Fernando de Noronha, será em linha reta.</i>
<i>Não sei qual será a resposta, mas será sigiloso.</i>
<i>Levará várias horas, mas chegará se for em linha reta.</i>

**Quadro 3:** Organização das respostas

Esta questão teve vários objetivos, como verificar se os estudantes sabiam localizar as ilhas de Fernando de Noronha e Florianópolis, representar a trajetória percorrida pela tripulação que seria uma curva, e conceituar que o modelo ideal para representar a distância entre as ilha seria um arco de círculo. Porém, apenas quatro estudantes (28,57%) conseguiram identificar corretamente as ilhas e representar a trajetória, como apresentado na Figura 4.



**Figura 38:** Protocolo de um estudante apresentando o modelo geométrico de saída de Florianópolis com destino à Fernando de Noronha.

Havia uma expectativa de que, para esses estudantes, a menor distância entre dois pontos seria um segmento de reta, confirmada por sete estudantes (50%), mostrando que, de fato, percebem o mundo de modo plano. Três estudantes (21,42%) não apresentaram solução, possivelmente, por não reconhecerem a localização da ilha de Fernando de Noronha. A análise evidencia que os conceitos geométricos estabelecidos na literatura específica são apresentados para os estudantes em sua forma final e acabada, fato que não contribui para que eles construam seus conhecimentos. O que se percebe na prática é que muitos livros didáticos de Matemática tratam a Geometria como se fosse um dicionário com definições e diversas propriedades, sem justificar os motivos de suas relações. Isto contribui para que os estudantes construam conceitos por meio da memorização, não conseguindo reconhecer sua representação em outros sistemas geométricos.

### **3ª etapa: A sequência de aprendizagem: 2ª fase**

Nessa segunda fase, o professor aplicou duas atividades para o aprofundamento de conceitos referentes à Geometria Esférica. Os estudantes tentaram resolver a questão, inicialmente sem a participação do professor. Após as soluções apresentadas pelos estudantes, o professor explicou cada item da questão. As explicações buscaram apresentar aos estudantes, situações do cotidiano que envolvessem conceitos de Geometria Esférica.

#### Atividade 03: O avião maluco.

Esta atividade objetivou que estudante percebesse que uma situação pode ou não ter solução, limitando o uso da tentativa e erro. O incentivo à busca de outras estratégias facilitadoras possibilitou aos estudantes conjecturar relações entre a trajetória do avião e as possíveis consequências de sua rota. Abaixo se apresenta o problema colocado.

**Problema: O piloto de um avião comercial avisa a seus passageiros que sairá São Paulo com destino a New York às 14 h e que o tempo de duração da viagem está estimado em 6 horas, com o trajeto inclinado à direita. O copiloto se aproveita da situação e comenta com o piloto, sem saber que seu microfone está aberto, que irão fazer uma trajetória retilínea, mostrando, assim, o caminho utilizado a todos os passageiros.**

**(a) Você concorda ou discorda do copiloto?**

**Explique, embasando seus argumentos em algum comentário ou cálculo matemático, que exemplifique a posição assumida por você.**

**(b) Agora, cada dupla deverá expor seu argumento a duplas que tiveram argumento contrário. Terminada a exposição, cada grupo terá que apresentar um veredicto quanto ao argumento de outra dupla:**

**( ) Argumento correto ou ( ) Argumento incorreto**

**Se assinalou argumento incorreto, descreva abaixo o motivo.**

As variáveis didáticas identificadas na solução do problema por parte dos estudantes foram:

- a trajetória apresentada antes da saída do avião;
- a escolha de uma história, que propicie ao estudante uma situação fictícia, e que o desvincule do usualmente estabelecido, possibilitando um repensar desta realidade;
- a escolha de situação-problema desafiadora que permite ao estudante interpretar os dados relevantes, refletir para o levantamento de hipóteses, expor e ouvir os argumentos de outras duplas para a tomada de decisão e o debate.

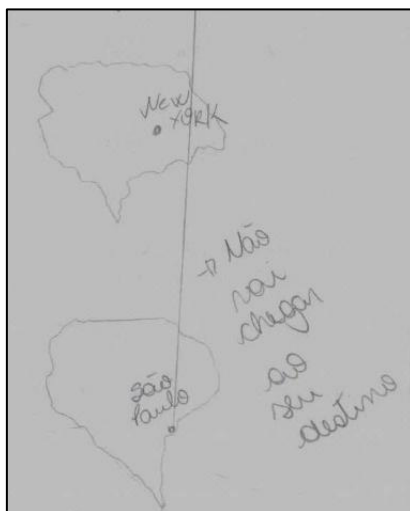
As estratégias que ocorreram em ordem decrescente de probabilidade foram:

E1: Por tentativa e erro, o estudante ensaiou várias possibilidades para a busca de possíveis trajetórias utilizando representações simbólicas e textuais.

E2: A utilização do conceito geodésica como significado para compreensão da trajetória formada pelo avião.



Esta questão buscou identificar como os estudantes compreendem a situação de um avião realizar uma trajetória retilínea, partindo de São Paulo com destino a *New York*. Esperávamos que, se o avião deixasse de acompanhar a curvatura do planeta Terra, sua trajetória seria uma reta tangente ao globo terrestre, portanto, se perderia no espaço ou seria destruído pela ação da gravidade, porém 50% da turma entendeu que o avião cairia ou que não chegaria ao destino. Três estudantes (21,42%) compreenderam que o avião chegaria ao destino sem problemas, caso sua trajetória fosse uma reta, conforme Figura 5.



**Figura 5:** Concepção apresentada por um estudante sobre a atividade 3.

Também foi constatado que três estudantes (21,42%) responderam que o avião chegaria ao destino caso sua trajetória fosse constituída por curvas, percepção adequada para a situação proposta. Apenas um estudante (7,14%) não apresentou resposta ao problema. Nessa questão, as evidências mostram que os estudantes, em geral, não conseguiram utilizar outros modelos geométricos além do euclidiano para resolver a problemática. A análise evidencia que há fragilidades na formação de conceitos e sua respectiva representação geométrica.

#### Atividade 04: Síntese

O objetivo desta atividade, inicialmente, foi registrar e organizar as produções dos estudantes com a mínima intervenção do professor. No segundo momento, o professor estendeu a discussão para a classe. A etapa de síntese é baseada na Didática da Matemática, institucionalizada por Brousseau (1996), que busca

representar o momento da dialética da situação didática. Na institucionalização, o professor reconhece os conhecimentos desenvolvidos pelos estudantes, organizando e classificando com relação ao contexto. A sequência didática buscou contribuir junto aos estudantes para a percepção da existência de problemas que necessitam ser tratados por conhecimentos da Geometria Esférica, descartando as noções comuns da Geometria Euclidiana.

Sob este foco, a abertura dos debates permitiu que os estudantes pudessem expor suas considerações desenvolvidas durante as atividades. Seus argumentos foram valorizados pelo professor que encaminhou o fechamento da atividade. O enunciado apresentado aos estudantes para a síntese encontra-se exposto no Quadro 4, em que apresentamos as respostas de alguns estudantes para cada situação-problema.

Você irá retornar aos problemas anteriores, preenchendo a tabela abaixo. Procure o título dos problemas, quantas e quais foram as soluções encontradas, assim como represente por meio de desenho cada situação-problema apresentada.

Situação-Problema	Título	Soluções		Representação por meio de desenho ou texto explicativo
		Quantas?	Quais?	
1	Correndo e não retornando	3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Formaria um triângulo</li> <li>• Não é possível voltar</li> <li>• É possível retornar, mas não seria um triângulo</li> </ul>	
2	De uma ilha a outra	2	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Seria uma linha reta.</li> <li>• Seria uma curva</li> </ul>	
3	O avião Maluco	3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Não chegará ao destino</li> <li>• Chegará em linha reta</li> <li>• Chegará realizando uma curva</li> </ul>	

**Quadro 4:** Organização e registro dos resultados da situação de aprendizagem

#### 4ª etapa: análise a posteriori e validação.

Após o fechamento da terceira etapa, o professor propôs como desafio, as duas primeiras atividades expostas na primeira fase da terceira etapa, apresentando os seguintes resultados, apresentados no Quadro 5.

<i>Superfície escolhida / concepção de geometria</i>	<i>Transcrições do estudante</i>
Trajatória formada será um triângulo (visão euclidiana)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Sim, é possível e a trajetória tem a forma de um triângulo com linhas retas.</li> <li>- No plano ele consegue, agora na geometria esférica não.</li> </ul>
Trajatória formada por arcos de círculo (visão não euclidiana)	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Se andar no plano não chegaria, porém como a Terra é esférica, conseguiria voltar.</li> <li>- Sim, pois vai andar em retas, mas as retas nessa superfície são curvas.</li> <li>- Sim é possível por causa do formato da Terra, que é esférico.</li> <li>- Sim, pois a terra é uma esfera, com vários meridianos que serão as retas desse sistema, logo sempre se encontrarão nos pólos, ao contrário da geometria de Euclides.</li> <li>- Se o caçador andasse sobre uma folha plana seria possível, mas como a Terra é esférica, ele saindo dos pólos conseguiria voltar para o ponto de partida.</li> <li>- Sim é possível. Se ele estiver nos pólos, o ponto de partida coincidirá com o ponto de chegada.</li> <li>- Sim é possível voltar devido ao formato da Terra, o caminho será um triângulo esférico, podendo sair do pólo norte ou sul.</li> <li>- Como o modelo é esférico para a Terra é possível. Nessa geometria não existem retas paralelas, e a trajetória será um triângulo esférico.</li> <li>- Antes eu achava que não era possível, agora conhecendo a Geometria Esférica, sei que conseguirá voltar ao ponto de partida.</li> </ul>
Impossibilidade de Solução	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Não é possível, pois se ele caminhar em uma reta infinita, não chegará ao seu ponto de partida.</li> <li>- Não é possível, não tem como retornar.</li> <li>- Não é possível, porque ele foi para o Norte e o ponto de partida dele é o Sul.</li> </ul>

**Quadro 5:** Resultados apresentados à primeira questão utilizada na 3ª etapa, após a sequência de aprendizagem 2ª fase

Dos estudantes participantes, dois (14,28%) afirmaram que haveria solução para o problema, cuja trajetória seria possível se a superfície fosse plana. Essa falta de compreensão genuína de um conceito ou proposição está intimamente ligada à carência de significados claros, precisos e diferenciados na sua estrutura cognitiva. Nove estudantes (64,28%) apresentaram solução utilizando conhecimentos de Geometria Esférica e apontaram que a trajetória do caçador seria construída por meio de arcos de círculos. Em comparação com a análise a priori, tanto os desenhos como as transcrições evidenciam uma melhora significativa na compreensão e na qualidade da descrição dos conceitos e símbolos.

Ainda, três estudantes (21,42%) apontaram que não haveria solução para a situação proposta. A análise evidencia, possivelmente, uma manutenção na sua posição de inércia, não mostrando explicitamente, uma postura para eventuais mudanças no seu desenvolvimento cognitivo. Novak e Gowin (1996) relembram que o estudante é responsável por sua aprendizagem na medida em que reorganiza sua estrutura cognitiva, atribuindo significados aos materiais utilizados para sua aprendizagem; porém alguns estudantes desenvolvem uma disposição para aprendizagem automática em relação a um determinado conteúdo e que, devido ao alto nível de ansiedade ou uma experiência crônica de fracasso num determinado conteúdo, pode acarretar uma falta de confiança em sua capacidade de aprendizagem. O Quadro 6 apresenta os resultados da segunda atividade da terceira etapa.

Os resultados apontam que seis estudantes (42,85%) entenderam que para realizar o trajeto, o avião precisaria traçar uma rota curvilínea, evidenciando, assim, uma visão não euclidiana para resolver o problema. Em comparação com os resultados da atividade apresentada antes da sequência de aprendizagem, houve uma evolução na utilização de conhecimentos acerca de Geometria Esférica. Essa evolução do pensamento pode ser identificada, por exemplo, quando um estudante elucida conceitos elementares de Geometria Euclidiana e Esférica como “linha reta”, “superfície esférica”, “curva” e “menor distância entre dois pontos”. A combinação de conceitos pertencentes a outras áreas do conhecimento foram evidenciadas na transcrição também de alguns estudantes, ao afirmarem a necessidade de utilizar uma trajetória curvilínea pelo avião, evitando assim, possíveis problemas como

“pressão”, “oxigênio” e “combustível”. Essas relações conceituais devem ser enfatizadas e discutidas em sala de aula, devendo ser reconhecidas pelo professor de forma positiva, pois a aprendizagem é um processo onde o estudante reconhece novas relações conceituais entre conjuntos de conceitos ou proposições.

<i>Superfície escolhida / concepção de geometria</i>	<i>Transcrições do estudante</i>
Trajectoria formada será um triângulo (visão euclidiana)	- <i>Ele teria que andar em linha reta para chegar a New York com sucesso.</i>
Trajectoria formada por arcos de círculo (visão não euclidiana)	- <i>Se andar em uma reta não chegará ao seu destino. Mas se traçar uma curva completará sua viagem.</i> - <i>Irá para o espaço e com a pressão da atmosfera irá explodir. O que ele precisa fazer é uma curva, pois a Terra é esférica e não plana, assim ele chegará.</i> - <i>Se ele percorresse em linha reta sairia do nosso sistema, agora se ele realizasse por meio de uma curva chegaria ao destino desejado, pois vivemos em uma esfera achatada nos pólos e linhas retas são só para pequenas distâncias.</i> - <i>Ele não percorre em linha reta, pois a nossa superfície é esférica e tudo será uma curva. A geometria explica que uma reta é a menor distância entre dois pontos, isto é, pra pequenas distâncias, já esta viagem é uma distância grande e o avião deverá traçar uma curva.</i> - <i>Ele vai ter que acompanhar a curvatura da Terra, não dá para ir sempre reto, só assim ele vai chegar ao destino.</i> - <i>Pelo que aprendi, o avião precisará fazer uma curva para chegar ao seu destino, assim não terá problemas com pressão, ar ou falta de combustível. Se for em linha reta, jamais chegará, tem que andar por uma curva.</i>
Impossibilidade de Solução	- <i>Não chegaria, ele cairia, também não haveria oxigênio suficiente.</i> - <i>Vai sair da Terra ou vai bater em alguma coisa.</i> - <i>Sairia de órbita se fosse executado em uma reta euclidiana.</i> - <i>Sairia da atmosfera e explodiria.</i> - <i>Se ele fosse toda vida em linha reta iria sumir de nossa visão, assim como o navio do mar.</i> - <i>Ele irá cair, pois não tem como um avião andar oito quilômetros só em linha reta.</i> - <i>Acontece que ele vai sempre andar, ou vai bater em algum outro avião ou bater no morro, caso mude sua altura.</i>

**Quadro 6:** Resultados apresentados na segunda questão utilizada na 3ª etapa, após a sequência de aprendizagem 2ª fase:

Ainda, foi constatado que sete estudantes (50%) compreenderam a impossibilidade de chegada ao destino caso o avião resolvesse realizar uma trajetória em linha reta. É preciso considerar duas situações nas transcrições desses estudantes: a primeira, teórica, em que o avião continuaria em linha reta e se perderia no espaço. A segunda, real, em que o avião não realiza sua viagem em linha reta, mas percorre uma trajetória que acompanha a curvatura da Terra. Essa trajetória é corrigida automaticamente pela atração gravitacional exercida pela Terra. Nesse sentido, o avião consegue manter sua altura constante, cuja manutenção é resultado da composição da força gravitacional e da força de sustentação do avião, embora a percepção visual evidencie que seu deslocamento ocorra de modo retilíneo. Com relação ao conceito de “linha reta”, esses estudantes não diferenciaram seu significado com relação à superfície abordada.

Foram ainda detectados, nos registros dos estudantes, conceitos como “oxigênio”, “órbita”, “explosão”, “altura”, “reta euclidiana”, “atmosfera”. Esses conceitos pertencentes a outras áreas do conhecimento representam uma versão simplificada, abstrata e generalizada da realidade. Essa relação com outras áreas do conhecimento sugere indícios de uma estrutura cognitiva rica em conexões entre conceitos. Por fim, um estudante (7,14%) respondeu que o caminho ideal seria uma linha reta para se chegar ao destino. Esse posicionamento mostra que as novas informações não interagiram com as ideias euclidianas já estabelecidas na estrutura cognitiva.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

É importante salientar a importância dos trabalhos de Guy Brousseau, associada à Engenharia Didática como suporte teórico e metodológico enquanto contribuição significativa para a construção de conhecimentos de Geometria Esférica em sala de aula.

No processo tradicional de ensino, a Geometria é apresentada pelo professor esperando que os estudantes se apropriem do conhecimento. A sequência de

aprendizagem que é proposta nesse trabalho inverte este modelo de apresentação. É a partir da estratégia de tentativa e erro que os estudantes desenvolvem caminhos para a resolução de situações-problema. Neste trabalho, o uso de símbolos geométricos como linguagem representacional potencializou a aprendizagem de conceitos de Geometria Esférica.

Nesta perspectiva, mais do que resultados esperados, sinalizamos a necessidade de aprofundar novas questões desencadeadas nos processos de ensino e de aprendizagem de Geometria Esférica. Significa a aceitação do caráter de provisoriedade do conhecimento, que impulsiona professores curiosos a qualificar suas ações profissionais. Seria importante ressaltar que esse trabalho de forma alguma está terminado, uma vez que o material abordado deve continuar sendo explorado.

Os materiais utilizados na estratégia didática foram considerados potenciais e eficazes, ao possibilitar compreensões e tratamento específicos por parte dos estudantes na apropriação dos conceitos de Geometria Esférica. Ainda, na análise a priori e a posteriori, constatou-se, na abordagem de conceitos geométricos euclidianos e esféricos, que a visualização e a compreensão são facilitadas quando os estudantes manipulam e constroem objetos para a sua representação. A participação do professor enquanto mediador no processo de construção dos conceitos foi essencial, pois se reconhece a dificuldade de transformar situações concretas em pensamento matemático.

Para Davis e Nunes (2005), existe a necessidade de se construir nas salas de aula uma cultura do pensar que propicie aos alunos:

- a) uma forma de explicitar, desde cedo, modalidades de pensamento, tornando-as, assim, passíveis de ser compartilhadas;
- b) um estímulo ou motivação para pensar, de forma a alcançar decisões acertadas;
- c) coragem para enfrentar situações novas;
- d) transferência de estratégias e conhecimentos gerados em um dado contexto para outros.

Um aspecto central na implementação de uma cultura do pensamento é desenvolver habilidades metacognitivas, pois é por meio delas que se torna possível a elaboração de conhecimentos e formas de pensar que assegurem maior possibilidade de sucesso e generalização, bem como, a aquisição da autonomia na gestão da aprendizagem e na construção de uma autoimagem do estudante.

A escolha da temática para a utilização dos pressupostos da Engenharia Didática para a abordagem de conceitos de Geometria Esférica, assunto ainda veiculado somente no Ensino Superior, ficou delineada pelo potencial deste assunto para a utilização de várias linguagens, como verbal, geométrica e textual. Esta natural possibilidade mostrou-se promissora para que os estudantes entendessem o papel de cada uma dessas linguagens e sua representação geométrica como alternativa otimizadora e organizadora na busca das soluções adequadas em função da geometria abordada. Nesta vertente, a metodologia adotada neste artigo se apresenta como uma oportunidade de explicitação do pensamento geométrico, por meio da institucionalização realizada pelo professor, assim como pelas locuções orais e escritas dos estudantes que podem ocorrer durante o processo de aprendizagem.

Além dos possíveis resultados esperados com este trabalho, seria interessante conhecer os processos de construção conceitual por estudantes que estão inseridos em cenários muito diferentes daquele proposto pelo professor, a fim de servir de comparação. Por isso, destaca-se a importância e a relevância de outros trabalhos buscarem solidificar os conhecimentos a respeito de Geometria Esférica.

Com relação às estratégias de ensino, recomendamos que, no planejamento, sejam utilizadas metodologias que facilitem o acesso ao pensamento dos estudantes, configurando um interessante aspecto a ser considerado em relação aos problemas enfrentados na prática pedagógica. No universo da sala de aula, professor e estudante se relacionam o tempo todo. O professor não ensina apenas transmitindo ou reproduzindo conteúdos mesmo que com métodos testados. O fato é que esse intenso relacionamento pode favorecer a aprendizagem dos estudantes e estudar sobre como professor e estudante se aproximam na construção de um laço de confiança e respeito.



## REFERÊNCIAS

- ALMOULOU, S. A. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. *Revista Brasileira de Educação*, São Paulo, n. 27, p. 94 - 108, Set /Out /Nov /Dez 2004.
- ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. *Didática das Matemáticas*. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4. p. 193-217.
- BARRETO, M. S. Do mito da Geometria Euclidiana ao ensino das Geometrias Não Euclidianas. *Vértices*. Rio de Janeiro, v. 9, n.1/3, 74-81, jan. 2007.
- BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BROUSSEAU, G. *A Teoria das Situações Didáticas e a Formação do Professor*. Palestra. São Paulo: PUC, 1996.
- CABARITI, E. A geometria hiperbólica na formação docente: possibilidades de uma proposta com o auxílio do cabri-géomètre. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2006, São Paulo.
- COURANT, R.; ROBBINS, H. *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.
- DAVIS, C.; NUNES, M. M. R.; NUNES, C. A. A. *Metacognição e Sucesso Escolar: Articulando Teoria e Prática*. *Cadernos de Pesquisa*, v. 35, n. 125, maio/ago. 2005. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/cp/v35n125/a1135125.pdf>>. Acesso em: 10 out. 2013.
- D'AMBROSIO, U. *Educação matemática: Da teoria à prática*. 14<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Papirus, 2009.
- DOUADY, R. *Didactique des Mathématiques*. *Enciclopédia Universalis*, 1985, p.885-889.
- FIORENTINI, D.; NACARATO, A. M. *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática*. São Paulo: Musa, Campinas: GEPFPM-PRAPEM-FE/UNICAMP, 2005.
- LEIVAS, J. C. P. *Educação geométrica: reflexões sobre ensino e aprendizagem em geometria*. *Revista SBEM-RS*, Porto Alegre, no. 13, v.1, p. 9-16, 2012.
- MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). *Educação Matemática: Uma introdução*. 2 ed. São Paulo: Educ., 2002. p. 197-208.
- MLODINOW, L. *A janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço*. São Paulo: Geração, 2010.
- NOVAK, J. D.; GOWIN, B. D. *Aprender a Aprender*. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 1996.

Submetido: Setembro de 2013

Aceito: Outubro de 2013