RELAÇÕES ENTRE OS OBJETOS OSTENSIVOS E OBJETOS NÃO-OSTENSIVOS DURANTE O ENSINO DA GEOMETRIA DO TAXISTA COM O SOFTWARE GEOGEBRA

Luciano Ferreira [1]
Universidade Estadual de Maringá
Rui Marcos de Oliveira Barros [2]
Universidade Estadual de Maringá

RESUMO

Este artigo traz resultados parciais de uma dissertação concluída no ano de 2011, ele surge de parte das atividades aplicadas a 15 alunos do 4° ano de licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual de uma cidade do noroeste do Paraná com dois objetivos principais: verificarmos a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados) advindos dos objetos ostensivos mostrados na tela do computador ao usar o software Geogebra e detectar manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem da Geometria do taxista. A fundamentação teórica utilizada compõem-se da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1999) e da Dialética do policiamento ostensivo e não-ostensivo (Bosh, 2000). Para um tratamento mais aprofundado dos dados, utilizamos a metodologia da análise de conteúdo de Bardin (1977). Nas atividades de laboratório, os alunos receberam instruções impressas minuciosas, inclusive com figuras explicativas, para realizar as atividades. Durante a realização das atividades, os participantes responderam a questões mediante registro escrito e pictórico que foram recolhidos e analisados. Com tal análise, mostramos que o estudo de Geometria não euclidiana, quando feito mediante o uso de software dinâmico (Geogebra), tanto pode ajudar a entender uma nova métrica como ocasionar dúvidas – potenciais obstáculos didáticos – a respeito de princípios geométricos euclidianos.

[1] lulindao66@hotmail.com
[2] rmobarros@uem.br

Palavras-chave: Ensino de Geometria, Objetos Ostensivos, Objetos não-ostensivo, Geogebra.

ABSTRACT

This paper has brought some partial results from a dissertation completed in 2011. It emerges from parts of the activities applied to 15 Mathematics undergraduates from the fourth year of a State University in the northwest of Paraná aiming the following: verifying the possibility of the emergence of non-scientific concepts (mistaken) that have occurred from the ostensible objects shown in the computer screen through the use of Geogebra software; and detecting some manifestations of possible obstacles originating from the Euclidian's concepts constitution in the Geometry the taxi driver´s Geometry. The theoretical framework is based on the Anthropological Didactic Theory - ADT (CHEVALLARD, 1999) and on the ostensible and non-ostensible monitoring Dialectics (BOSH, 2000). Aiming a deeper data analysis, we have adopted (1977) the content analysis methodology of Bardin (1977). In the laboratory activities, the undergraduates received detailed and printed instructions, with some explicative pictures, to accomplish the activities. While the activities were being done, the students answered the questions by written and pictorial record, which were collected and analyzed. Regarding the analysis, it was possible to show that the non Euclidian´s Geometry studies, being done through the dynamic software (Geogebra), may help to understand a new measuring instrument and might incite some doubts - potential didactic obstacles - about the Euclidian´s geometrical principles.

Keywords: Geometry Teaching; Ostensible Objects; Non-ostensible Objects; Geogebra.

INTRODUÇÃO

Três importantes motivos nos levaram a realizar o presente artigo: a inclusão do assunto Geometrias não euclidianas por parte Secretaria do Estado da Educação (SEED) nas Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná, divulgadas no final de 2006 (PARANÁ, 2008); conversas com professores da rede estadual e particular do Estado do Paraná interessados em conhecer Geometrias não euclidianas e a necessidade de atualizar os cursos de formação de professores de Matemática. Devido a estes motivos propusemos criar uma organização didática voltada para ensino introdutório de Geometria não euclidiana. A apresentação minuciosa da pesquisa encontra-se em Ferreira (2011). Neste artigo, mostraremos qual é a dificuldade de futuros professores em aceitar uma nova métrica, diferente da métrica euclidiana.

Ao trabalhar geometria, seja ela euclidiana ou não euclidiana, os processos de ensino e de aprendizagem são imprescindíveis das utilizações de fórmulas, notações, figuras, gráficos, teoremas, definições e propriedades. A importância de tais elementos nos sugeriu utilizar Bosch (2000) no preparo e na análise das atividades, pois a dinâmica existente entre objetos ostensivos e objetos não-ostensivos, descrita pela autora, nos ajudou interpretar o que aconteceu em nossa prática.

Para Bosh (2000), “durante a realização de uma tarefa matemática, trabalhamos com dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os não-ostensivos.”

Os objetos ostensivos (em latim "ostendere" significa mostrar, apresentar com insistência) são os objetos percebidos pelo toque, pelo olhar e pelo ouvir. Eles são objetos materiais ou objetos dotados de certas representações materiais, tais como signos, imagens, sons, gestos, etc. Pode-se compreender que os objetos ostensivos são objetos manipuláveis na realização da atividade matemática, são objetos percebidos com algum de nossos sentidos.

Os objetos não-ostensivos são aqueles que, presentes numa organização matemática, não são percebidos com os sentidos. São objetos como intuições, ideias, conceitos, definições, etc. Ou seja, este objeto é utilizado para manipular certos objetos ostensivos que lhes são associados, tais como uma palavra, uma frase, uma escrita, um gráfico, um gesto ou todo um discurso.

Um tanto paradoxalmente, uma vez estabelecida essa dicotomia entre ostensivos e não-ostensivos, acontece o que Bosh (2000, p.4) chama de: "Dialética do policiamento ostensivo e não-ostensivo": objetos não-ostensivos emergem da manipulação de objetos ostensivos, mas ao mesmo tempo, essa manipulação é sempre guiada e controlada por objetos não-ostensivos.

A Teoria Antroplogica do Didático (TAD) explica a origem dos conceitos matemáticos (não-ostensivos) e sua relação com os objetos que o representam (ostensivos) em termos da dialética citada anteriormente, ou seja, os conceitos guiam e controlam a manipulação dos ostensivos, mas conceitos também são emergentes da manipulação ostensiva em determinda organizações didáticas. Segundo Bosch (2000, p. 4), os conceitos aprecem do trabalho com os ostensivos, em resposta a questões e tarefas e em um entorno tecnológico-teórico dado a essa prática, que ao ser institucionalizada ou formalizada, estabelece relações entre os ostensivos e não-ostensivos que permitirão os primeiros referirem-se ou representar aos segundos em possíveis atividades futuras. Para ela:

> La Teoría Antropológica atribuye a los objetos ostensivos, al lado de su valencia semiótica, una *valencia instrumental* ligada a la capacidad de los sistemas de ostensivos para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas y teóricas. Desde el momento en que se consideran los objetos ostensivos como constitutivos de las organizaciones matemáticas y los ingredientes primarios de las tarefas, técnicas, tecnologías y teorías, se presentan, en primer lugar, como *instrumentos* de la actividad matemática, herramientas materiales sin las cuales no se podría realizar la actividad. Y, al igual que el albañil con su paleta (cuya valencia semiótica, dicho sea de paso, es innegable), lo que importa al realizador de la actividad matemática (y a todo aquél que debe reproducirla o hacerla reproducir), lo importante no es tanto lo que la herramienta pueda representar, sino su adecuación y efectividad en la realización de la actividad (BOSCH, 2000, p. 8).

Como podemos ver o uso de objetos ostensivos e não-ostensivos, são fundamentais para a constituição de uma praxeologia (apesar de não ser nosso objetivo aqui), pois esses objetos ligam as tarefas, as técnicas, as tecnologias e a teoria, ou seja, criam uma boa Organização Matemática (OM).

Uma forma de pesquisa em Educação Matemática é a análise do Erro. Existem erros que ocorrem por descuido, falta de atenção, problemas de dislexia, etc., mas alguns, aqueles que se repetem, que se manifestam reticentemente em alguém ou num grupo de indivíduos, merecem maior atenção. Brousseau (1983) classifica como erro a expressão, ou manifestação explícita, de um conjunto de concepções espontâneas, ou reconstruídas, que, integradas em uma rede coerente de representações cognitivas se manifesta como conhecimento.

Neste artigo, nos delimitamos à noção de obstáculo didático, que segundo (PAIS, 2002, p. 44), são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem escolar.

Para Brousseau (1983) os obstáculos didáticos são:

> [...] aqueles que parecem depender apenas de uma escolha ou um projeto do sistema educativo e provocado por uma transposição didática, que o professor dificilmente pode renegociar no quadro restrito da classe. Eles nascem da escolha de estratégias de ensino que permite a construção, no momento da aprendizagem, de conhecimentos cujo domínio de validade é questionável ou incompletos que, mais tarde, revelar-se-ão como obstáculo ao desenvolvimento da conceituação (BROUSSEAU, 1983 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 141).

Almouloud (2007, p. 133) traça a caracterização de obstáculos, formulada por Duroux (1983), e retomada por Brousseau (1989):

> a) Um obstáculo é um conhecimento, uma concepção, e não uma dificuldade, ou uma falta de conhecimento;
> b) Esse conhecimento produz respostas adequadas em certo contexto frequentemente encontrado;
> c) Mas ele produz respostas falsas, fora desse contexto. Uma resposta correta e universal exige um ponto de vista notavelmente diferente;
> d) Além disso, esse conhecimento resiste às contradições com as quais ele é confrontado e ao estabelecimento de um conhecimento novo. Não basta ter um conhecimento novo para que o precedente desapareça (é o que diferencia o transpor de obstáculos da acomodação de Piaget); é então, indispensável identificá-lo e incorporar a sua rejeição no novo saber;
> e) Depois da tomada de consciência de sua inexatidão, ele continua a manifestar-se de modo intempestivo e obstinado (ALMOULOUD 2007, p. 133).

Ainda Almouloud (2007, p. 137) cita que Artigue (1990, p. 261-262) identificou quatro fatores que podem ser produtores de obstáculos, porém o autor enuncia cinco fatores: são eles a generalização abusiva, a regularização formal abusiva, a fixação em uma contextualização, a aderência exclusiva a um único ponto de vista e o amálgama de noções.

Esclarecemos conhecer que existem diferentes tipos de obstáculos caracterizados na literatura, eles podem ser classificados em: obstáculos epistemológicos, obstáculos psicológicos, obstáculos ontogênicos e obstáculos didáticos. Os três primeiros não serão abordados neste artigo, utilizaremos apenas a noção de obstáculo didático. Estes últimos são os que têm "origem didática que parecem depender apenas de uma escolha ou de um projeto do sistema educativo (BROUSSEAU, 1983, p. 176 *apud* ALMOULOUD, 2007, p. 141).

Com o aporte de tais teorias, escolhemos o Geogebra, pois além de ser um software *livre* de *Geometria Dinâmica*, está implantado na rede Paraná Digital (todos os computares da rede Estadual de Educação do Paraná), e ainda apresenta uma característica diferente dos demais softwares de Geometria Dinâmica. O Geogebra apresenta duas janelas, uma que exibe a área de desenho e outra que exibe objetos aritmético-algébricos. Vinculado a essa janela algébrica existe um campo de entrada no qual podem ser digitados comandos analíticos para o traçado de objetos na área de desenho.

As tarefas resolvidas exigiam dos alunos o uso de técnicas de "arrastar e observar" os ostensivos mostrados na tela. Um dos interesses na realização destas atividades foi de capacitar os futuros professores de matemática mediante a apresentação de uma técnica relativamente nova, pois só pôde ser desenvolvida e aperfeiçoada após a criação dos primeiros softwares de *Geometria Dinâmica* no início da década de 80 do século passado. Um dos primeiros softwares desenvolvidos com essa característica foi o CABRI – Cahier de BRouillon Informatique, que foi desenvolvido no extinto Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática do IMAG (Instituto de Informática e Matemática Aplicada) da Universidade Joseph-Fourier em Grenoble, França. A primeira versão desse software data de 1988, segundo Cabariti (2004, p. 24).

A prática aperfeiçoada durante a resolução de tarefas apresentadas poderá ser utilizada regularmente em salas informatizadas das escolas do ensino fundamental e médio, tornando-se, como dizem Junior e Freitas (2009) técnicas de uso regular nas instituições escolares.

Chevallard ressalta que ao analisarmos a relação institucional do uso de técnicas na resolução de tarefas, devemos considerar o tempo como variável primordial, no seguinte sentido. “Para se determinar uma relação institucional precisamos recorrer a uma praxeologia, e o acesso a essas relações pode ser feito pela observação dos seus diferentes momentos ou ainda, do contexto em que a mesma foi concebida” (JUNIOR; FREITAS, 2009, p. 05).

Podemos afirmar que apesar de softwares de *Geometria Dinâmica* estarem disponíveis desde a década de 80 do século passado, a relação temporal é muito curta para que a técnica de “arrastar e observar”, que resolve vários tipos de tarefa, seja aceita como científica em uma Organização Matemática.

Sabendo quais teorias e quais ferramentas a utilizar, planejamos 19 atividades e aplicamos a 15 alunos do 4° ano de licenciatura em Matemática de uma Universidade situada numa cidade do noroeste do Estado do Paraná. Mas, no âmbito desse artigo, nos reportaremos a apenas quatro dessas 19 atividades. Os alunos serão identificados mediante codinomes de A1 a A15. As atividades realizaram-se num dos laboratórios de informática da Universidade, e havia disponibilidade de um computador por aluno.

Nossos interesses foram:

i) *verificar a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados) advindos dos objetos ostensivos mostrados na tela do computador ao usar o software Geogebra* e;

ii) *detectar manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova Geometria*.

Para responder tais perguntas, as atividades foram entregues aos alunos, com espaço para respostas às questões impressas nas próprias atividades, o que facilitou as análises.

Para as análises a metodologia utilizada foi a Análise de Conteúdo de Bardin (1977). Mas também nos fundamentamos em Moraes (1999), que considera a análise de conteúdo algo além de simples técnica de análise de dados, considera-a um elemento metodológico composto de características e possibilidades próprias.

> [...] uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum (MORAES, 1999, p. 2).

Com tal possibilidade de uma leitura que ultrapassa a leitura comum, fizemos as análises que apresentamos a seguir.

DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Dentre os 15 alunos participantes da pesquisa, poucos conheciam o software Geogebra. Por essa razão, planejamos atividades de reconhecimento e familiarização que foram aplicadas em um primeiro encontro de 4 horas de duração. As atividades analisadas a seguir foram realizadas em um segundo encontro.

O principal objetivo das atividades que denominaremos aqui como 5, 6, 7 e 8, realizadas no segundo encontro, foi a investigação do conceito de distância euclidiana (métrica) construído pelos alunos ao longo de suas trajetórias de estudo.

As tarefas constantes da atividade 5 levavam os alunos a investigarem as propriedades que definem uma métrica no plano cartesiano.

Os alunos após cumprirem os passo a passo da atividade 5, tinham na tela de seus microcomputadores, objetos ostensivos semelhantes aos mostrados a seguir:

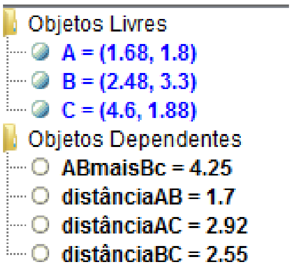


Figura 1: Janela de Álgebra

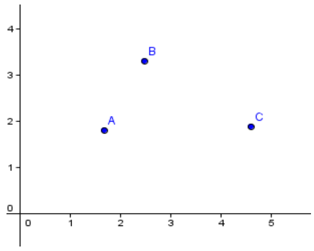


Figura 2: Plano cartesiano

Com o auxílio dos objetos ostensivos mostrados na tela, os alunos responderam as questões de 5.1 a 5.8, que aparecem a seguir, juntamente com as categorias de respostas e as respectivas inferências.

Categorias da questão 5.1: O que ocorre quando B se aproxima de A?

A distância entre AB diminui.

A1, A3, A5, A6, A15, A4, A9, A11, A12, A14 e A13.

A distância tende a zero.

A2, A7 e A10.

Relação com o ponto C.

A8.

Inferências da questão 5.1:

As respostas que se enquadram tanto na primeira quanto na segunda categoria estão corretas e dentro do que se esperava. Todos os alunos descrevem com exatidão essa propriedade da distância euclidiana. Na última categoria, se insere uma resposta particular, o aluno *A8* generaliza uma ocorrência a partir de sua construção, mas pode-se considerar que ele utilizou as técnicas, mas não explorou diferentes possibilidades de colocação dos pontos A, B e C. Podemos inferir que os alunos trabalharam adequadamente com as duas janelas mostradas na tela, compreenderam as informações aritméticas portadas pelos ostensivos da janela algébrica e as relacionaram com as informações geométricas portadas pelos ostensivos da janela do plano cartesiano.

Categorias da questão 5.2: O que ocorre quando B é coincidente com A?

A distância é igual a zero ou nula.

A1, A2, A3, A5, A6, A8, A11, A9, A10, A12, A13, A14 e A15.

A distância de AC é igual a BC.

A4, A5, A7e A8.

A é igual a B.

A9, A12 e A14.

Inferências da questão 5.2:

As respostas para essa questão utilizaram termos diferentes para expressarem que a distância de um ponto a ele mesmo é nula (d(x,x)=0), a primeira propriedade de caracterização de uma métrica: o não ostensivo d(x,x)=0 se manifestou em todas as respostas. Podemos verificar que alguns alunos emitiram conclusões além da resposta que esperávamos, é o caso das duas últimas categorias.

Categorias da questão 5.3: Existe posição na qual a distância é negativa?

Não – não existe distância negativa.

Todos os alunos: Todos manifestaram, com pequenas variações gramaticais, que não existe distância negativa.

Inferências da questão 5.3:

Todos os alunos afirmaram que não há distância negativa, mostrando conhecer o não ostensivo (d(x,y) > 0) relativo a esta exigência para a definição de uma métrica. Devido à relação acadêmica com os colaboradores, sabemos que o conhecimento dos alunos de que uma medida (distância) é sempre positiva ou nula é um conhecimento empírico, pois não haviam estudado espaços métricos ou topologia na graduação.

Categorias da questão 5.4: É preciso calcular a distância de B até A?

A distância de B até A é igual à de A até B.

A1, A3, A7, A9, A14 e A15.

O software calcula.

A2, A6, A8, A10, A11 e A13.

Inferências da questão 5.4:

Todos demonstram conhecer a terceira propriedade (não ostensivo) da definição de métrica, d(x,y) = d(y,x), mesmo com o uso de palavras diferentes. Mesmo sem usar outros objetos ostensivos que não palavras escritas, como por exemplo, expressões algébricas ou notações, definem este item da definição de métrica. É importante observar que na categoria “O software calcula” existem seis fragmentos de diferentes alunos, o que mostra a confiança depositada no ostensivo que aparece na coluna algébrica. Isso é indicativo de que a crença na perfeição de um software é uma possibilidade a ser considerada no planejamento de atividades a serem realizadas com tal ferramenta.

Categorias da questão 5.5: Qual é a relação entre a distância de A até C e a soma das distâncias (ABmaisBC)?

Não responderam ou disseram que não sabiam ou não conseguiram estabelecer relação os alunos A3, A10, A12, A13 e A14. Esse fato também os agrupa numa categoria.

Não sei, não consegui ver relação.

A3, A10, A12, A13 e A14.

A distância AC é a mesma.

A1, A2 e A11.

Utilização de Objetos ostensivos.

A4:

AB MAIS BC = AB + BC → A DISTÂNCIA AC É UMA DISTÂNCIA FIXA, MOVIMENTAMOS SOMENTE B.

AC é sempre menor ou igual à soma das distâncias.

A6 e A8.

A distância AC é constante e a soma das distância varia.

A5, A9, A7 e A15.

Inferências da questão 5.5:

Na primeira categoria estão fragmentos de discursos de alunos que não conseguiram fazer a investigação. Inferimos que eles não utilizaram adequadamente as técnicas já desenvolvidas, em encontros anteriores, de “arrasto de elementos geométricos” e observação de ostensivos exibidos na janela algébrica. Na segunda categoria estão fragmentos de discursos de alunos que se prenderam somente à distância constante, não estabelecendo relação de desigualdade com a distância ABmaisBC, nem numericamente nem geometricamente. Provavelmente, os objetos ostensivos que aparecem na coluna algébrica se tornam um obstáculo para a compreensão da atividade. O aluno A4 fez uso de um objeto ostensivo para explicar a relação, o que ilustra o policiamento entre ostensivos e não-ostensivos. Na quarta categoria estão os discursos de alunos que, aparentemente, conheciam o não ostensivo “desigualdade triangular”. Na última categoria, os alunos demonstraram conhecer o não-ostensivo da “desigualdade triangular”, destacamos A7, que mostra que tal conceito está bem construído a ponto de enunciar situações limites, nas quais a desigualdade deixa de ser estrita.

Categorias da questão 5.6: Existe posição de B de maneira que “distânciaAC” é igual a “ABmaisBC”? Quando é que isso ocorre?

Quando são colineares.

A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A13e A15.

Quando B coincide com A ou com C.

A11, A12 e A14.

Inferências da questão 5.6:

Na primeira categoria aconteceu o que esperávamos, os alunos enunciaram a afirmação correta, mas é possível detectar, pela maneira com que escreveram, que os objetos ostensivos visualizados na tela auxiliaram a exploração e conclusão, ou seja, a dinâmica do software permitiu experimentações adequadas, tendo ocorrido o policiamento entre os ostensivos e não ostensivos. A segunda categoria “Quando B coincide com A ou com C”, expõe que os alunos não utilizaram adequadamente as técnicas desenvolvidas para realizar a tarefa, investigaram a posição de B em apenas outros dois pontos. Inferimos que tal atitude possa ocasionar o aparecimento de um obstáculo, pois pode ocasionar uma generalização abusiva, conforme (ALMOULOUD, 2007, p. 137).

Categorias da questão 5.7: Existe posição de B de maneira que “distânciaAC” seja inferior a “ABmaisBC”? Quando é que isso ocorre?

Não.

A1 e A11.

Sim, quando B não for colinear com A e C.

A3, A3, A5, A7, A8, A9, A10, A13 e A15.

Sim, quando B está “abaixo” de C.

A2: Sim. Qualquer posição em que B esteja abaixo de C.

Sim, quando B estiver à “direita” de C.

A6, A12 e A14.

Inferências da questão 5.7:

Os dois alunos cujos fragmentos pertencem à primeira categoria, provavelmente enfrentaram dificuldades relativas à aplicação da técnica anteriormente utilizada. Deve-se considerar que A1 e A11 responderam adequadamente a questão anterior. As outras três categorias apesar de distintas agrupam respostas corretas. Inferimos que o uso do ostensivo favoreceu o aparecimento das respostas da segunda categoria, a utilização do software ajudou os alunos a verificar rapidamente o lugar geométrico que satisfaz a condição indagada. Deve-se destacar que, mesmo com o uso do software dinâmico, os alunos A2, A6, A12 e A14 permaneceram explorando um universo onde existe a posição absoluta do horizonte e no qual existem sentidos de “direita” e “esquerda”.

Categorias da questão 5.8: Tendo por base suas respostas às perguntas anteriores, como você caracterizaria matematicamente uma “distância” no plano? Você é capaz de elencar quatro propriedades básicas que uma “distância” deve satisfazer? Explique-as.

Distância identificada com segmento.

A2, A3, A4, A5, A7, A8 e A12.

Propriedades de distância.

A4, A5, A7, A12, A13 e A15.

Inferências da atividade 5.8:

Os alunos A1, A6, A9, A10 e A11 devolveram a atividade para o pesquisador e deixaram esta questão em branco ou responderam que não conseguiam resolvê-la. Isto pode ter ocorrido pela falta do policiamento ostensivo e não-ostensivo, já que não conseguiram explicar o que viam na tela do computador. Os 7 fragmentos da primeira categoria mostram a "aderência exclusiva a um único ponto de vista" (ALMOULOUD, 2007, p. 137), mostram a aderência do conceito de distância com o conceito de segmento de reta. Para esses alunos, tais conceitos estão vinculados ao espaço euclidiano. Essa é uma detecção de possível obstáculo na construção do conceito mais abstrato de métrica, e também a detecção de possível obstáculo à compreensão do modelo de Poincaré, já que a métrica utilizada no modelo não é a euclidiana. Na segunda categoria, os fragmentos mostram que alguns alunos perceberam as propriedades, os alunos A4 e A15 chegam muito perto da definição correta.

Após o recolhimento das respostas, fornecemos e discutimos o seguinte texto:

> Segundo Lima (1993, p. 1) Uma métrica num conjunto M é uma função d do produto cartesiano MxM nos reais, que a cada par ordenado de elementos (x,y) associa um número chamado "distância de x a y", de modo que para quaisquer x, y e z de M são satisfeitas as seguintes condições:
> 1) d(x,x) = 0;
> 2) Se x é diferente de y então d(x,y) > 0;
> 3) d(x,y) = d(y,x);
> 4) d(x,z) é menor ou igual a soma d(x,y) + d(y,z).

Na atividade 6 não havia nenhuma pergunta, apenas a construção de uma macro ferramenta, seu objetivo foi apresentar a possibilidade de construções que seriam utilizadas como *técnicas* na resolução de novas *tarefas* mais elaboradas.

A partir dessa atividade, as construções no Geogebra passaram a ficar mais complexas e a atrair mais a atenção dos alunos.

Na atividade 7, a ferramenta construída na atividade 6 foi utilizada para a resolução de novas tarefas. O nome “dist taxi” é referência à distância do taxista, quando se considera a métrica da soma das projeções dos pontos sobre os eixos, conhecida ludicamente como Geometria do taxi.

A atividade 7 almejava que os alunos utilizassem a ferramenta que criaram na atividade 6 e analisassem as possibilidades dos desenhos que apareciam na tela do computador. Os alunos observavam, na tela do microcomputador, objetos ostensivos semelhantes aos mostrados a seguir:

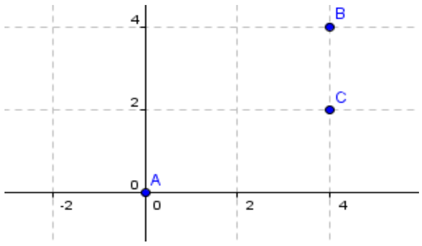


Figura 3: Plano do desenho

Com esta janela em frente eles responderam cinco questões, descritas a seguir com suas categorias e suas inferências.

Categorias da questão 7.1: Investigue a possibilidade dessa função definida no produto cartesiano de Z por Z ser uma métrica. Ela satisfaz as quatro condições de uma métrica? Por quê? Explique.

Sim, com justificativas.

A2.

Sim, sem justificativas.

A4, A8, A10, A11, A13.

Sim, com descrição do uso de técnicas de investigação.

A15.

Inferências da atividade 7.1:

O aluno A1 não respondeu esta questão não sabemos o motivo. As três categorias mostram fragmentos de discurso com a resposta esperada. Inferimos que os alunos realizaram a investigação usando a técnica de “arrastar e observar”, mas apenas o aluno A15 expõem em seu discurso a descrição da técnica. Para este aluno a justificativa se dá pelo procedimento e para os restantes a justificativa se dá pela descrição das propriedades observadas. O policiamento ostensivo e não-ostensivo se fez presente e percebemos a confiança dos alunos nos ostensivos exibidos na coluna algébrica. Apesar da métrica ser bem diferente da euclidiana, não percebemos a manifestação de dificuldades ou obstáculos didáticos durante a realização desta atividade.

Categorias da questão 7.2: Coloque A sobre (0,0). Movimente o ponto B e responda: Qual é a circunferência de centro A e raio unitário? Quantos pontos ela possui?

A equação é $x^2 + y^2 = 1$.

A1, A4, A6, A9, A12, A12, A14.

É um quadrado.

A10 e A15.

Infinitos pontos.

A1.

Finitos pontos.

A2, A3, A5, A7, A8, A10, A12 e A14.

Inferências da atividade 7.2:

O confronto entre uma circunferência euclidiana de infinitos pontos com essa de apenas quatro pontos parece que não causou tanto desconforto. Vários alunos escreveram a equação e disseram que a circunferência possuía 4(quatro) pontos, dentre os que escreveram a equação, apenas A1 cita que esta circunferência tem infinitos pontos. Podemos inferir que objeto ostensivo e a técnica de "arrastar e observar" surtem efeito, pois a equação $x^2 + y^2 = 1$ só representa o local geométrico da circunferência de centro (0,0) e raio 1 quando a métrica é a euclidiana. Observamos que para os alunos A10 e A15 o conceito de circunferência está associado à representação (objeto ostensivo) obtida quando se utiliza a métrica euclidiana. Essas são manifestações que podem ocasionar obstáculos no estudo da

Geometria Hiperbólica, pois são conhecimentos que funcionam corretamente num contexto, mas que não são corretos em outro.

Categorias da questão 7.3: Qual é a circunferência de centro A e raio 2? E a de raio 3? Quantos pontos elas possuem?

Equações e infinitos pontos.

A1: $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9 \rightarrow$ infinitos pontos.

Equações e quatro pontos.

A4, A6, A9, A12 e A14.

Possui quatro pontos.

A2, A3, A5 e A7.

Possui mais de quatro pontos.

A8, A10, A13, A11 e A15.

Inferências da questão 7.3:

Uma maneira de interpretar os dados coletados é a seguinte: O aluno A1, continuou com mesmo raciocínio do item anterior, escrevendo que a circunferência tinha infinitos pontos. O conhecimento euclidiano foi um obstáculo para A1 nesta atividade. Outro grupo de alunos manteve a resposta do item anterior e disseram que as circunferências teriam 4 pontos apenas. Inferimos que eles não utilizaram satisfatoriamente a técnica desenvolvida e descobriram apenas os "vértices" contidos nos eixos ou não observaram a métrica utilizada. O terceiro grupo composto por A10, A11, A13 e A15 utilizou a técnica para resolver essa nova tarefa e escreveram a quantidade correta de pontos. Inferimos também que, para esses quatro últimos alunos, as técnicas de manipulação dos ostensivos num software dinâmico facilitaram a reconstrução do conceito de circunferência, pois nessa métrica a quantidade de pontos depende do raio. Outra inferência que podemos enunciar é que os ostensivos manipulados mediante o uso do software prejudicaram a construção do não ostensivo para os alunos que responderam 4 pontos. Esta é uma manifestação de um obstáculo didático, pois se a redação da atividade proposta fosse "encontre os pares ordenados cuja soma das coordenadas seja igual a 3?" estes alunos talvez respondessem corretamente. Também inferimos que tais alunos podem ter incorrido no erro “generalização abusiva” (ALMOULOUD, 2007, p. 137), pois se com a métrica euclidiana todas as circunferências têm a mesma “quantidade” de pontos e a de raio unitário nessa nova métrica possui 4 pontos, as outras devem possuir também 4 pontos.

Categorias da questão 7.4: Se lhe fosse pedido para determinar os pontos da circunferência de centro A = (0,0) e raio igual a 5 unidades, quantos pontos você teria que marcar? E se o raio fosse 25 unidades, quantos pontos você marcaria?

4 pontos.

A2, A3, A4, A5, A6, A9, A12 e A14.

Pontos com descrição das coordenadas.

A7.

20 pontos e 100 pontos.

A8 e A11.

Inferências da questão 7.4:

Podemos inferir que o primeiro grupo de alunos se baseia nas respostas dadas para os itens anteriores e mantêm as afirmações de que as circunferências possuem 4 pontos. Repetiu-se nesta questão a “generalização abusiva”. Inferimos que a técnica desenvolvida não foi bem aplicada e que eles verificaram apenas alguns dos pontos pertinentes – objetos ostensivos influenciaram de maneira não correta os não-ostensivos. O outro grupo aplicou adequadamente a técnica e realizou corretamente a tarefa, apesar da investigação com o raio de 25 unidades ser dificultada pela grade mostrada na tela do software. Os objetos ostensivos ajudaram estes alunos a generalizar corretamente, ou seja, ocorreu a dialética ostensivo e não-ostensivo.

Categorias da questão 7.5: Quantos pontos possui a circunferência de centro A = (0,0) e raio *k*, com *k* natural?

2 Pontos.

A2: Somente 2 pontos, pois os outros dois pontos não pertencem aos Naturais.

4 pontos.

Os alunos A3, A4, A5, A6, A7, A9, A12 e A14, de diferentes maneiras respondem que a circunferência de raio k unidades terá apenas 4 pontos.

Possui 4k pontos.

A8, A10, A13 e A15.

k.r onde k pertence aos naturais e r é o raio da circunferência.

A11: k.r onde k pertence aos naturais e r é o raio da circunferência.

Inferências da questão 7.5:

Os alunos cujos fragmentos estão nas duas primeiras categorias continuaram não aplicando adequadamente a técnica de “arrastar” objetos ostensivos na tela do software. Ou seja, nossa inferência é de que o fator “generalização abusiva” continuava a fomentar o aparecimento de possível obstáculo didático. Os alunos A8, A10, A13 e A15 conseguiram a adequada generalização e, nesse caso, temos um exemplo do policiamento ostensivo não-ostensivo. Colocamos o aluno A11 numa categoria separada dos demais, pois as respostas anteriores deixam transparecer que a expressão escrita por ele poderia ser correta, mas o ostensivo utilizado para expressar suas ideias não está correto. Inferimos, no caso deste aluno, que a manipulação (“arrasto”) de ostensivos favoreceu a constituição da conjectura proposta pelo aluno.

Na atividade 8, tentamos fazer um trabalho de reconstrução, com o uso do software, de uma Organização Matemática (OM). Segundo Chevallard (1999), uma OM não pode prescindir de fórmulas, notações, figuras, definições e propriedades, por isso, elencaram questões que exigiram o uso de ostensivos em suas respostas. Como a ferramenta que calculava a distância segundo a métrica “do taxi” já estava construída, propusemos a exploração da distância entre pontos com o uso de tal ferramenta.

Os objetivos desta atividade eram introduzir uma nova métrica, a “métrica do taxi”, e trabalhar com uma função de R em R, em contraponto com a atividade anterior que foi realizada com função de Z em Z. A intenção era fazer aflorar objetos ostensivos e objetos não-ostensivos pertinentes a esse novo “espaço bidimensional”.

Ao final da construção proposta na atividade 8, os alunos podiam visualizar uma tela com objetos ostensivos semelhante aos mostrados a seguir:

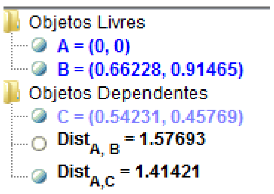


Figura 4: Janela de Álgebra

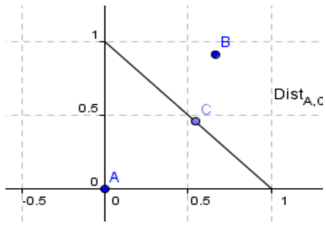


Figura 5: Plano do desenho

Deparados com a janela de Álgebra e com o plano do desenho, responderam oito questões como apresentamos a seguir, com suas categorias e inferências.

Categorias da questão 8.1: Coloque B sobre a posição (0.5, 0.5). Qual é a distância entre A e B? Por quê?

A distância é igual a 1.

A1, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A12, A13, A14 e A15.

A distância é igual a 0,5.

A2: 0,5. Porque dist AB = 0,5.

Explicação acerca da Ferramenta.

A11: A ferramenta dist-{taxi} considera a distância acompanhando as malhas.

Inferências da questão 8.1:

Inferimos que os alunos cujos fragmentos de discursos estão na primeira categoria perceberam a construção da métrica e compreenderam como foram calculadas as distâncias, dizemos isso, pois, eles justificaram suas respostas com o uso de objetos ostensivos. Também podemos dizer que se a turma toda tivesse oportunidade para refazer a atividade anterior, um número maior de alunos teria obtido sucesso. Percebemos que a construção do segmento de reta e a construção do cálculo da distância de um ponto fixo a um ponto do segmento auxiliou a realização da tarefa. O aluno A2, provavelmente se atentou apenas nas coordenadas do ponto B, ignorando a distância calculada.

Categorias da questão 8.2: Procure, agora, outras posições de B tais que a distância entre A e B seja igual a 1. Quantas posições, ou quantos pontos, você encontrou? Justifique.

Finitos pontos.

A2, A4, A5, A6, A8, A9, A10, A13, A14, A11, A12 e A15.

Infinitos pontos.

A3 e A7.

Inferências da questão 8.2:

Na primeira categoria há importantes depoimentos “contaminados” com a interpretação advinda do uso do software. Como o plano cartesiano do software é, na verdade, um produto cartesiano de números racionais, infere-se que essa deficiência contaminou os estudantes por meio dos objetos ostensivos mostrados na tela, o que pode ser caracterizado como um obstáculo didático para eles, já que haviam adotado essa aproximação por números racionais como expressão do objeto não ostensivo “distância”. Infere-se que os alunos A4 e A5, desde o item 7.4 e 7.5 estavam construindo o conceito de “circunferência” como um conjunto discreto de pontos. O planejamento das atividades também pode ter colaborado com isso. Na segunda categoria desta questão estão fragmentos emitidos por alunos que apesar de responderem erradamente os itens 7.4 e 7.5, responderam corretamente a questão anterior e perceberam a continuidade do traçado da circunferência nessa métrica. Neste caso, podemos inferir que a manipulação dos ostensivos ajudou os alunos A3 e A7 a compreenderem a constituição da circunferência.

Categorias da questão 8.3: Movimente C, a distância continua sendo a mesma? Explique por quê.

Continua a mesma d(A,C) = 1.

A2, A3, A5, A6, A7, A8, A11, A14 e A15.

Relacionam com $\sqrt{2} = 1{,}41$, ou seja, diagonal de um quadrado de lado 1.

A4, A9, A10 e A13.

Inferências da questão 8.3:

Os discursos classificados na primeira categoria, mostraram que seus emissores já possuíam uma compreensão da métrica e a relacionaram com o local geométrico envolvido na construção, a técnica de arrasto dos objetos ostensivos ajuda os alunos nesta questão – arrastar ligado – (OLIVERO, 2002 *apud* CABARITI, 2004). Por outro lado, na segunda categoria, estão fragmentos emitidos por alunos que apresentaram problemas na resolução das tarefas anteriores. Eles se deparam com um obstáculo na compreensão da situação, obstáculo advindo do uso até então exclusivo da métrica euclidiana, e também ocasionado pelos particulares objetos ostensivos manipulados pelo software. Provavelmente utilizaram a ferramenta da distância euclidiana. A análise das categorias desse item da atividade 8 nos permite inferir que existem obstáculos didáticos advindos do uso do software, e esta possibilidade deve ser considerada quando da formulação de atividades em laboratório.

Categorias da questão 8.4: Configure: *Opções → Arredondamento → 5 Casas Decimais*. Qual é, agora, a “distância” entre A e C?

As respostas dadas na questão 8.4 não forneceram dados interessantes para a pesquisa, quase a totalidade dos alunos responderam corretamente, que continuava sendo a mesma 1, apenas o aluno A1 não respondeu esta questão. A questão pedia para que os alunos aumentassem a quantidade de casas decimais suportadas no software e com essa alteração os experimentos do item anterior não foram modificados, pois o ponto C estava vinculado ao segmento – arrastar ligado (OLIVERO, 2002 *apud* CABARITI, 2004).

Categorias da questão 8.5: Investigue qual é o local geométrico dos pontos de RxR que, com essa métrica “do motorista de taxi”, distam uma unidade do ponto A = (0,0). Qual sua conclusão?

Esse é um dos itens mais interessantes porque questionávamos o lugar geométrico que na métrica do “taxi” é composto de pontos cuja distância até a origem é igual a uma unidade.

Segmento(s) de reta(s).

A2, A3, A4 e A7.

Triângulo retângulo.

A5.

Valor numérico.

A6: Que mesmo mudando as casas decimais a distância continuará sendo 1.

Quadrado.

A7, A8, A10, A11, A13 e A15.

Circunferência.

A9, A12 e A14.

Inferências da questão 8.5:

Apesar de A2 e A3 escreverem de maneira insatisfatória suas respostas e os fragmentos de seus discursos estarem colocados na primeira categoria, inferimos que para eles o lugar geométrico seria um quadrado. Na segunda categoria desta questão, o aluno A5 citou triângulo retângulo mais não esclareceu realmente qual é o lugar geométrico, talvez os objetos ostensivos mostrados na tela, tornaram-se uma dificuldade para compreensão deste aluno. O aluno A6 na terceira categoria deu um valor numérico, provavelmente não entendeu a questão. Na quarta categoria começaram a aparecer manifestações que mostram a compreensão da nova métrica apresentada. Percebe-se que eles distinguiram a circunferência do círculo. É isso que eles queriam dizer quando falaram que não se anda pelo "meio da quadra" como citaram na última categoria. A escrita deixou transparecer que eles associavam a circunferência com a "volta" em uma quadra (quarteirão) dada pelo taxista, podemos identificar neste caso o fator "fixação em uma contextualização" (ALMOULOUD, 2007), o que pode ocasionar futuros transtornos. Infere-se que a manipulação dos ostensivos na tela do software melhorou a dialética com os não-ostensivos, pois seis alunos responderam que o local geométrico seria um quadrado.

Categorias da questão 8.6: Qual é a circunferência de centro A = (0,0) e raio unitário?

Equação de Circunferência.

A1, A4, A12 e A14: $x^2 + y^2 = 1$.

Repetiu a pergunta.

A2: A circunferência de raio 1.

Um quadrado.

A3, A5, A11, A7, A8 e A15.

Equação de reta.

A9: $X + Y = 1$.

Inferências da questão 8.6:

Os fragmentos da primeira categoria mostram que a vinculação do conceito de circunferência com a métrica euclidiana é forte. Tais alunos continuam a mostrar obstáculos à construção de um conceito mais amplo. Com relação à resposta classificada na segunda categoria, nada podemos afirmar, podemos apenas dizer que o aluno A2 não entendeu a questão, por isso repetiu a pergunta. As respostas constantes na terceira categoria mostram que os alunos compreenderam a nova métrica, objetos não-ostensivos começaram aparecer, apesar dos alunos A10 e A13 ainda vincularem suas respostas ao ambiente cartesiano Z x Z. Infere-se que a concepção discreta catalogada em 7.2, 7.3 e 7.4 é a causa desse possível obstáculo didático. É interessante observar que no momento da investigação dessa atividade não se estava mais trabalhando com o produto cartesiano de números inteiros, mas talvez, o trabalho e os resultados da atividade anterior não tenham sido bem assimilados, ou seja, eles ainda estivessem considerando objetos não ostensivos de um ambiente bidimensional discreto.

Categorias da questão 8.7: Qual é a circunferência de centro A = (0,0) e raio 2?

Equações de Circunferência.

A1, A4, A12 e A14: $x^2 + y^2 = 4$.

Um quadrado.

A3, A11 e A5.

Um quadrado com vértice.

A7 e A8.

Equação de reta.

A9: X + Y = 2.

Um quadrado com números de pontos.

A10, A13 e A15.

Inferências da questão 8.7:

A2 e A6 não responderam a questão. Na primeira categoria, A1 cometeu o mesmo erro que cometeu na questão 8.6, escreveu a equação da circunferência euclidiana, e ainda com o raio errado. Os fragmentos emitidos por A4, A12 e A14 expressaram a equação euclidiana da circunferência, manifestação de objetos ostensivos euclidianos – mais uma detecção da manifestação de obstáculos. Na segunda e terceira categoria, a mudança no raio foi bem descrita por estes alunos. A compreensão mostrou-se mais forte, pois as respostas foram compatíveis com as registradas por eles no item anterior. Esse experimento detectou explicitamente dificuldades advindas da "generalização abusiva" (ALMOULOUD, 2007) feita por esses alunos (A10 e A13) desde os itens 8.2. Eles ainda não haviam percebido a mudança de um espaço discreto para um espaço contínuo, passagem de ZxZ para RxR.

Categorias da questão 8.8: Desenhe estas circunferências. O que tem de diferente nelas?

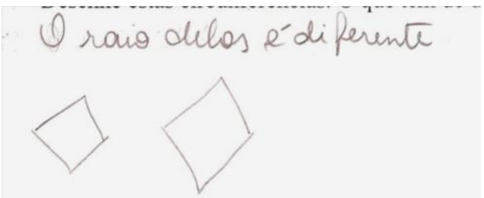
Este é mais um item importante. Os alunos deveriam desenhar as circunferências investigadas na atividade.

Afirmação sem desenhos

A1, A4, A5, A8 e A12.

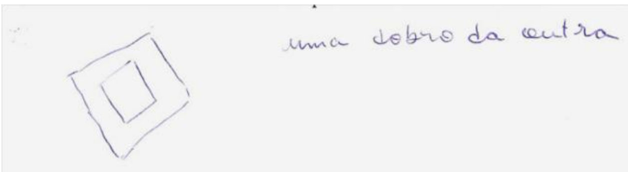
Raio diferente

A3, A6, A7 e A9.



Quantificando Raio Dobro do outro

A10, A13.

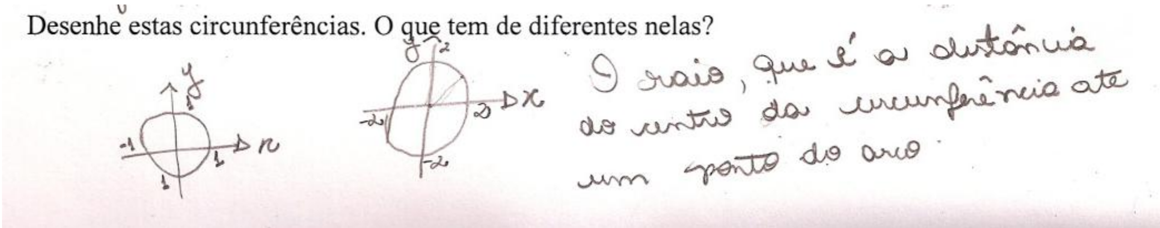


Relacionado a forma "é um quadrado"

A11 e A15.

Desenho da circunferência euclidiana

A14:



Inferências da questão 8.8:

Na primeira categoria podemos perceber que nas respostas de A4 e A12 o uso da palavra "raio" já mostrava a compreensão adequada. Aqui, a palavra "raio" foi bem usada. Mas a falta do desenho faz-se sentir. Será que eles visualizaram o formato quadrado? Na segunda categoria o uso da palavra "raio" já mostrava a compreensão adequada, o aluno A7 seguiu apresentando respostas consistentes desde 8.5. Infere-se que ao dizerem que "não seguem o raio" significa que A7 está percebendo que a métrica é determinante na forma do objeto, o aluno A9, apesar de nas respostas anteriores considerar uma circunferência euclidiana e escrever a equação de uma reta, aqui afirmou que é um losango, não se sabe se por observar os desenhos dos colegas ou se por estar construindo um conceito mais amplo. Pela análise da terceira e da quarta categorias podemos inferir que os alunos conseguiram observar o objeto ostensivo corretamente. Apesar dos alunos A10 e A13 estarem equivocados em suas respostas 8.3, 8.6 e 8.7, apresentaram aqui uma conclusão correta ao se preocuparam com a forma e não mais com a quantidade de pontos. O mesmo se pode afirmar para os alunos com discursos categorizados na quarta categoria. Na última categoria desta questão o aluno A14 só levou em conta o que ele conhecia de circunferência anteriormente, ignorou a construção que acabara de realizar. Esse aluno, na situação 8.5 mostrou compreensão, crê-se que apoiada na alegoria do motorista de taxi. Já na situação 8.6, sem apoio da alegoria do taxista, mostrou obstáculo advindo da métrica euclidiana. E aqui, novamente, isso se manifestou. Ou seja, os objetos não-ostensivos (forma euclidiana) que A14 conhecia se manifestaram no momento de responder a questão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As análises realizadas anteriormente nos permitem responder positivamente às duas questões de pesquisa: Concluímos que existe a possibilidade de aparecimento de conceitos não científicos (equivocados) advindos dos objetos ostensivos mostrados na tela do computador ao usar o software Geogebra e detectamos manifestações de possíveis obstáculos provenientes da constituição de conceitos euclidianos na aprendizagem de uma nova Geometria.

A intervenção realizada permitiu apontamentos importantes. Na atividade 5, verificamos que os alunos possuem um conceito de métrica até que “bem” estruturado, mesmo sem enunciar uma definição “chegam” perto de sua definição mas, como era esperado, prendem-se à métrica euclidiana.

Pode-se afirmar que, apesar da existência de dificuldades, a manipulação de objetos ostensivos facilita a construção de objetos não-ostensivos pertinentes à Geometria não-euclidiana, isto pode ser comprovado pelas análises das questões 7.4, 7.5, 8.2, 8.5 e 8.8. No entanto, devemos destacar que em alguns casos os objetos ostensivos foram dificultadores para a construção de objetos não-ostensivos, como foi registrado nas análises das questões 5.5 e 8.5.

Podemos destacar que na atividade 7, apareceram respostas importantes. Dentre as respostas do item 7.2 surge a escrita da equação Euclidiana de circunferência. Isso é um impedimento inicial à compreensão de que equação da curva depende da métrica adotada. Pode-se inferir que a “forma” assumida por alguns elementos geométricos euclidianos torna-se um obstáculo à construção de que tais elementos podem existir em outras geometrias com um “formato” diferente do usual, os registros analisados permitem observar que, nessa situação, o ostensivo “circunferência” tem uma influência muito forte na criação do não ostensivo circunferência. Considerações a respeito do policiamento entre tais objetos já haviam sido feitas em Ferreira e Barros (2010).

Nas respostas do item 7.5 destacamos uma generalização correta, que inferimos advir da possibilidade fornecida pelas relações dinâmicas do software, o que favoreceu a criação de conjecturas por parte dos alunos.

As respostas da atividade 8 são as mais interessantes. Em 8.2 houve a consideração de uma quantidade finita de pontos na composição da circunferência com a métrica do taxi. Na verdade, a “contaminação” se deu em virtude da tela do software mostrar uma grade de pontos com coordenadas racionais com duas casas decimais. A contagem do aluno, que fala “396 pontos” atesta isso. Na resposta 8.3 vê-se que o conceito de circunferência euclidiana faz com que o aluno esteja visualizando um local geométrico do plano munido de outra métrica, com a visão euclidiana. Na questão 8.5 os alunos começam aceitar uma nova métrica, citando a circunferência do taxista, assim nas respostas 8.6, 8.7 e 8.8 vão aparecendo indícios que os alunos estão compreendendo a nova métrica, mas, ainda na 8.8, aparece o registro de que conceitos de Geometria Euclidiana podem ser caracterizados como obstáculos à construção de conceitos não euclidianos.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora da UFPR, 2007.

BARDIN, L**. Análise de Conteúdo.** Lisboa, Portugal: Edições 70: 1977.

BOSCH, M. **Un punto de vista Antropológico: La evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad Matemática.** IV Simpósio SEIEMIV (Huelva 2000). Ponencia invitada al Seminário de Investigación I, “Representación y comprensión” (Versión preliminar, 30-6-2000).

CABARITI, E. **Geometria Hiperbólica:** uma proposta didática em ambiente informatizado. 2004. 131 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004

CHEVALLARD, Y. (1999) ***L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*.** Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, n. 2, p. 221-266. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos. Disponível em: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf>. Acesso em 15 jun. 2009.

FERREIRA, L. **Uma proposta de ensino de Geometria Hiperbólica:** “**construção do Plano de Poincaré” com o uso do software Geogebra.** 293 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) –

Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2011.

FERREIRA, L.; BARROS, R. M. O. **Uma nova métrica, circunferência quadrada e obstáculos.** In.: V Congresso Internacional de Ensino da Matemática de outubro de 2010
ULBRA Canoas/RS · Brasil

MORAES, R. **Análise de conteúdo**. *Revista Educação*, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.** Curitiba, 2008. Disponível em http://www. julho 2010diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf - Acesso em 20 de agosto de 2011.

ZULATTO, R.B.A. **Professores de Matemática que utilizam softwares de geometria dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação (Mestrado em Educação

Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual

Paulista, Rio Claro, 2002.

Submetido: Maio de 2013

Aceito: Setembro de 2013