

SOBRE A DINÂMICA DA PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS PARA A MATEMÁTICA

Amarildo Melchiades da Silva¹

Universidade Federal de Juiz de Fora

Romulo Campos Lins²

UNESP, Rio Claro

RESUMO

Neste artigo apresentamos nossas conclusões a respeito da pesquisa que desenvolvemos sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática. O objetivo da investigação esteve em ampliar nosso entendimento do processo de produção de significados a partir da perspectiva proposta pelo Modelo dos Campos Semânticos através do estudo de sua dinâmica. A pesquisa caracterizou-se por uma abordagem qualitativa de investigação, cujo trabalho de campo foi desenvolvido em uma sala de aula da disciplina Álgebra Linear ministrada para estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática em uma universidade pública brasileira. A observação se deu a partir da proposição, pelo professor, de um problema que deveria ser solucionado pela turma. Durante, aproximadamente, dois meses, os alunos divididos em grupos buscaram solucionar o problema e comunicaram semanalmente à turma as etapas da tentativa de resolução. A análise da dinâmica do processo foi elaborada, considerando as ações enunciativas dos estudantes. A investigação permitiu a identificação e caracterização de importantes aspectos da dinâmica do referido processo.

Palavras-Chave: Educação Matemática; Produção de Significados; Processo; Dinâmica; Álgebra Linear.

ABSTRACT

In this paper we present our conclusions about the research that we developed on the dynamics of the production of meaning for mathematics. The

¹ amarildo.melchiades@ufjf.edu.br

² romlins@rc.unesp.br

objective of this research is to broaden our understanding of the process of production of meaning based on the perspective proposed by the Semantic Fields Model through the study of its dynamics. The study was characterized by research based on a qualitative approach and the field work was developed in a Linear Algebra class taught by graduate students in Mathematics Education at a Brazilian public university. The observation was based on the teacher's proposition of a problem to be solved by the class. During nearly two months, students divided in groups tried to solve the problem and told the class the phases of solution attempted every week. The analysis of the process dynamics was developed based on students' declarations. The research allowed the identification and characterization of important aspects of the dynamics of this process.

Keywords: Mathematics Education; Meaning Production; Process; Dynamics; Linear Algebra.

INTRODUÇÃO

Este artigo tem como objetivo apresentar um estudo de aprofundamento teórico do Modelo dos Campos Semânticos (MCS) proposto por Lins (1992, 1997, 1999, 2001, 2012) e que possui sua gênese na busca de uma caracterização para álgebra e pensamento algébrico.

No presente estudo, partimos da caracterização de significado e produção de significados e de um conjunto de elementos de análise das ações enunciativas dos sujeitos denominada de noções categoria e que se constitui no processo de produção de significados; como será descrito a seguir.

O ponto de partida desta pesquisa estava na hipótese de que os núcleos – uma das noções categorias do MCS - poderiam possuir uma dinâmica, que se identificada, lançaria mais luz ao processo de produção de significados ao ampliar o entendimento relativo à maneira de operar das pessoas quando resolvem problemas em matemática.

Porém, tomamos a decisão de que não fixaríamos nosso olhar apenas nos núcleos. Nossa análise seria desenvolvida considerando o processo como um todo. Essa opção metodológica, ao final do estudo, mostrou-se uma atitude acertada pela riqueza que permitiu revelar sobre a questão de investigação, cuja proposta seria identificar e caracterizar aspectos da dinâmica do processo de produção de significados de estudantes para a matemática a partir da análise de suas ações enunciativas.

A importância desse estudo esteve exatamente na ampliação de nosso entendimento da maneira de operar dos alunos em situações reais de sala de aula que permitiria aos pesquisadores que usam o MCS e aos professores que utilizam os pressupostos da teoria, pensar em caminhos que apontariam para ações concretas de interação entre professor e aluno e possibilidades de intervenção advindas da leitura da produção de significados desses estudantes. Em particular, este estudo poderia auxiliar na compreensão, análise e tratamento das dificuldades de aprendizagem que se apresentam em sala de aula.

Na revisão da literatura que desenvolvemos não identificamos estudos que pudessem lançar alguma luz a nossa questão de investigação. No artigo de Godino e Batanero (1994) encontramos uma proposta de investigação similar a nossa em sua origem. Através de um modelo teórico elaborado no âmbito da Didática da Matemática denominado *Teoria do Objeto e do Significado* os pesquisadores propunham um estudo da dinâmica do significado pessoal dos objetos matemáticos e dos significados institucionais e fundamentados na referida teoria tinham como objetivo discutir a natureza dos objetos matemáticos e seus significados.

Vale ressaltar, que o estudo da dinâmica proposta por esses pesquisadores constituía em uma proposta de investigação futura naquela ocasião e nenhum estudo nessa direção havia sido desenvolvido.

Assim, a única semelhança que observamos de nossa proposta de investigação com o projeto desses pesquisadores é o fato de que a iniciativa de estudar a dinâmica nasceu de maneira similar à nossa, de uma questão interna a uma teoria.

A revisão da literatura indicou ainda que o uso do termo significado e o surgimento de uma variedade de termos associados a ele em um grande número de pesquisas, tais como, por exemplo, “negociação de significado”, “aprendizagem significativa”, “construção de significados” foram utilizados sem uma menção do que os autores queriam dizer com estes termos e que na maioria das vezes sugeriam ser usados de maneira intuitiva, sem referência a uma teoria.

Para nós, a impossibilidade de encontrar elementos de reflexão em outros trabalhos, ocorreu devido ao caráter muito específico de nossa investigação, de novo, uma questão interna a teoria. Sendo assim, nossa revisão de literatura teve como ponto de partida uma revisão dos trabalhos de nossos pares e da gênese do Modelo dos Campos Semânticos (LINS, 1992, 1994, 1997, 2001, 2002; OLIVEIRA, 2002) e em nossos próprios estudos anteriores (SILVA, 1997; SILVA et al, 2002).

O QUADRO TEÓRICO

Neste estudo tomamos como referencial teórico o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), um modelo epistemológico que foi elaborado incorporando ideias do pensamento de Vygotsky (1993, 1994), Leontiev (sd, 1984) e Nelson Goodman (1984).

A fim de fixar nossos pressupostos e indicar nossa perspectiva, passaremos a descrever alguns dos elementos constitutivos da teoria, enquanto outras noções serão sendo apresentados oportunamente ao longo do artigo.

A noção de significado de um objeto, neste artigo, será entendida como aquilo que o sujeito pode e efetivamente diz sobre um objeto no interior de uma atividade³. O “poder dizer” presente na formulação de significado está intimamente relacionado à questão da legitimidade. Como consequência, dizer que um sujeito produziu significados é dizer que ele produziu ações enunciativas a respeito de um objeto no interior de uma atividade. Além disso, produzir significados não se refere a tudo o que numa dada situação o sujeito poderia ou deveria dizer de um objeto e sim o que ele efetivamente diz sobre aquele objeto no interior daquela atividade. (LINS; GIMENES, 1997, p.145) Assim, os objetos são constituídos enquanto tal através do que o sujeito diz que eles são.

Mencionamos anteriormente nosso interesse em analisar mais detidamente os núcleos por isso, descrevemos agora o que queremos dizer como este termo.

No processo de produção de significados, existem algumas afirmações que a pessoa faz e que, tomando-as como absolutamente válidas, não sente necessidade de justificá-las. A essas crenças-afirmações, chamaremos de estipulações locais. E ao conjunto das estipulações locais constituídas no interior de uma atividade denominamos núcleo. Nesta direção, Lins e Gimenes (1997) comentam:

Os elementos de um núcleo funcionam como estipulações locais: localmente são “verdades absolutas”, coisas que assumimos sem que haja a necessidade de uma infinita cadeia regressiva de justificações. O que é importante e revelador é que esse “localmente” se refere ao interior de uma atividade, e que no processo dessa atividade esse núcleo pode se alterar pela incorporação de novas estipulações (elementos) ou pelo abandono de algumas estipulações até ali assumidas. (LINS; GIMENES, 1997, p.194)

³ A noção de atividade é entendida no sentido proposto por Leontiev (sd, 1984).

Note que nesta afirmação há uma menção, ainda não investigada, que poderia haver transformações no processo de incorporação de estipulações locais em relação a estipulações locais existentes. Assim, ainda na direção de esclarecer a noção de núcleo, Lins e Gimenes (1997) observam:

Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação “realista” ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for. Núcleos não se referem especificamente a “conteúdos” ou “áreas de conhecimento”: em relação ao mesmo núcleo de balança de dois pratos, é possível produzir significado para uma equação, para a noção de justiça ou para fenômenos físicos diversos. (LINS; GIMENES, 1997, p.144)

É importante ter em mente, para o entendimento desta noção, que um núcleo, no sentido proposto no MCS, não se refere a algo estático, um conjunto de coisas, e sim, a um processo que se constitui no interior de atividades.

Na observação dos núcleos, numa dada atividade, podemos identificar a maneira de operar dos sujeitos bem como a lógica das operações ligadas ao processo de produção de significados para um texto. Segundo Lins e Gimenes (1997, p.114), “toda operação é realizada segundo uma lógica” e é essencial a investigação dessas lógicas se queremos entender as formas de pensar de nossos alunos, de nossos sujeitos de pesquisa. Sobre o que vem a ser a lógica das operações, eles comentam:

Posto de uma forma simples, estamos nos referindo a um conjunto de estipulações, dentro de um núcleo, que se refere diretamente ao que pode ser feito com os objetos que estamos constituindo pela produção de significados. (LINS; GIMENES, 1997, p.145)

Outra noção central em nosso estudo se refere à compreensão do processo comunicativo do MCS para a análise das falas dos sujeitos de pesquisa. Essa noção foi formulada por Lins a partir de sua discordância com duas posições opostas; uma que assume a possibilidade de uma comunicação efetiva, no sentido de uma transmissão de uma mensagem do emissor ao receptor no processo comunicativo, outra a posição assumida por Jaques Derrida ao afirmar que o fato de conseguirmos

nos comunicar é um acidente, sendo a norma a não-comunicabilidade. (cf. DERRIDA, 1991)

Divergindo dessas posições, Lins formula uma nova proposta para o processo comunicativo cujos elementos constitutivos são: autor, texto e leitor. O autor é aquele que, no processo, produz a enunciação. O leitor é aquele que, no processo, se propõe a produzir significados para o resíduo das enunciações do autor. Já o texto, é entendido como qualquer resíduo de enunciação para o qual o leitor produza algum significado. Sobre o que vem a ser um texto, Lins (2001) esclarece:

Por um texto [...] entenderei não somente o texto escrito – como em *Ecriture*, de Derrida (1991), mas qualquer resíduo de uma enunciação: sons (resíduos de elocução), desenhos e diagramas, gestos e todos os sinais do corpo. O que faz do texto o que ele é, é a crença do leitor que ele é, de fato, resíduo de uma enunciação, ou seja, um texto é delimitado pelo leitor; além disso, ele é sempre delimitado no contexto de uma demanda de que algum significado seja produzido para ele. (LINS, 2001, p.59)

Olhemos para o processo de comunicação, inicialmente, pela perspectiva do autor:

Quando o autor fala, ele sempre fala para alguém. Porém, por mais que um autor esteja diante de uma platéia, este alguém não corresponde a indivíduos, pessoas nessa platéia e, sim, ao leitor que o autor constitui: é para este ‘um leitor’ que ‘o autor’ fala (LINS, 1999, p.81).

A este “um leitor” chamaremos de interlocutor. O interlocutor deve ser identificado como sendo uma direção na qual o autor fala e não com pessoas, com “rostos” com quem falamos, mas com modos de produzir significados.

Por outro lado, na perspectiva do leitor, ele “sempre constitui um autor, e é em relação ao que este ‘um autor’ diria que o leitor produz significado para o resíduo de enunciação e que neste momento se constitui (ou transforma) em texto” (LINS, 1999, p.82).

Sobre o leitor, Lins observa: “é apenas na medida em que o leitor fala, isto é, produz significados para o texto, colocando-se na posição de autor, que ele se constitui como leitor” (LINS, 1999, p.82).

Sendo assim, poderíamos dizer que em situação de diálogo, por exemplo, o processo ficaria: o autor produz uma enunciação para cujo resíduo um leitor produziria significados. O leitor, através de outra enunciação, constitui aquilo que um autor disse em texto, produzindo uma nova enunciação na direção de um autor, e assim sucessivamente.

Assim, neste processo, não ocorre à comunicação efetiva, mas uma vez que nos colocamos incessante e alternadamente na posição de o autor e de o leitor em cada um destes processos o que resta é a sensação psicológica de comunicação efetiva. (LINS, 1999, p.82)

Logo, o sentimento de comunicação efetiva é fruto apenas de uma sensação psicológica. Porém, o que ocorre então para que entendamos uns aos outros? A resposta é apresentada novamente por Lins (1999) nos seguintes termos:

A convergência se estabelece apenas na medida em que [autor e leitor] compartilham interlocutores, na medida em que dizem coisas que o outro diria e com autoridade que o outro aceita. É isto que estabelece um espaço comunicativo: não é necessária a transmissão para que se evite a divergência. (LINS, 1999, p.82)

Portanto, é com base nesta visão de processo comunicativo que desenvolveremos nossa análise das ações enunciativas dos nossos sujeitos de pesquisa.

A METODOLOGIA DE PESQUISA

A pesquisa caracterizou-se como sendo uma abordagem qualitativa (segundo BOGDAN; BIKLEN, 2010) do tipo etnográfico (ANDRÉ, 2009). Essa opção metodológica se deu baseada no nosso propósito de investigar a dinâmica do processo de produção de significados dos estudantes, que de acordo com o MCS, indicava que o material de investigação e análise seriam, na sua totalidade, as ações enunciativas dos sujeitos.

A pesquisa de campo foi desenvolvida numa sala de aula de um Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática onde estava sendo ministrada a disciplina

Álgebra Linear para uma turma de dezoito alunos cujos pseudônimos foram: Mila, Betty, Mel, Diva, Lufran, Role, Morgana, Pinho, Ane, Azul, Mega, Muiara, Maria Luiza, Ades, Judy, Teka, Duda.

O desencadeamento do processo de investigação aconteceu a partir da proposição do seguinte problema apresentado na lousa pelo professor à turma para ser resolvido:

“Problema para investigar:

\mathbb{R}^2 é o conjunto dos pares ordenados de números reais:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \text{ tal que } x, y \in \mathbb{R}\}$$

Investigue se é possível existir um espaço vetorial real (isto é, \mathbb{R} é o corpo dos escalares) onde \mathbb{R}^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3.”

Olhando da perspectiva dos significados que um matemático produziria na tentativa de resolução desse problema, seria necessário considerar a definição de espaço vetorial, entendido como uma estrutura algébrica constituída por um conjunto; um corpo de escalares; e duas operações, a adição de vetores e a multiplicação por escalar. Assim, como no problema proposto acima são dados o conjunto \mathbb{R}^2 e o corpo de escalares, \mathbb{R} , a questão recai sobre as operações. Se as operações forem as usuais, tem-se que a dimensão do espaço vetorial procurado é 2. Sendo assim, a questão passa a ser: existem operações não-usuais que satisfaçam as condições do problema? A resposta a esta pergunta é sim. Porém, ao chegar a tal conclusão, fica a questão de como determinar tais operações de modo que o espaço vetorial em questão tenha dimensão três. O que esse problema sugere é o fato de que, dependendo da operação que se escolhe, a dimensão pode ser diferente.

Durante, aproximadamente, dois meses, os alunos – divididos em grupos - produziram significados para o problema proposto através do encaminhamento de uma resolução para o problema ao longo de aproximadamente dois meses.

Em nossa análise, consideramos que quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação, observamos da perspectiva do MCS o desencadeamento de um processo (mencionado na introdução) – o processo de produção de significados – que envolve: i) a constituição de objetos – coisas sobre as quais sabemos dizer algo e dizemos – que nos permite observar tanto os novos objetos que estão sendo constituídos quanto os significados produzidos para esses objetos; ii) a formação de um núcleo: o processo que envolve as estipulações locais, as operações e sua lógica; iii); a fala na direção de interlocutores; e, iv) as legitimidades, isto é, o que é legítimo ou não dizer no interior de uma atividade.

Vale ressaltar que, quando apresentamos esta lista de elementos – as noções categoriais – em uma determinada ordem, não estamos querendo dizer que há uma sequência de procedimentos, uma ordem de leitura, mas queremos dizer que é para o conjunto dessas coisas que estaremos considerando quando estivermos fazendo nossa leitura. Isto se constitui no que é dado para nossa investigação, sendo o nosso ponto de partida. O novo, o que queremos entender, o movimento na produção de significados é o que chamamos a dinâmica do processo.

Assim, a pesquisa de campo foi desenvolvida observando o processo de produção de significados desses alunos entendido como o processo determinado pelas ações enunciativas desses sujeitos frente a uma demanda de produção de significados – o problema proposto.

Dividimos nossa análise em duas partes: na primeira, dirigimos nosso olhar para a produção de significados dos sujeitos na interação face a face, buscando entender no que se constituiria a dinâmica do processo, fazendo uma leitura mais global da interação ocorrida em sala de aula. Na segunda parte, deslocamos nosso foco da turma para alguns sujeitos que se tornaram representantes de certos modos de produção de significados pela maneira peculiar como operavam e pelo que representaram no grupo.

As duas leituras pretenderam ser complementares, pois acreditávamos que existiam especificidades que seriam perdidas se ocorresse apenas uma delas. O resultado final veio confirmar tal expectativa ao evidenciar que, investigar o processo

em questão, das duas perspectivas propostas, foi decisivo para explicitar sua riqueza.

A LEITURA GLOBAL

Nossa observação iniciou quando o professor propôs o problema a ser investigado. Após sua fala, os alunos passaram a se reunir em grupo para buscar a solução do problema.

Ao final de cada aula, os grupos apresentaram o encaminhamento que deram ao problema, os avanços, as dúvidas; questões individuais e do grupo. Nesse momento, teve início, o processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa.

Na primeira fala dos sujeitos, \mathbb{R}^2 foi constituído em objeto em quase todos os grupos. Em geral, o \mathbb{R}^2 possuía as seguintes propriedades caracterizadoras segundo suas falas: “o \mathbb{R}^2 é o plano”; “o \mathbb{R}^2 tem dimensão 2”; “ \mathbb{R}^2 é um conjunto”. Além disso, desde o início das falas o \mathbb{R}^3 foi introduzido de maneira recorrente, constituído em objeto na fala de quase todos os grupos. O interessante, neste caso, é o fato de que o objeto \mathbb{R}^3 não figurava no enunciado do problema. Ele foi introduzido nas justificações a partir da leitura que foi feita do enunciado do problema. Muito provavelmente, o enunciado do problema “evocou”, para os sujeitos, uma característica de \mathbb{R}^3 – aquele que tem dimensão 3.⁴

O encaminhamento para resolver o problema proposto, passou, por vezes, em relacionar o \mathbb{R}^2 ao \mathbb{R}^3 . A partir desses objetos, outros objetos foram constituídos, tais como: plano, reta, vetores, classes de equi-polência, espaço, subespaço. Das falas dos sujeitos, extraímos as seguintes estipulações locais: “o \mathbb{R}^2 é um conjunto de vetores do \mathbb{R}^3 ”; “o \mathbb{R}^3 é o espaço”; “o \mathbb{R}^2 pode ser um/o subespaço de \mathbb{R}^3 ”; “o \mathbb{R}^3 é composto de planos, ele é um espaço formado de planos, os planos de retas”; “ \mathbb{R}^2 tá contido no \mathbb{R}^3 ”; “do \mathbb{R}^2 para o \mathbb{R}^3 é possível, o

⁴ Quando estivermos fazendo menção à fala dos sujeitos de pesquisa escreveremos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 da maneira como eles falavam: IR2 e IR3.

inverso não”; “dentro do \mathbb{R}^3 existe o \mathbb{R}^2 ”; “dois vetores paralelos você considera que é o mesmo vetor”.

Notamos ainda que as palavras, vetorial e real, presentes no enunciado do problema foram pouco mencionadas, e por alguns, foram desconsideradas. Apesar de algumas pessoas mencionarem as palavras espaço e subespaço, havia evidências de que \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 foram lidos como subconjunto e conjunto, respectivamente, naquele momento.

Esse estado de coisas nos levou a direcionar nosso olhar, a partir daquele momento, para seguintes questões: de que maneira o problema proposto foi constituído em texto - caso tenha sido constituído - pelos sujeitos? Será que para os objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 seriam produzidos outros significados, ao longo do processo, além daqueles que haviam sido produzidos inicialmente? Essa última questão nos levou a considerar à importância de fixar o olhar nesses dois objetos e estudá-los historicamente, no sentido proposto por Vygotsky, quando ele diz: “Estudar alguma coisa historicamente significa estudá-la no processo de mudança”⁵ (Vygotsky, 1994, p.85-86).

Sobre a primeira questão, constatamos que a produção de significados das pessoas estava sendo determinada exatamente pela leitura de cada um dos sujeitos do problema proposto, portanto, o processo de constituição do enunciado (resíduo de enunciação) em texto determinou, em parte, a dinâmica do processo.

Porém, na origem desta afirmação, está nossa observação da explicitação da leitura do problema por algumas pessoas, por exemplo, a leitura de Ades. Para ele, o problema dizia respeito a obter \mathbb{R}^3 a partir de \mathbb{R}^2 . Por outro lado, Azul, do início ao fim do processo, sugeria mudar o enunciado do problema. A questão é: por que ela sugeria tal mudança? Além disso, a análise de toda produção de significados de Role e Diva nos sugere que eles não constituíram o problema proposto em texto. Role, em nenhum momento, discutiu explicitamente o problema e, ainda, sua fala se deu apenas quando se discutiu sobre o \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , ou sobre outros temas que não estavam relacionados ao problema, tais como, metodologia de ensino, sala de aula, ensino e aprendizagem, entre outras coisas.

⁵ Faremos menção a este estudo como a história dos objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3

Diva, sempre se referiu ao problema proposto como “o problema dele” – referindo-se ao professor -, e, em grande parte do tempo, ela esteve envolvida em buscar entender o que era dimensão de um espaço vetorial.

Sobre a segunda questão – a história dos objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 –, voltaremos ao tema na análise local que desenvolveremos na seção seguinte.

Como conclusão parcial, ressaltamos que a leitura global do processo indicou duas situações: primeira, a maioria das pessoas constituiu \mathbb{R}^2 como o plano e o \mathbb{R}^3 como o espaço, ou como conjunto e subconjunto respectivamente. E isto estava tão “cristalizado” para as pessoas que parecia não aceitarem o fato de que \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 pudessem vir a ser outra coisa.

Para nós, o “não poder ser outra coisa” está ligado a uma das questões mais importantes que observamos sobre a dinâmica do processo: a questão da legitimidade, isto é, daquilo que o sujeito julga ser ou não, legítimo dizer. Ao longo de todo o processo de produção de significados das pessoas, a questão da legitimidade foi, junto com a maneira singular/peculiar que os alunos leram o problema, determinante na dinâmica do processo. Observamos a enunciação de frases como:

- “Eu não consigo imaginar como seja o que ela me disse”. [Teka sobre a fala de Betty sobre a possibilidade de existência de operações não-usuais];
- “Eu não vejo outra coisa que possa ser o \mathbb{R}^3 ” [Lufran]
- “Eu não vejo possibilidade” [Muiara, sobre a possibilidade de dimensão 2 poder ser algo diferente de comprimento e largura];
- “Não posso pensar desse jeito” [Diva, considerando a fala de Muiara];

Essas frases evidenciaram a delimitação determinada pelas pessoas para o que era legítimo ou não dizer, influenciando suas produções de significados.

Por outro lado, as transformações no processo de produção de significados para os objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , foram evidenciadas por Mel, que olhando para o processo de produção de significados de seu grupo, elucidou esse ponto dizendo:

[...] ontem, na hora que eu, a Mila e a Betty, nós fomos estudar de novo o problema. Aí sim que a gente entendeu aquela questão da Anita de que dimensão era aquele espaço, porque no fundo a gente

tava confundindo os espaços. E aí o espaço que tinha lá é o espaço lugar, enquanto que, o espaço que a gente discutia no problema, é espaço vetorial. E aí, eu acho que é isso que a gente ficava naquilo que ele disse de outras direções. Quando a gente ficava falando de espaço lugar, espaço geométrico, a gente não saía do lugar no problema. Porque, na verdade, a gente tinha que saber de que espaço a gente tava falando e era outro. Então, a gente chegou a essa conclusão de que aquela questão foi mais pra falar ó, isso é o espaço de que vocês, às vezes, estão falando, e esse é o espaço vetorial.

Em particular, nas falas de Mel e Betty foi possível observar a transformação dos objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 de, por exemplo, \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , como plano e espaço respectivamente para conjuntos quando se referia a uma bijeção ou em espaços vetoriais quando associado a um corpo, às operações de adição e multiplicação por escalar e seus axiomas. A fim de elucidar este ponto, optamos, na seção seguinte, por analisar a produção de significados de Betty em detrimento da de Mel, por ter sido a primeira quem determinou uma nova direção na fala para interlocutores em sala de aula.

Além das duas questões anteriores que identificamos em nossa análise, a continuação da observação dos emergentes daquela sala de aula relacionadas à dinâmica do processo evidenciou aspectos dessa dinâmica associada aos interlocutores.

Notamos que quando Ades produziu significados numa certa direção para a qual era legítimo falar de planos, espaço (geométrico), vetor como segmento orientado ele encontrou Role, Lufran, Maria Helena, Mega, Muiara e Diva para dialogar; eles voltaram-se para falar naquela direção. Nesse momento, essas pessoas falaram de expansão de planos, de giros de planos, vetores no espaço, retas, entre outras coisas buscando dialogar com ele.

Quando Betty introduziu na discussão, outros objetos, tais como operações não-usuais, isomorfismo, bijeção, ela determinou outra direção diferente daquela para os quais estavam voltados os sujeitos anteriormente mencionados.

Observamos que a intervenção de Betty causou um corte visível na produção de significados naquela sala de aula. De imediato, aqueles que estavam falando na direção de Ades silenciaram totalmente, em particular, o próprio Ades. Alguns

sujeitos que já se encontravam mudos, continuaram mudos. E aqueles, como Pinho, por exemplo, que já esboçavam uma fala na direção dos interlocutores de Betty, começaram a se pronunciar dialogando com ela.

Aos poucos, do grupo daqueles que produziam significados na direção dos interlocutores de Ades, vemos Mega e Diva voltando-se para falar na direção dos interlocutores de Betty. No caso de Mega, talvez seja pelo fato da direção de Betty se aproximar muito dos resíduos de enunciação presente nos livros-texto de Álgebra Linear, sobre o qual ele se debruçou durante todo o tempo de sua busca para encontrar a resposta do problema.

Já para Diva, vemos, claramente, sua tentativa de mudar sua produção de significados para tentar resolver o problema. De fato, inicialmente, ela opera com os objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 de modo a constituir um núcleo com as seguintes estipulações locais: “o espaço \mathbb{R}^2 tem dimensão 2”, “a reta, passando pela origem, é um conjunto de vetores de \mathbb{R}^2 ”, “a dimensão do \mathbb{R}^3 é 3”, “o plano tem três dimensões”. Depois, em diálogo com Betty, ela vai constituindo, por exemplo, em objeto, matriz 3 por 2, transformação linear, sugerindo uma tentativa de falar em outra direção. Porém, do que constatamos, ela não foi muito longe falando nessa direção.

A produção de significados de Betty foi um divisor de águas entre o que estava sendo dito em sala de aula, antes de sua intervenção, e o que passou a ser dito, depois de sua intervenção.

Nossa leitura global do processo nos permitiu explicitar algumas considerações sobre esse episódio: primeiro, observamos que apesar do silêncio de Ades, quando olhamos o transcorrer das aulas, vemos que sua produção de significados não foi alterada por uma possível “contaminação” das ações enunciativas de Betty. Esse ponto ficará mais claro quando analisarmos sua produção de significados na seção seguinte.

A segunda consideração de nossa conclusão parcial, diz respeito a uma possível leitura do que a intervenção de Betty causou na produção de significados de algumas pessoas ao silenciar tudo o que não fosse dito naquela direção, refere-se ao fato de que o que passou a ser dito ali ou, melhor dizendo, os resíduos de enunciação de Betty, Mel, Pinho e Judy, que estavam voltados para outra direção,

não se constituíram em texto para aquelas pessoas. A questão é que, obviamente, não produzimos significados para coisas que desconhecemos.

E por último, outra leitura possível é que, para algumas pessoas que se calaram, a produção de significados de Betty é totalmente ilegítima, no sentido de que essas pessoas não diriam, elas mesmas, nada naquela direção.

Passaremos agora, na leitura local a seguir, a elucidar e aprofundar as questões que levantei nesta seção acerca da produção de significados de Betty, Ades e Azul.

A LEITURA LOCAL

A análise que desenvolvemos num segundo momento teve como objetivo investigar a dinâmica dos processos de produção de significados de Betty, Ades e Azul.

A escolha desses sujeitos de pesquisa se deveu ao fato de suas ações enunciativas nos permitirem elucidar as questões levantadas na seção anterior e que só um estudo local de suas produções de significados poderia explicar. Por exemplo, chamou-nos a atenção o fato de Azul, desde o início, sugerir que o enunciado do problema fosse alterado. Por outro lado, a escolha de Ades e Betty foi motivada pelo fato de que tanto um como o outro, produziram significados na direção de diferentes interlocutores, para o qual alguns colegas se voltaram no decorrer das aulas.

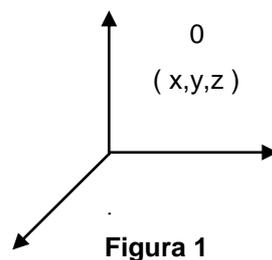
Anteriormente, comentamos que, da perspectiva do MCS, quando uma pessoa se propõe a produzir significados para o resíduo de uma enunciação no interior de uma atividade, ocorre o desencadeamento de um processo – o processo de produção de significados – que envolve, entre outras coisas, a constituição de objetos, a formação de um núcleo e a fala na direção de interlocutores. Assim, são para esses elementos que dirigimos o olhar num primeiro momento.

Recordamos que a motivação original de nossa pesquisa baseava-se na crença da importância de se estudar a dinâmica dos núcleos, para uma melhor

compreensão do processo de produção de significados. Desse modo, nessa fase da investigação, os núcleos, foram candidatos naturais a serem observados.

A leitura do processo de produção de significados de Betty nos permitiu tecer algumas considerações a respeito de sua dinâmica. Notamos, na análise de suas tentativas de resolução do problema proposto, um processo de transformação dos objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 durante a produção de significados de Betty. Ao longo do processo, vários significados foram produzidos por Betty para os objetos \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .

Em sua primeira fala, \mathbb{R}^2 era o conjunto de pares ordenados e \mathbb{R}^3 era o conjunto de ternas ordenadas. Enquanto falava, ela fez o seguinte esboço na lousa:



Suas justificações pareciam indicar que naquele momento \mathbb{R}^3 era constituído como o espaço (geométrico) e o \mathbb{R}^2 eram os planos que constituíam o \mathbb{R}^3 .

Em produções de significados posteriores, \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 são mencionados como espaços vetoriais, mas pensados, por vezes, como conjuntos, para finalmente tomar esses objetos, na bijeção, como conjuntos e, na transformação linear, como tendo uma estrutura algébrica.

Essa mudança em sua maneira de operar pode ser observada em sua fala e em seus esboços na lousa, a seguir:

Betty: [...] eu defino o meu espaço [ela escreve na lousa: $V = (\mathbb{R}^2, +, *)$]. Seria o meu espaço procurado, cujo conjunto de vetores sejam \mathbb{R}^2 e tenha dimensão três. E eu quero verificar o quê? [Ela mesma responde] Se ele tem dimensão três. Pra isso o que eu preciso? Encontrar uma base de vetores que eu não sei quem é [ela escreve na lousa: $\beta = \{ (), (), () \}$], que gere todo esse conjunto [referindo-se a V]. Então, quer dizer, se tiver três vetores e esses vetores forem L.I., eu consigo ver que este espaço tem dimensão três. Então, se existir uma bijeção com o \mathbb{R}^3 [ela esboça o diagrama da figura 2], eu consigo encontrar essa base. Por quê que eu consigo? Vocês me dêem uma base em \mathbb{R}^3 .

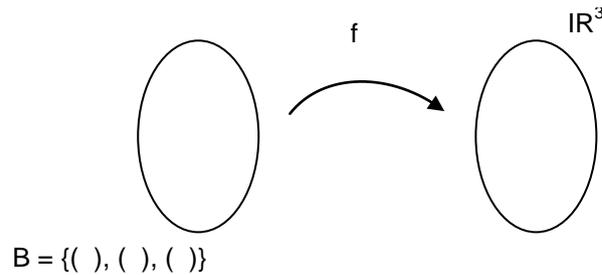


Figura 2

Pinho: Base canônica.

Betty: Base canônica, mas qual seria?

Pinho: Um, zero, zero; zero, um, zero; zero, zero, um [e ela escreve na lousa – vide figura 3].

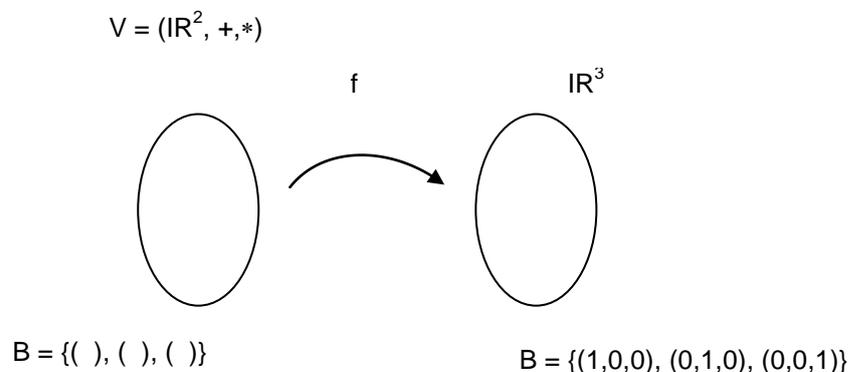


Figura 3

Betty: Então, assim, aqui é uma base. Agora, se existir essa bijeção, eu posso tá definindo as operações é..., em função dessa função bijetora [referindo-se a função f da figura 3]. Porque daí, eu pego aqui e trago pra cá [ela indica com um gesto o caminho de \mathbb{R}^3 para V]. Ou seja, pra essa base eu consigo os elementos / os vetores dessa base.

Note que $V = (\mathbb{R}^2, +, *)$ é constituído em objeto como o espaço vetorial procurado – formado por \mathbb{R}^2 e duas operações não-usuais – que deve ter dimensão 3. Ela então se propõe a encontrar uma base de V , tal que, como ela diz, “se tiver três vetores e esses vetores forem L.I., eu consigo ver que este espaço tem dimensão três”. Ao dizer isso, somos levados a pensar que ela estava operando com a noção algébrica de dimensão. Observamos também que Betty, como indicou sua fala e o esboço gráfico, operava com V e \mathbb{R}^3 como sendo espaços vetoriais, mas

fazia menção a eles, por vezes, chamando-os de conjunto. Além disso, ela estava operando de modo a aplicar a função f aos espaços vetoriais. Esse é o ponto que causou confusão para ela, como mencionado anteriormente. A questão a partir deste momento foi observar em que momento de sua produção de significados a transformação ocorreu.

Notamos ainda que no processo de nucleação, isto é, no processo de constituição e transformação de estipulações locais, operações e lógicas, observamos, no decorrer da produção de significados de Betty, o afastamento de certas estipulações locais, como se elas afastassem e fossem deixadas de lado e novas estipulações foram sendo incorporadas ao núcleo.

Mais especificamente, após a primeira fala de Betty, o esboço gráfico representando o sistema de eixos coordenados tridimensional, não apareceu novamente em suas justificativas, como também as estipulações locais: “ \mathbb{R}^2 é o plano”, “ \mathbb{R}^3 é o espaço”. Não observamos novamente, em nenhum momento da fala de Betty, vestígios de produção de significados “geométricos” sendo produzidos.

Por outro lado, $V = (\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ e $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ foram se constituindo em estipulações locais. Houve também, ao longo do processo de nucleação, a incorporação de novas estipulações locais ampliando o núcleo.

Nossa observação sugere que houve um processo sutil de transformação do que em um momento são novos objetos e em outro, se tornam estipulações. Esse é o caso da bijeção. Num primeiro momento, Betty o constitui em objeto (no dia 14 de setembro); na aula seguinte (no dia 21 de setembro), a bijeção parece ser uma estipulação local cuja ação é usada para operar na construção das operações de adição e multiplicação por escalar. Penso que tal fato ocorreria também com a função de Cantor - que ela faz menção em outro momento de sua fala - caso o processo continuasse. Isto porque Betty e Mel acenam para essa possibilidade quando dizem: “a propriedade existe” [Betty], “Existe e é válido [o resultado]. Então eu vou usar, né? Foi isso que a gente pensou” [Mel].

Observamos ainda, ao longo dos dias, uma mudança nos interlocutores de Betty. A primeira fala nos sugere que o que Betty tinha a dizer estava na direção dos significados, digamos, da Geometria Analítica, porém, aos poucos, ela vai se

voltando para uma direção que podemos caracterizar apenas para marcar a diferença, como sendo dos significados algébricos.

Notamos, também, transformações ocorridas nas operações, isto é, na maneira como Betty estava operando com os objetos. Como indicamos anteriormente, Betty, inicialmente, procurava somar pares de vetores para obter uma terna, operando, segundo ela, com a ideia de isomorfismo. Em substituição a esse modo de operar, ela passa a usar a ação da função bijetora que, segundo ela, lhe permite “associar” par e terna. Aos poucos, ela começa a incorporar a ação da transformação linear na direção de associar $V = (\mathbb{R}^2, \oplus, *)$ e $\mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, com o objetivo de indicar que V tem dimensão 3, através da identificação com o espaço vetorial \mathbb{R}^3 que possui dimensão 3.

Em linhas gerais, esta foi a nossa análise da produção de significados de Betty. Passaremos agora a fazer a leitura do processo de produção de significados de Ades, ao longo da atividade de resolver o problema proposto. Na primeira fala de Ades a respeito do problema proposto, ele comenta:

Ades: Sim, mas no começo, né?, quando a gente começou a considerar que seria, por exemplo, o canto da sala ali, as três paredes, o chão e as duas paredes. [...] Aí eu também pensei no seguinte: quando você pega dois vetores paralelos, você considera que é o mesmo vetor. Tanto é que você faz soma, regra do paralelogramo, etc., fazendo a transposição do vetor. Então, o vetor paralelo a ele mesmo, a um outro vetor é o mesmo vetor. Assim sendo todos os vetores / se você tem dois vetores paralelos que tão formando o plano, por exemplo, no fundo da sala, e você transpõe esse vetor, mexe pra cá, por exemplo, você tem um outro plano. [...] O conjunto das classes de eqüipolência, não seria \mathbb{R}^3 ? [...] O conjunto das classes de eqüipolência seria o \mathbb{R}^3 . E daí me veio a idéia de que o espaço seria uma expansão do plano, né? Na medida em que você não considera ser diferentes; na medida que você considera os dois vetores paralelos, como sendo o mesmo vetor, então o que você está fazendo é uma expansão do próprio plano. Então o espaço seria uma expansão do próprio plano.

Notamos, após uma longa análise, que sua maneira de operar estava ligada à sua leitura do problema proposto. No enunciado do problema – investigue se é possível existir um espaço vetorial real onde \mathbb{R}^2 é o conjunto de vetores desse espaço e que tenha dimensão 3, – ele produziu significados para o enunciado do

problema da seguinte maneira: - como obter \mathbb{R}^3 a partir de \mathbb{R}^2 ? Assim, sua produção de significados se voltou para responder a esta questão.

A reconstituição de seus argumentos pareceu seguir, em resumo, a sequência: dois vetores paralelos são o mesmo vetor e dois vetores paralelos formam um plano; dois vetores paralelos a outros dois vetores paralelos formam planos paralelos; fixado um plano e tomando outro plano paralelo, obtém-se o \mathbb{R}^3 .

No processo de produção de significados de Ades \mathbb{R}^2 é constituído em objeto como plano; \mathbb{R}^3 como espaço; vetor é constituído em objeto como segmento orientado; classe de equivalência refere-se a um conjunto de planos a partir da variação de uma coordenada e o objeto “um espaço vetorial \mathbb{R}^2 ” parece referir-se a um conjunto de planos. Observamos as seguintes estipulações locais sendo constituídas: “ \mathbb{R}^2 tem dimensão 2”; “ \mathbb{R}^3 tem dimensão 3”; “dois vetores paralelos são o mesmo vetor”; “dois vetores paralelos formam/geram um plano”.

As operações com os objetos são: transposição de vetor, paralelismo de vetores e planos, expansão de planos e “visualização”, ocorrendo da seguinte maneira: posso transpor vetores paralelos; dois vetores paralelos a outros dois vetores paralelos formam planos paralelos e os planos devem ser paralelos, “se você fizesse enviesado, aí não”. Pois, em coerência com a operação expansão do plano, os planos têm que ser paralelos. Ele opera de modo a tentar enxergar, em oposição à maneira de operar das colegas de grupo; ele diz - “E elas tentaram a partir das propriedades, pensar, mostrar que aquilo era verdadeiro ou não. E eu fui procurando enxergar”. Observamos que “enxergar” é entendido por Ades como uma operação legítima. Além disso, sua fala sobre dimensão – o limite de enxergar, como ele diz – nos sugere, como afirmamos anteriormente, que para ele o espaço tem dimensão 3.

Porém, vemos que, apesar de operar dessa maneira, ele deixa transparecer que não considera o problema resolvido; ele diz: - “Eu não consigo caracterizar bem, mas é assim que eu vejo. Exatamente isso que eu quero fazer, essa ligação de um com outro eu não consegui fazer, desde que a gente aprenda algebricamente, né?”

Ao olhar para o processo de produção de significados de Ades com o intuito de pensar na dinâmica do processo, vemos a constituição dos objetos se mantendo

a mesma ao longo de todo o processo: vetor, entendido como segmento orientado; \mathbb{R}^2 é o plano e é um elemento formativo do \mathbb{R}^3 ; \mathbb{R}^3 é o espaço.

O processo de nucleação, isto é, de constituição e transformação do núcleo, foi de incorporação de estipulações locais ao longo do processo, da seguinte maneira esquemática:

1º momento: \mathbb{R}^2 tem dimensão 2, \mathbb{R}^3 tem dimensão 3, dois vetores paralelos são o mesmo vetor, dois vetores paralelos formam/geram um plano

2º momento: \mathbb{R}^2 tem dimensão 2, \mathbb{R}^3 tem dimensão 3, dois vetores paralelos são o mesmo vetor, dois vetores paralelos formam/geram um plano, o plano é infinito, o plano é a união de dois vetores linearmente independentes, os planos geradores do \mathbb{R}^3 são contínuos, o plano não tem espessura]

As operações foram, ao longo do processo, estender/deslocar/ acrescentar; que para nós, eram sinônimas de expandir, por exemplo: “Na hora que eu desloco o plano, eu estendo isto pra uma visão de espaço”; “Quando eu tô no plano, (2,3) é só (2,3), se eu acrescento outra dimensão, esse ponto passa a ser vários pontos no espaço”. Além disso, ele opera com o “enxergar” da seguinte maneira: “Eu enxergo o plano no espaço, mas eu enxergo o plano”.

Em resumo, do que observamos, constatamos que Ades produziu significados, do início ao fim, na direção de um mesmo interlocutor, independente de tudo o que ele ouviu em sala de aula. É possível que sua leitura do problema proposto tenha contribuído para esse estado de coisas. Ao entender que o problema a ser solucionado seria obter \mathbb{R}^3 a partir de \mathbb{R}^2 , ele passou a operar nessa direção. Observamos que o problema assim entendido já havia sido resolvido, por ele, na primeira aula, quando ele diz: “o espaço seria uma expansão do plano”. A questão passou a ser, então, apresentar uma justificativa plausível para o professor e a turma. Por algum motivo que não identificamos; suas justificativas ainda não o convenciam da solução do problema.

Observamos várias vezes ele dizendo: “Eu não consigo caracterizar bem, mas é assim que eu vejo. Exatamente isso que eu quero fazer, essa ligação de um com outro eu não consegui fazer, desde que a gente aprenda algebricamente, né?” (no dia 31 de agosto); ou “Só não consegui ainda colocar isso mesmo numa

linguagem matemática explícita” (no dia 28 de setembro). A questão de saber o porquê dessa atitude já não é mais possível, tendo apenas caráter especulativo. Poderia ser, por exemplo, porque ele acreditava que suas justificações não eram suficientes para satisfazer o professor ou ele entendia que naquele espaço a justificativa aceitável deveria ser outra e não aquela que ele apresentava. Também, o fato de Ades não ter encontrado nenhuma oposição à sua fala – a não ser a divergência com as colegas de grupo – pode tê-lo feito acreditar na legitimidade do que estava dizendo.

Analisando agora a produção de significados de Azul, apresentamos sua primeira fala a respeito do problema proposto a partir da conversa que teve com os colegas de grupo:

Azul: [...] nós nos atemos primeiro em verificar tudo isso: o que era espaço vetorial, corpo, escalar. E a primeira impressão nossa, a minha e a do Mega, era sim; e da Muiara, não. Então, nós começamos a mudar a pergunta; porque se a pergunta fosse: numa dimensão 3 as possibilidades do R^2 , tá? Agora, se é R^2 , para você chegar numa dimensão 3, não teria essa possibilidade; porque a dimensão 3, ela tem que incluir.

Azul vai reiterando sua fala inicial; vemos que ela parece constituir o enunciado do problema em texto da seguinte maneira: Como obter IR^3 de IR^2 ? Então para produzir significados, ela precisa alterá-lo. Mas, por que o enunciado do problema precisa ser alterado? Nossa análise se baseia primeiro, na leitura de Azul, do problema. Para ela, o enunciado do problema não está correto. Segundo, por causa dos objetos que ela constitui e opera. Note que a dimensão é constituída em objeto, como a quantidade de informação necessária para localizar um ponto no plano ou no espaço. Sobre os objetos IR , IR^2 e IR^3 ela diz:

Azul: [...] O quê que é o R pra mim? [ela traça uma reta na lousa] Pra mim é pegar todo o sistema nosso de numeração. Pra mim, seria isso aqui [ela faz riscos sobre a reta sugerindo pontos] todos os pontos, infinitos pontos, pra mim é R . Se eu fizer mais uma [ela traça uma reta perpendicular à anterior] e colocar infinitos pontos aqui ó, pra mim é outro R . Agora se eu unir isso aqui infinitamente, pra mim é R^2 . Eu não sei se pra mim é tão /eu vejo assim, isso aqui tudo unido, certinho é o R^2 . Daqui, aí, tira um ponto fora, desse ponto que tá aqui fora eu relaciono aqui, eu faço o R^3 . [com a mão, ela sugere um ponto fora do plano da lousa]. Pra mim é isso. Eu não sei se eu tô simplificando alguma coisa demais, mas tenho essa visão. Eu acho assim, se eu quiser o R^3 eu tenho que tirar um ponto fora daquele R^2 ,

se eu ligar, eu tenho R^3 . Se eu conseguir montar uma terceira dimensão; se eu pegar um outro ponto fora dessa terceira e ligar, vou ter R^4 . Agora, eu não consigo visualizar essa quarta, o R^4 . Mas eu acredito que nesta mesma medida e proporção deve existir.

Logo, para Azul, o objeto IR é constituído como a reta real; IR^2 , como o plano cartesiano e IR^3 , como o espaço físico. Assim, olhando desta perspectiva, não é possível obter IR^3 de IR^2 , mas é possível obter IR^2 de IR^3 .

Na fala de Azul, observamos que ela possivelmente, tenha ido aos livros-texto e lá tenha encontrado as definições de espaço vetorial, corpo e dimensão. Além disso, ela esteve presente às aulas onde Betty apresentou seu encaminhamento da resolução do problema. Porém, ao que parece, ela não constituiu esses resíduos de enunciação em texto. Notamos que ao longo das aulas, Azul foi silenciando. No decorrer dos dois meses a totalidade de sua fala foi muito pequena. Ao final desses dois meses de discussão, na aula em que a solução do problema foi apresentada, ela ainda comenta:

Azul: Interessante que desde o início, esse problema, eu achava assim, se fosse possível mudar, como você falou agora [referindo-se ao professor], “dimensão três, onde R^2 é o conjunto de vetores desse espaço”. Eu sempre achei que fosse assim. Mas, do outro jeito, eu acho difícil de entender isso. Por exemplo, se eu mudar isso aqui ó, assim, vão supor, se eu falasse assim: “investigue se é possível existir um espaço vetorial real de dimensão três, onde R^2 é o conjunto de vetores do espaço”. Pra mim, isso é claro assim. Se eu mudar isso aqui, eu não consigo perceber a mesma coisa. [...]. Não sei, pra mim, fica claro, eu consigo, assim, meu cérebro acha isso perfeito. Se eu mudar a ordem, não consigo encontrar razão pra isso. Eu acho interessante isso. Agora, se eu falar assim, “a dimensão três onde R^2 ”, aí, pra mim, faz razão. Eu não consigo encontrar a mesma razão no outro texto. Não tem assim, como provar isso. Eu tô pensando, porque só mudando a sequência, muda pra mim, a razão. Se eu falar isso, é desde o início. Lembra que eu comentei que, pra mim, mudando, eu via nitidamente que sim. É interessante, eu não consigo encontrar a razão. Eu tenho que pensar bem, até que conexão tá fazendo o meu cérebro, pra entender, de uma maneira assim. Que é desde o início que eu tava com a mesma dúvida. [...]

Ao que parece Azul opera em relação ao que é o dado para ela. Ela passa por todo o processo operando com os objetos IR^2 , IR^3 , dimensão como elucidamos anteriormente; seu núcleo se mantém estável, isto é, as estipulações locais – a

dimensão do \mathbb{R}^2 é 2 e a dimensão do \mathbb{R}^3 é 3 – se mantêm fixas, não transformando-se durante o processo.

Com o objetivo de estender um pouco nosso olhar para o que está acontecendo com Azul, suponhamos que nosso objetivo, enquanto professor, seja intervir para que ela resolva o problema. Vejamos, da ótica do MCS, o que está acontecendo. Se considerarmos que, para resolver o problema, é preciso operar com a noção de espaço vetorial como uma estrutura algébrica e com a de dimensão de uma perspectiva também algébrica – número de vetores de uma base do espaço vetorial considerado –, vemos que Azul estaria frente a um limite epistemológico.

O que designamos por limite epistemológico é a impossibilidade do sujeito em produzir significados para o resíduo de uma enunciação numa certa direção devido a sua maneira de operar. Sendo assim, se ela não mudar sua maneira de operar, ela não resolverá o problema proposto. Do que estamos observando, com o caso de Azul e outros sujeitos de pesquisa, é que estar frente a um limite epistemológico pode levar ao ponto de paralisar o processo de produção de significados dos sujeitos. Sendo assim, ao professor caberia intervir de modo a auxiliá-los a mudar a maneira como estão operando.

Nossa leitura do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa acima nos permitiu fazer as seguintes considerações enumeradas a seguir.

Primeiro, observamos que Betty, Ades e Azul, produziram diferentes significados para o problema proposto, com maneiras de operar próprias, com constituição de diferentes objetos, o que, por conseqüência, nos sugere dinâmicas próprias.

Segundo, a análise do processo de produção de significados de Betty indicou que todos os elementos que constituem o processo – os objetos, o processo de nucleação, a maneira de operar, a fala na direção de interlocutores, entre outros – estão interligados, de modo que mudanças em um deles provocariam transformações em todos os outros. E são essas transformações que caracterizam a dinâmica do processo. Porém, existem também, outros fatores que interferem nessa dinâmica como, por exemplo, a questão da legitimidade.

Terceiro, o estudo da dinâmica do processo de produção de significados de Betty, Ades e Azul evidenciou três processos diferentes, do que nós chamaremos de impermeabilidade. Por um lado, Betty e Ades, ao que parece, tornaram-se impermeáveis a tudo que estava sendo dito naquela sala de aula, por acreditar na legitimidade de suas produções de significados, operando assim, de modo a não “se deixar contaminar, um pela produção de significados do outro”, por exemplo. Por outro lado, a impermeabilidade de Azul parece ser decorrente da não constituição daqueles resíduos de enunciação, presentes em sala de aula, em texto.

Por último nossa observação evidenciou ainda que grande parte dos alunos como Azul, começou produzindo significados a partir do que lhes eram familiares e não foram muito longe falando. Talvez, pelo fato de, como comentamos anteriormente, não constituírem aqueles resíduos de enunciação em texto ou por não acharem legítimo dizer algo na direção, por exemplo, dos interlocutores de Betty.

CONCLUSÕES DO ESTUDO

Neste momento, reunindo as observações coletadas na análise global e local teremos algumas considerações de caráter conclusivo.

O primeiro aspecto observado que determinou a dinâmica do processo de produção de significados dos sujeitos de pesquisa foi à constituição do enunciado do problema em texto. Pois, nesse momento, o processo se pôs em marcha, desencadeando a constituição de objetos, a constituição de núcleos, a fala na direção de interlocutores, entre outras coisas, que foram sendo determinadas pela leitura desses sujeitos do problema proposto. Por exemplo, como vimos, para Ades o enunciado do problema proposto foi constituído em texto como: obter IR^3 a partir de IR^2 . E essa leitura determinou todo o seu processo de produção de significados. Em outros casos, porém, o enunciado do problema não foi constituído em texto por alguns sujeitos.

Nosso olhar para a história dos objetos IR^2 e IR^3 – isto é, o processo de constituição e mudança dos objetos IR^2 e IR^3 no interior da atividade – revelaram

alguns aspectos importantes com respeito à dinâmica do processo. Observamos que, em alguns casos, existiram transformações nesses objetos. Por exemplo, nas ações enunciativas de Betty, identificamos IR^2 e IR^3 , num determinado momento sendo constituídos como o plano e o espaço respectivamente; noutro, constituído como espaços vetoriais e, em outros, constituídos como conjuntos. Observamos aí mudanças sutis acontecendo às vezes num curto intervalo de tempo. Por outro lado, algumas pessoas constituíram esses objetos como: IR^2 é o plano, IR^2 tem dimensão 2 (comprimento e largura), IR^3 é o espaço (físico), IR^3 tem dimensão 3 (comprimento, largura e altura). E isso foi o que elas disseram, não produzindo outros significados para esses objetos.

A produção de significados dos sujeitos de pesquisa, na interação face a face, revelou uma característica do processo de impermeabilização na produção de significados, que influenciou fortemente sua dinâmica e que nos chamou a atenção por sua recorrência. Com o termo impermeabilização queremos designar a postura do sujeito de não compartilhar novos interlocutores, diferentes daqueles para o qual ele estava voltado; de não se propor a produzir significados numa outra direção. O caso típico e extremo que ocorreu em nosso estudo foi apresentado por Ades. Apesar de tudo o que foi dito em sala de aula, em nenhum momento, ele produziu significados em outra direção diferente daquela em que ele estava operando inicialmente. Observamos também o processo de impermeabilização na produção de significados de Betty e Azul, o que nos sugere que são várias as possibilidades que levam à impermeabilização no processo: ou por acreditar na legitimidade do que diz, por entender que não há por que dizer de outra forma; ou por não poder produzir significados em outras direções – por estar, naquele momento, frente a um limite epistemológico –, ou ainda, por entender que não seja legítimo falar naquela direção.

A questão da legitimidade na produção de significados – isto é, do que o sujeito julga ser legítimo ou não dizer – foi algo recorrente no processo, chegando a ser um dos fatores que determinaram sua dinâmica. Por exemplo, Azul sugeriu mudar o enunciado do problema por acreditar não ser legítimo, para ela, obter IR^3 de IR^2 (sua leitura do problema). De fato, a legitimidade do que é dito é uma das características do processo de produção de significados.

Nosso estudo do processo de nucleação – constituição e transformações de um núcleo – revelou que eles podem, ao longo do processo de produção de significados, sofrer mudanças, transformações nas estipulações locais com maior ou menor intensidade, ou se manter estáveis, no sentido de que as estipulações locais se mantêm as mesmas durante o processo. O primeiro caso pode ser representado pelo processo de nucleação de Betty, onde observamos algumas estipulações sendo constituídas e depois se afastando, dando lugar a outras; e essas últimas, elas próprias, passam por mudanças com a incorporação de novos elementos.

No processo de nucleação de Ades, por exemplo, não observamos o afastamento, nem a aproximação de estipulações locais; pois o movimento, nesse caso, se deu através de uma crescente incorporação de “novas” estipulações ao núcleo, em relação às já constituídas. O segundo caso, referente ao caráter estável do processo de nucleação, foi observado na produção de significados de Azul, cujo núcleo foi constituído ao longo de todo o processo pelas estipulações locais: “ \mathbb{R}^2 é o plano”, “ \mathbb{R}^2 tem dimensão dois”, “ \mathbb{R}^3 é o espaço”, “ \mathbb{R}^3 tem dimensão três”. Com dimensão se referindo à quantidade de informação que necessitamos para localizar um ponto no plano e no espaço. Tais estipulações locais se mantiveram fixas ao longo de todo o processo. Outra vez, como mencionamos no processo de impermeabilização, esse estado de coisas, possivelmente, tenha tido motivos variados sobre os quais poderíamos, no momento, só especular.

Outro ponto importante sobre a dinâmica do processo diz respeito à mudança nos interlocutores. Vimos, por exemplo, que Betty iniciou produzindo significados na direção de alguns interlocutores, que, para efeito de caracterizar uma direção, diremos que foi na direção da produção de significados geométricos; para depois, se voltar a uma direção na qual se produziram significados algébricos. Outros sujeitos, porém, se voltaram para falar numa única direção ao longo de todo o processo. Outros sujeitos, ainda, mudaram a direção de sua produção de significados na tentativa de resolver o problema proposto.

Duas conclusões globais podem ser tiradas de nossa investigação. Primeira, o estudo da dinâmica evidenciou que todos os sujeitos de pesquisa que produziram significados para o problema proposto, o fizeram de diferentes modos, operando de modo peculiar, uns em relação aos outros. Decorre desse fato que, com respeito à

produção de significados, podemos dizer que não existe uma dinâmica do processo, mas dinâmicas, peculiares a cada sujeito. Além disso, uma das possíveis consequências desta consideração se refere à impossibilidade de qualquer tentativa de categorização dos sujeitos de pesquisa através de sua produção de significados. Assim, em termos de pesquisa, não podemos falar em possíveis representantes de algum modo de produção de significados.

A segunda conclusão a que chegamos fruto das leituras desenvolvidas nos sugere que todos os elementos que constituem o processo de produção de significados – a constituição e transformação dos objetos, o processo de nucleação, a fala na direção de interlocutores, as legitimidades – estão interligados, e são interdependentes, de modo que mudanças ocorridas em um deles provocariam transformações em todos os outros. E são essas transformações que caracterizam a dinâmica do processo.

Um aspecto central de tudo o que analisamos e que devemos levar a sério, a despeito de considerá-lo óbvio, é o fato de que os diferentes modos de produção de significados, gerando diferentes dinâmicas no processo, aconteceram a partir de um mesmo enunciado (o problema proposto).

REFERÊNCIAS

- André, M. E. D. A. (2009). *Etnografia da prática escolar*. 16 ed. Campinas: Papyrus. (Série Prática Pedagógica)
- Bogdan, R. C.; Biklen, S. K. (2010) *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto Editora.
- Derrida, J. (1991). *Limited Inc*. Campinas: Papyrus.
- Godino, J. D.; Batanero, M. C. (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble, v.4, n.3, p.325-353.
- Goodman, N. (1984) *Of mind and other matters*. London: Harvard University Press.
- Leontiev A. N. (sd) *O Desenvolvimento do psiquismo*. São Paulo: Moraes.
- Leontiev, A. N. (1984) *Actividad, conciencia y personalidad*. Mexico: Cartago.
- Lins, R. C. (1992) A framework for understanding what algebraic thinking is. 330p. *Thesis (Phd)* – University of Nottingham, Nottingham.
- Lins, R. C. (1994) Campos semânticos y el problema del significado en álgebra. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Barcelona, n.1, jul., p. 45-56.

- Lins, R. C. (1997) Luchar por la supervivencia: la producción de significado. *UNO-Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Barcelona, n.14, out., p.39-46.
- Lins, R. C.; Gimenez, J. (1997) *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus. (Coleção perspectivas em Educação Matemática).
- Lins, R. C. (1999) Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora da UNESP, p.75-94.
- Lins, R. C. (2001) The production of meaning for algebra: a perspective based on a theoretical model of semantic fields. In: Sutherland, R. et al. (Ed.). *Perspectives on school algebra*. London: Kluwer Academic Publishers, p.37-60.
- Lins, R. C. et al. (2002) Of course \mathbb{R}^3 is blue! Developing an approach to turn a mathematics course into a mathematics education course. In: International Conference the teaching of mathematics, 2., 2002, Heronissos – Creta – Grécia. *Proceedings of the Second International Conference the Teaching of Mathematics*, jul.. 1 CD – Rom.
- LINS, R.C. (2012) O Modelo dos campos semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações. In: Angelo, C.L. et al. (orgs.). *Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos de história*. São Paulo: Midiograf.
- Oliveira, V. C. A. (2002) Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em Álgebra Linear. 187p. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)* – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.
- SILVA, A. M. (1997) Uma análise da produção de significados para a noção de base em álgebra linear. 163p. *Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)* – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro.
- SILVA, A. M.; Lins, R. C. (2002) An analysis of the production of meaning for the notion of basis in linear algebra. In: International Conference the teaching of mathematics, 2, Heronissos – Creta – Grécia. *Proceedings of the Second International Conference the Teaching of Mathematics*, jul. 1 CD – Rom.
- SILVA, A. M. (2003). Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática. 243p. *Tese de Doutorado*. Rio Claro, Brasil: Universidade Estadual Paulista.
- Vygotsky, L. S. (1993) *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.
- Vygotsky, L. S. (1994) *A formação social da mente*. 5.ed. São Paulo: Martins Fontes.

Submetido: Setembro de 2013

Aceito: Outubro de 2013