DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2022v15n2p214-225

Familiarização com Modelagem Matemática e as Estratégias Heurísticas dos alunos

Familiarization with Mathematical Modelling and students' Heuristic Strategies

Thais Maya Koga[a]; Karina Alessandra Pessoa da Silva*[a]

[a]Universidade Tecnológica Federal do Paraná. PR, Brasil.
*E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br

Resumo

Neste artigo apresentamos resultados de uma pesquisa de mestrado da primeira autora sob orientação da segunda em que nos debruçamos nas estratégias heurísticas dos alunos ao desenvolver atividades de modelagem matemática, considerando três momentos de familiarização. Para isso, nos fundamentamos nos aportes teóricos da Modelagem Matemática entendida como alternativa pedagógica, mais especificamente nas fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem com o intuito de implementar em sala de aula. Além disso, nos amparamos nos pressupostos relativos às estratégias heurísticas utilizadas para definir encaminhamentos na resolução de um problema em cada momento de familiarização. Os dados que subsidiam nossas análises referem-se às falas, aos gestos e aos relatórios de três atividades de modelagem desenvolvidas por um grupo de dois alunos de um curso de Licenciatura em Química, de uma universidade pública do Paraná, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A análise qualitativa e interpretativa nos permite inferir que as estratégias heurísticas associadas ao fazer modelagem matemática aumentam gradativamente, bem como são refinadas, com a familiarização dos alunos, já que além da construção do modelo os alunos devem também compreender a situação-problema, definir o problema, matematizar, desenvolver o modelo, interpretar e validar a solução. Esses empreendimentos podem auxiliar na implementação de atividades de modelagem em sala de aula.

Palavra-chave: Modelagem Matemática. Estratégias Heurísticas. Implementação em Sala de Aula. Momentos de Familiarização. Cálculo Diferencial e Integral I.

Abstract

In this paper we present the results of a master's research by the first author under the guidance of the second in which we focus on the heuristic strategies of students when developing mathematical modeling activities, considering three moments of familiarization. For this, we are based on the theoretical contributions of Mathematical Modeling understood as a pedagogical alternative, more specifically in the phases of the development of a modeling activity in order to implement it in the classroom. In addition, we rely on the assumptions related to the heuristic strategies used to define referrals for solving a problem at each moment of familiarization. The data that support our analyzes refer to the speeches, gestures and reports of three modeling activities developed by a group of two students from a Chemistry Degree course, from a public university in Paraná, in the discipline of Differential Calculus and Integral I. The qualitative and interpretative analysis allows us to infer that the heuristic strategies associated with doing mathematical modeling gradually increase, as well as are refined, with the familiarization of the students, since in addition to the construction of the model the students must also understand the problem-situation , define the problem, mathematize, develop the model, interpret and validate the solution. These ventures can assist in the implementation of modeling activities in the classroom.

Keywords: *Mathematical Modeling. Heuristic Strategies. Classroom Implementation. Familiarization Moments. Differential and Integral Calculus I.*

1 Introdução

Na sala de aula de Matemática, muitos empreendimentos têm levado em consideração tendências em Educação Matemática para o ensino de conteúdos matemáticos. Dentre esses empreendimentos, temos nos debruçado na Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica em que, a partir de uma situação inicial (problemática), busca-se uma solução por meio de procedimentos matemáticos (situação final) (Almeida et al., 2012).

Dos procedimentos matemáticos, de forma geral, emergem modelos matemáticos que possibilitam explicar, representar e fazer previsões para a situação inicial de forma a torná-la presente por meio da matemática. Isso porque um modelo matemático consiste em "um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático" (Almeida & Vertuan, 2014, p.2). Com isso, conteúdos matemáticos podem ser aprendidos ou revisitados por aqueles que estão envolvidos com a Modelagem Matemática.

Ao se envolver com atividades de modelagem, ou seja, na busca por uma solução para a situação inicial, os modeladores (alunos e professores, no âmbito educacional) desempenham tanto ações físicas quanto ações psíquicas de memorização ativa e de pensamento.

Embora a Modelagem Matemática apresente, de certa forma, potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos, sua implementação em sala de aula ainda consiste em um desafio para os professores. Neste viés, existem pesquisas que apontam direcionamentos e orientações bem sucedidas de implementação da Modelagem Matemática por meio de ciclos de modelagem (Doerr et al., 2016, Borromeo Ferri, 2018, Stender, 2018), antecipação do desenvolvimento de atividades de modelagem (Stillman, 2017, Carlson & Wickstrom, 2016, Silva et al., 2020), uso de trajetória hipotética de aprendizagem (Ferreira & Silva, 2019), estratégias heurísticas (Stender & Kaiser, 2017, Stender, 2018, Stender, 2019, Almeida, 2020) e familiarização dos alunos (Almeida et al., 2012, Borromeo Ferri, 2018).

Stender (2018) indica que o ciclo de modelagem, por sua estrutura, já orienta como deve ocorrer ou mesmo deveria ocorrer o desenvolvimento de uma atividade de modelagem. Esse autor ainda associa estratégias heurísticas que podem ser empreendidas ao se encaminhar pelo ciclo de modelagem. Porém, Borromeo Ferri (2018) destaca que os modeladores não necessariamente precisam seguir o ciclo de modelagem de forma linear, podendo ir e voltar nas diferentes etapas (ou fases) quantas vezes for necessário, compondo rotas de modelagem. Tais rotas estão associadas à familiarização dos alunos com a Modelagem Matemática.

Neste artigo trazemos resultados de pesquisa desenvolvida no âmbito de um mestrado em que nos debruçamos sobre as estratégias heurísticas dos alunos ao se envolverem com atividades de modelagem matemática. Embora já existam pesquisas que versem sobre as estratégias heurísticas de alunos ao desenvolver atividades de modelagem (Stender & Kaiser, 2017, Stender, 2018, Stender, 2019, Almeida, 2020), na literatura ainda são pouco exploradas. Consideramos, assim como Pólya (1945), que estratégias heurísticas consistem em ferramentas do pensamento que orientam os alunos na busca por uma solução para um problema.

A problematização sobre as estratégias heurísticas em atividades de modelagem apresentada no texto considera a possiblidade de implementar Modelagem Matemática na sala de aula seguindo99 três momentos de familiarização dos alunos (Almeida, Silva & Vertuan, 2012). Com isso, o objetivo do presente artigo é trazer reflexões para a questão *como as estratégias heurísticas se fazem presentes em atividades de modelagem matemática com a familiarização dos alunos?*

Do ponto de vista metodológico, realizamos uma análise interpretativa das estratégias heurísticas utilizadas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, nos três momentos de familiarização com um grupo de alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Licenciatura em Química de uma Universidade Federal do norte do Paraná.

2 Quadro Teórico

A Modelagem Matemática é uma tendência em Educação Matemática que tem sido implementada no contexto da sala de aula regular (Almeida et al., 2012, Silva et al., 2016, Silva, 2017, Borromeo Ferri, 2018, Silva et al., 2020) e extraclasse (Araújo & Campos, 2015, Schroetter et al., 2016, Geiger et al., 2016).

Levy (2018, p.175) afirma que a Modelagem Matemática, no âmbito escolar, "busca motivar de maneira mais incisiva e eficaz, a aprendizagem", pois contraria os métodos tradicionais de ensino da disciplina, baseada na memorização e desvinculada a contextos extramatemáticos. Blum (1995) argumenta que a Modelagem prepara o aluno para a utilização da matemática em diferentes áreas, desenvolve a habilidade de pesquisa e exploração, além de possibilitar a compreensão sociocultural da matemática.

Para além dos motivos supracitados, entendemos assim como Almeida e al. (2012, p.29) que, por meio da Modelagem, há a "possibilidade de ensinar e aprender Matemática e perceber suas aplicações para a resolução de problemas com que o aluno se depara fora da escola". Isso porque entendemos a Modelagem Matemática como "uma alternativa pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático" (Almeida et al., 2012, p.9). Para isso, parte-se de uma situação inicial (problemática) e chega-se a uma situação final (solução para a problemática). Neste sentido, entendemos que

> [...] uma atividade de modelagem matemática consiste em uma situação inicial e uma situação final, intermediadas por ações e procedimentos que dizem respeito à escolha de um tema, coleta de informações, formulação do problema, transição de uma linguagem natural para uma linguagem matemática, validação e interpretação de um modelo matemático (representação matemática) à luz da situação inicial (Silva et al., 2020, p.74).

Com isso, desenvolver uma atividade de modelagem requer do aluno uma postura investigativa, pois o coloca em contato com situações não rotineiras à sala de aula (Silva et al., 2011). Essas ações e procedimentos, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, podem ser associados a fases ou etapas, já caraterizadas na literatura (Bassanezi, 2002, Stillman et al., 2010, Sekerák, 2010, Almeida et al., 2012, Blum, 2015, Stillman et al., 2015, Greefrath, 2015, Borromeo Ferri, 2018, Meyer, 2020).

Em nossa pesquisa consideramos as fases como sugerem Almeida et al. (2012), quais sejam inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

A *inteiração* é o primeiro contato com a situação a se estudar. Corresponde à busca por informações que possibilitam vislumbrar o problema a ser estudado. O problema definido, de forma geral, se apresenta em linguagem natural e necessita da transformação para uma linguagem matemática, é a fase de *matematização*. Para isso, formula-se hipóteses, seleciona-se variáveis e realiza-se simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração. A *resolução* é a fase de construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever matematicamente a situação. A *interpretação dos resultados* indicados no modelo implica na análise de uma solução para o problema. A análise da solução implica em uma *validação* da representação matemática associada ao problema.

Essas fases constituem procedimentos necessários para desenvolver uma atividade de modelagem, mas não precisam ocorrer de forma linear. Na dinâmica deste tipo de atividade, muitas vezes, se fazem necessários movimentos de idas e voltas (Almeida et al., 2012, Borromeo Ferri, 2018).

Assim, considerando a dinâmica das aulas com Modelagem Matemática, Almeida et al. (2012) sugerem que sua implementação e encaminhamento ocorram de forma gradativa, por meio da familiarização dos alunos. Para tanto, os autores caracterizam três momentos de familiarização com atividades de modelagem matemática.

No primeiro momento de familiarização, o professor propõe uma situação-problema, faz a coleta de dados e busca as informações necessárias para que os alunos, em grupos, desenvolvam a atividade sob sua orientação no que diz respeito à interpretação de dados, a transformação da linguagem natural em matemática, a obtenção e validação de um modelo matemático.

Já em um segundo momento, ainda que o professor sugira uma situação-problema ou tema, os alunos, novamente em grupos, devem complementar as informações sobre o tema, formular um problema, definir as variáveis, obter e validar o modelo matemático. A diferença entre primeiro e segundo momento é a independência dos alunos nos procedimentos necessários para a resolução.

Por fim, no terceiro momento, os alunos, também em grupo, são responsáveis pelo desenvolvimento da atividade, desde a escolha do tema até a solução do problema definido para ser investigado, dando aos alunos uma maior independência investigativa.

Essa forma gradativa do encaminhamento da atividade possibilita ao aluno "desenvolver a 'habilidade de fazer modelagem'" (Almeida et al., 2012, p.27). Com isso, aumenta sua independência ao planejar e fazer uso de estratégias para desenvolver atividades de modelagem matemática. Na literatura, estratégias de desenvolvimento de atividades no âmbito educacional podem seguir heurísticas.

Os estudos a respeito da utilização das estratégias heurísticas na resolução de problemas, segundo Disperati (2015), datam do século III a.C. com o filósofo Pappus. Seguindo com Sócrates, para ele, o conhecimento necessário já é possuído pelo indivíduo, sendo o exercício de recordação a única estratégia necessária. Outros filósofos como René Descartes (1596-1650), Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716) e Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) também estudaram as estratégias heurísticas, mas não integradas ao ambiente escolar, cabendo esta tarefa para Polya.

George Polya (1887–1985), considerado por professores e pesquisadores como o pai da resolução de problemas (RP), formalizou a ideia da heurística como sendo a arte da descoberta. Segundo Cavalheiro & Meneghetti (2020, p. 65), "ele propôs o estudo de heurísticas na RP, isto é, métodos e regras do processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais".

Para o autor do livro *How to solve it* originalmente publicado em 1944, Polya (2006) argumentava que a resolução de um problema estava estruturada em quatro fases: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e retrospecto. Para Disperati (2015), "tais heurísticas visam a auxiliar o ensino-aprendizagem de matemática através da utilização de problemas", pois, pode auxiliar o processo de construção, análise e validação da resolução.

Neste sentido, considerando que a modelagem matemática se inicia de uma situação-problema, pesquisas de Stender & Kaiser (2017), Stender (2018), Stender (2019) e Almeida (2020) sugerem que estratégias heurísticas são utilizadas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Stender (2018) agrupou as ações que revelam estratégias heurísticas, conforme consta no Quadro 1.

Quadro 1 - Estratégias Heurísticas na Modelagem Matemática

Estratégias Heurísticas	**Ações que Revelam sua Utilização**
1 - Organize seu material/ Entenda o problema	- Sugestão e escolha de temas relacionados com problemas do cotidiano (discretização). - Estruturação e organização de padrões importantes (tentativa e erro). - Utilização de computadores (simulação).
2 - Use sua memória de trabalho de forma eficaz:	- Utilização de "signo que representa vários conteúdos matemáticos"- o gráfico de uma parábola por exemplo, denota conhecimento de função de segundo grau, potenciação entre outros (supersigno). - Redução da complexidade da situação, desconsiderando pequenas restrições para a utilização em outros problemas (simetria). - Divisão em subproblemas.
3 - Pense grande	- Para diminuição de certas restrições do problema e então resolvê-lo de forma mais ampla (generalização).
4 - Utilize o que sabe	- Aproximação com outros já conhecidos, por meio do uso de algoritmos (analogia).
5- Verifique aspectos funcionais	- Essa estratégia depende do conhecimento funcional. Sendo identificada com a utilização de: derivação, tabelas, iteração. Análise de intervalos e a identificação da melhor opção (aspectos funcionais). - A transferência de uma situação contínua para discreta pode solucionar o problema (discretização).
6- Organize seu trabalho	- Exame e identificação da melhor maneira de resolução (manter ou mudar a abordagem).

Fonte: Adaptado de Stender (2018).

Assim, concordamos com Almeida (2020, p.220) de que "algumas estratégias parecem intuitivas ou associadas às experiências anteriores dos alunos com modelagem matemática. Outras, entretanto, parecem ser mais específicas e refletem a característica de descoberta". Em razão disto, voltamos nossa atenção em analisar e revelar as estratégias heurísticas utilizadas pelos alunos ao desenvolver atividades de modelagem matemática em diferentes momentos de familiarização e evidenciar a intenção de sua utilização quando há o aumento de sua experiência e autonomia.

3 Aspectos Metodológicos

Nossa motivação de pesquisa consiste em revelar as estratégias heurísticas presentes em atividades de modelagem matemática em diferentes momentos de familiarização dos alunos, bem como evidenciar a intencionalidade de sua utilização.

Os dados analisados são oriundos de um grupo de alunos de uma turma do segundo período da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de um curso de Licenciatura em Química, de periodicidade semestral, de uma universidade pública do estado do Paraná. A disciplina, com carga horária de 72 horas, foi organizada pela professora (segunda autora deste artigo) de forma que atividades de modelagem estivessem presentes no decorrer do semestre. Ao todo foram desenvolvidas oito atividades de modelagem – quatro de primeiro momento; uma de segundo momento e três de terceiro momento (por três grupos de alunos). Assim, cada aluno se envolveu com seis atividades de modelagem ao longo do semestre.

A turma era formada por 18 alunos que estavam cientes da pesquisa a ser realizada pela primeira autora deste artigo. A pesquisa realizada faz parte de um projeto aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) por meio do parecer número 3.318.427, de 10 de maio de 2019. Todavia, todos os alunos assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido.

Dos três grupos que se constituiu nas atividades de terceiro momento, elegemos um deles, formado por dois alunos – E1 e E2 – visto que permaneceu inalterado em três atividades que analisamos neste artigo. Além disso, esse grupo desenvolveu uma atividade de modelagem matemática de terceiro momento com temática mais direcionada à Licenciatura em Química, como requerido pela proposta de Atividade Prática como Componente Curricular (APCC).

A atividade de primeiro momento *Vai de gasolina ou etanol?* foi planejada pela pesquisadora (primeira autora deste artigo) com a intenção de abordar função afim e requereu que os alunos comparassem a eficiência de dois combustíveis – gasolina e etanol. A atividade de segundo momento de familiarização intitulada *O resfriamento do café*, estudou o decaimento da temperatura do café de acordo com o tempo, considerando o material do recipiente em que a amostra foi depositada. Os procedimentos extra matemáticos de como proceder para a coleta, a quantidade de café, como realizar a aferição, a utilização de cafeteira, o uso do termômetro e copos de diferentes materiais foram definidos pelos alunos. Já a atividade de terceiro momento, desenvolvida pelo grupo escolhido, teve como tema *Antocianina* , em que os alunos analisaram a eficiência da antocianina e calcularam o volume de ácido necessário para neutralizar a mistura básica, quando misturados os compostos extremos de pH das soluções estudadas.

Os dados que subsidiaram nossas análises foram obtidos de relatórios escritos e digitais entregues pelos alunos, áudios, vídeos e diário de bordo da pesquisadora. Baseadas nos resultados de trabalhos de Stender (2018, p.325) que mostram que as estratégias heurísticas podem "funcionar como uma caixa de ferramentas conceitual, para que professores analisem a complexidade de um problema de modelagem e identifiquem as etapas importantes", realizamos uma pesquisa qualitativa interpretativa, com ênfase em aspectos subjetivos do comportamento humano pela análise interpretativa, conforme orientações de Moreira (2011). Utilizamos E, para identificar os estudantes seguido de um número, obedecendo a ordem alfabética, AP para pesquisadora e PR para a professora regente da turma. Além disso, para identificar as Estratégias Heurísticas, utilizamos o código EH^n, em que EH é a sigla para estratégia heurística e n é a ordem dos grupos de estratégia apresentada no Quadro 1.

3.1 Descrição e análise das atividades

Neste tópico apresentamos uma descrição de cada atividade desenvolvida em cada momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática. Trazemos excertos de diálogos durante orientação da AP ou da PR que subsidiaram ações dos alunos com vistas a evidenciar estratégias heurísticas, bem como de recortes do desenvolvimento das atividades apresentadas em relatórios entregues pelos alunos.

3.2 A atividade de primeiro momento: vai de gasolina ou etanol?

Para desenvolver a atividade de primeiro momento, os alunos, divididos em três grupos, baseados em algumas informações apresentadas pela pesquisadora (Figura 1), deveriam elaborar um problema, definir as variáveis relacionadas, bem como as hipóteses e deduzir o modelo matemático que possibilitasse dar uma solução para o problema.

Figura 1 - Atividade de primeiro momento de familiarização – vai de gasolina ou etanol?

Vai de gasolina ou etanol?

Com o interesse de analisar a conveniência da escolha entre os combustíveis: gasolina e etanol de automóveis do tipo flex, desconsiderando fatores como poluição do meio ambiente e conservação do motor. Uma aluna do mestrado profissional coletou os seguintes dados do veículo Ford Ka+, com motor 1.0 de 3 cilindros, o consumo médio do carro é 8,8 km/l (cidade) e 10,2 km/l (estrada), quando utiliza apenas etanol. Ao abastecer com gasolina, as médias ficam em 13,1, para trechos urbanos, e 15 km/l, ao rodar na estrada. Na Tabela 1, apresentamos três variações de preços dos combustíveis praticados em três difentes postos neste mês.

Tabela 1: Preços de combustíveis em 2018

Posto	Gasolina (R$)	Etanol (R$)
A	4,29	2,89
B	4,39	2,85
C	4,79	2,99

Fonte: Autores.

Fonte: Dados pesquisa.

O problema buscou a resolução da seguinte questão: "Para fazer uma viagem de 650 km, já considerando a ida e a volta, decidimos usar apenas um tipo de combustível e só parar para encher o tanque quando estiver na reserva. Então, queremos saber qual é a opção de abastecimento mais econômica? (Todos os postos no percurso realizam os mesmos valores do posto A)". Para iniciar a resolução do problema o grupo buscou mais algumas informações:

> E1: Prof. podemos pesquisar mais coisas na internet?
> AP: Sim, podem. Mas, quais informações vocês sentiram falta?
> E1: É que a gente queria saber quantos litros cabem no tanque e a partir de quantos litros marca reserva, porque pensamos em um problema que precisam dessas informações.
> AP: No tanque entram 51 litros, mas a reserva eu não sei. Podem procurar, complementar com o que vocês precisarem.

Assim, o grupo verificou que necessitaria de dois tanques de combustível caso escolhessem o etanol ou então 1 tanque de gasolina considerando o rendimento do enunciado de cada um dos combustíveis, em seguida desenvolveram os modelos matemáticos e , em que n representa a quantidade de tanques de combustíveis (capacidade de 51l total, sendo 5l "reserva"), P_e o valor a ser pago para o etanol e P_g o valor a ser pago para a gasolina. Para a solução para o problema que se propuseram a investigar determinaram o valor de R$280,33 caso utilizassem etanol e R$ 218,79 se optassem pela gasolina.

Ao obter um modelo matemático, o grupo solicitou a orientação da pesquisadora, conforme transcrição a seguir:

> E1: A gente descobriu quantos tanques de combustível serão necessários, considerando apenas 46l, porque 5l são de reserva e depois multiplicamos pelo preço do litro e vamos chegar no valor que gastaremos. É assim?
> AP: Vocês concordam? Validem o modelo!
> E1: Sim, analisando o rendimento dos dois combustíveis seria isso mesmo.
> E2: Era isso que tínhamos que fazer?
> AP: Matematicamente me parece tudo certo. Cabe a vocês aceitarem o modelo ou construírem outro.

O grupo então finalizou os cálculos e pareceu se dar por satisfeito. Porém a pesquisadora solicita uma generalização da solução que estavam investigando, conforme transcrição a seguir:

> E2: Terminamos. Está certo?
> AP: [depois de uma breve análise]. Parece-me que sim! E vocês conseguiriam responder, pelo modelo que vocês construíram. Qual é a melhor opção nos outros postos de combustíveis, também?
> E2: Acho que sim! Vamos tentar, então.
> E1: É só trocar o valor por litro na função e conseguimos calcular o preço nos outros postos também.

Assim, de maneira análoga aos cálculos utilizados para escolher a opção mais econômica no posto A, o grupo encontrou os seguintes valores no posto B – R$276,45 para etanol e R$223,89 para gasolina – e no Posto C – R$ 290,03 para etanol e R$ 244,29 para gasolina. Concluindo que, independentemente da diferença de valores nos postos, para uma viagem de 650km, em todos a melhor opção seria a gasolina.

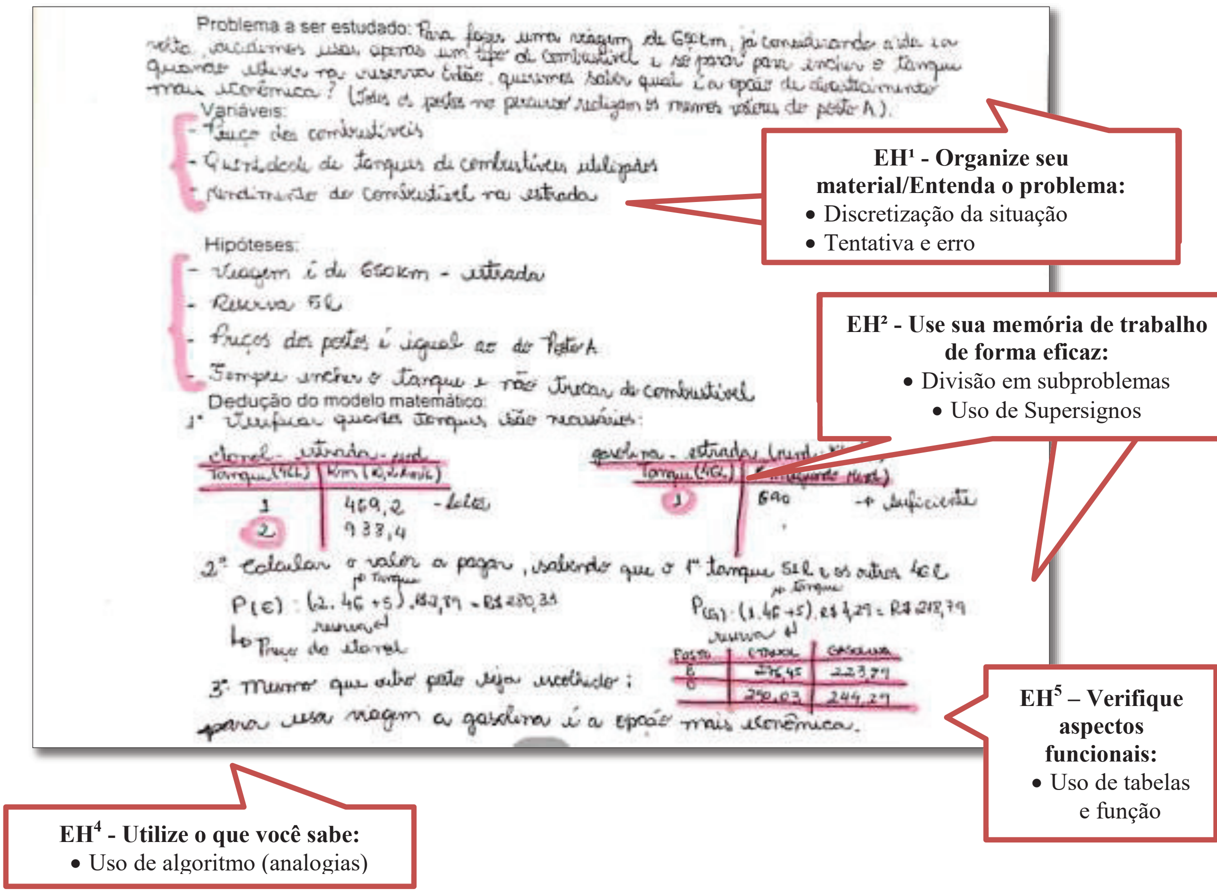
Buscando identificar as estratégias heurísticas utilizadas pelos alunos nos encaminhamentos da atividade de primeiro momento, entendemos que ao transformar os dados reais em um problema matemático, ocorreu uma simplificação da realidade, (discretização), ainda observamos que os alunos se utilizaram da tentativa e do erro para entender e solucionar o problema o que, para Stender (2018), denotou as estratégias do grupo: "organize seu material/Entenda o problema". Já para a dedução dos modelos matemáticos – e – o grupo primeiro determinou a quantidade de tanques de combustível necessária baseado no rendimento do veículo – sendo 2 tanques para etanol e 1 para gasolina – depois calculou o valor gasto com cada combustível – R$280,33 caso utilizassem etanol e R$ 218,79 se escolhessem gasolina – para então comparar e decidir qual é a melhor opção. A transcrição a seguir, nos possibilitou evidenciar essa estratégia do grupo:

> E1: Outra dúvida, a gente pode resolver aos poucos?
> AP: Vocês precisariam de mais tempo para resolver?
> E1: Não, não, prof. para resolver o problema a gente pode multiplicar os litros de gasolina do tanque pela quilometragem da autonomia, para depois saber quanto vamos gastar? ....
> Fazer assim... Sabe?... Por pedaços... pode?
> AP: Pode sim!

Entendemos que essa divisão em subproblemas e a utilização de supersignos, neste caso, a tabela (presente na Figura 2) que relacionou a quantidade de tanques de combustível à quilometragem estimada representou o entendimento de crescimento linear do valor, isto é, uma função do primeiro grau. Essas ações em que os alunos utilizaram outro registro para analisar o comportamento dos valores pagos nos diferentes abastecimentos nos possibilitou evidenciar estratégias heurísticas do grupo de "use sua memória de trabalho de forma eficaz".

Na Figura 2 sintetizamos as estratégias heurísticas evidenciadas no desenvolvimento da atividade de modelagem de 1º momento pelo grupo de alunos formados por E1 e E2. Para isso, trazemos excertos do relatório que o grupo entregou, indicando as estratégias heurística, considerando inclusive o que articularam de maneira oral.

Figura 2 Estratégias heurísticas identificadas na atividade de primeiro momento



Fonte: Dados da pesquisa.

Outras estratégias reveladas foram "verifique aspectos funcionais" pela utilização de tabelas, indicando que o grupo verificou uma relação entre variáveis dependentes e independentes e "utilize o que você sabe", já que o mesmo cálculo foi utilizado para realizar a comparação com os valores aplicados pelos outros postos de combustíveis (Figura 2).

Por meio dessas estratégias evidenciamos o conhecimento de conceitos de matemática básica, principalmente relacionado ao estudo de funções afim, como esperado pela pesquisadora ao planejar a atividade. No entanto, os alunos mostraram preocupação em realizar diversos "cálculos" para resolver o problema. Assim, entendemos que nas atividades de primeiro momento as estratégias heurísticas indicaram uma preocupação com a matemática envolvida e com resultados exatos, identificados nos questionamentos - E2: Era isso que tínhamos que fazer?; E1: a gente pode resolver aos poucos? .... Fazer assim?; E2: Está certo? – o que pareceu revelar falta de experiência com atividades de modelagem e a necessidade de confirmações algébricas. Portanto, uma maior interferência e mediação do professor.

3.3 A atividade de segundo momento: O resfriamento do café

Na atividade de segundo momento, o tema do estudo da temperatura do café foi sugerido pela PR e a coleta de dados empíricos foi realizada pelos alunos reunidos em grupos e em aulas regulares. O grupo em análise escolheu, dentre os disponíveis, dois recipientes constituídos por diferentes materiais – acrílico e vidro – para investigar a temperatura de amostras de café. Utilizaram um becker para medir o volume de 100 ml de água e colocaram em cada recipiente. Em seguida, riscaram com a caneta a altura na parte interna, marcando a quantidade de café que deveriam colocar. O café foi feito em uma cafeteira elétrica, a aferição foi realizada em um recipiente por vez e com termômetros (Figura 3). A temperatura inicial era de 60ºC em todos os recipientes, por ser a máxima suportada pelo termômetro. Cada aferição durou 30 minutos e os dados das temperaturas do café foram anotadas a cada dois minutos.

Figura 3 – E1 aferindo a temperatura inicial do café

Fonte: os autores.

O grupo delineou a linha de tendência que, segundo os alunos, melhor descreveu o comportamento do resfriamento do café por meio do software Excel, desenvolvendo, com isso, um modelo para o decaimento da temperatura do café, quando colocado em um recipiente acrílico – – e quando colocado em um recipiente de vidro – – em que x representa o tempo transcorrido e y a temperatura do café em graus Celsius. Com tais modelos matemáticos deduzidos com o auxílio do *software*, os alunos determinaram o momento em que a amostra de café atingisse o equilíbrio térmico, aos 27ºC (temperatura ambiente no momento da coleta de dados), obtendo 41,62 minutos no recipiente acrílico e 49,84 minutos no recipiente de vidro. Logo, o grupo concluiu que o recipiente de vidro conservaria a temperatura do café por mais tempo quando comparada com a temperatura no recipiente acrílico.

As primeiras discussões a respeito da definição do problema, como quantidade de café, tempo de resfriamento e influência do recipiente para o resfriamento revelaram as estratégias heurísticas do grupo "organize seu material/ entenda o problema" e "use sua memória de trabalho de maneira eficaz" que foi evidenciada no planejamento das ações para a realização da coleta de dados em que o "grande" problema foi dividido em subproblemas e resolvido conforme foram sendo identificados, segundo transcrição:

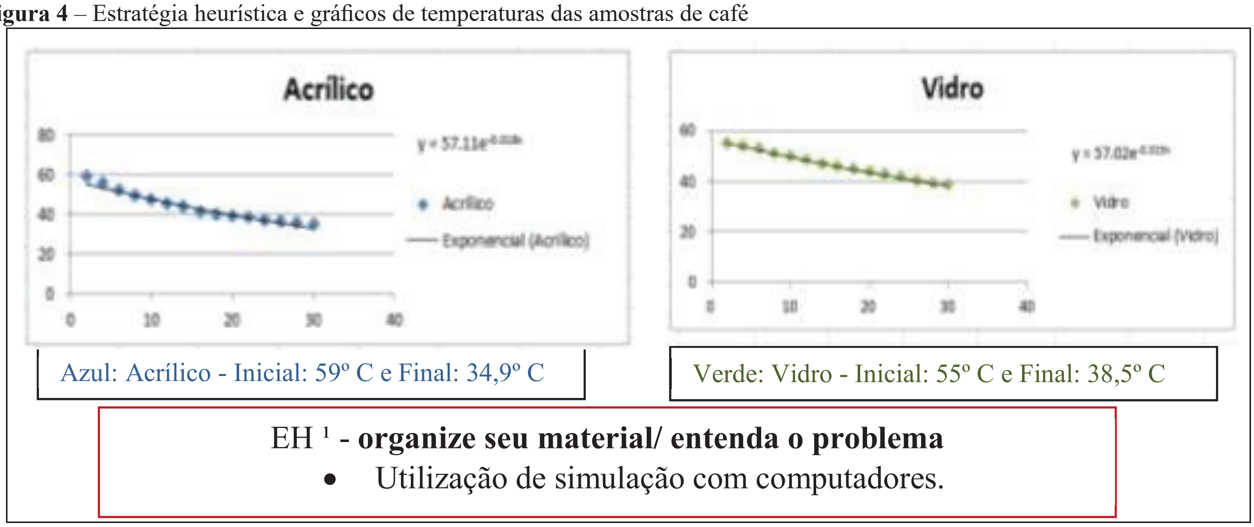
> PR: Então quais serão os passos para a coleta? Como vamos fazer? Alguém tem alguma sugestão?
> E1: Vamos colocar a mesma quantidade de água nos recipientes, a gente marca com a caneta e depois coloca o café da jarra até a marcação.
> PR: Qual é a quantidade de café que vocês vão colocar?
> [...]
> E1: É! Na verdade, só tem que cobrir a parte que mede do termômetro.
> PR: O termômetro vai tirar e colocar ou vai deixar?
> E2: Vamos deixar! Aí a gente só olha e marca a temperatura.

Após a discretização da situação, quando por meio de uma situação real não essencialmente matemática buscou-se a resolução na matemática, o grupo definiu um problema a ser estudado:

> PR: O que vocês querem investigar?
> E2: Como o café vai resfriando com o passar do tempo, dependendo do material do recipiente em que está.
> [Discussão entre grupos para definição do problema]
> E2: Podemos ver a variação da temperatura. Qual recipiente deixa o café perder mais calor com o tempo.

Assim, o grupo identificou como variável dependente a temperatura do café e o tempo, a variável independente, e por meio do *software* Excel simulou o comportamento do fenômeno conforme mostra a Figura 4. Essas ações indicaram as estratégias heurísticas enunciadas por Stender (2018) "organize seu material/entenda o problema" e "use sua memória de trabalho de forma eficaz", uma vez que ao analisarem a dispersão dos pontos inferiram que o comportamento do fenômeno é exponencial, conteúdo matemático que já haviam estudado anteriormente.

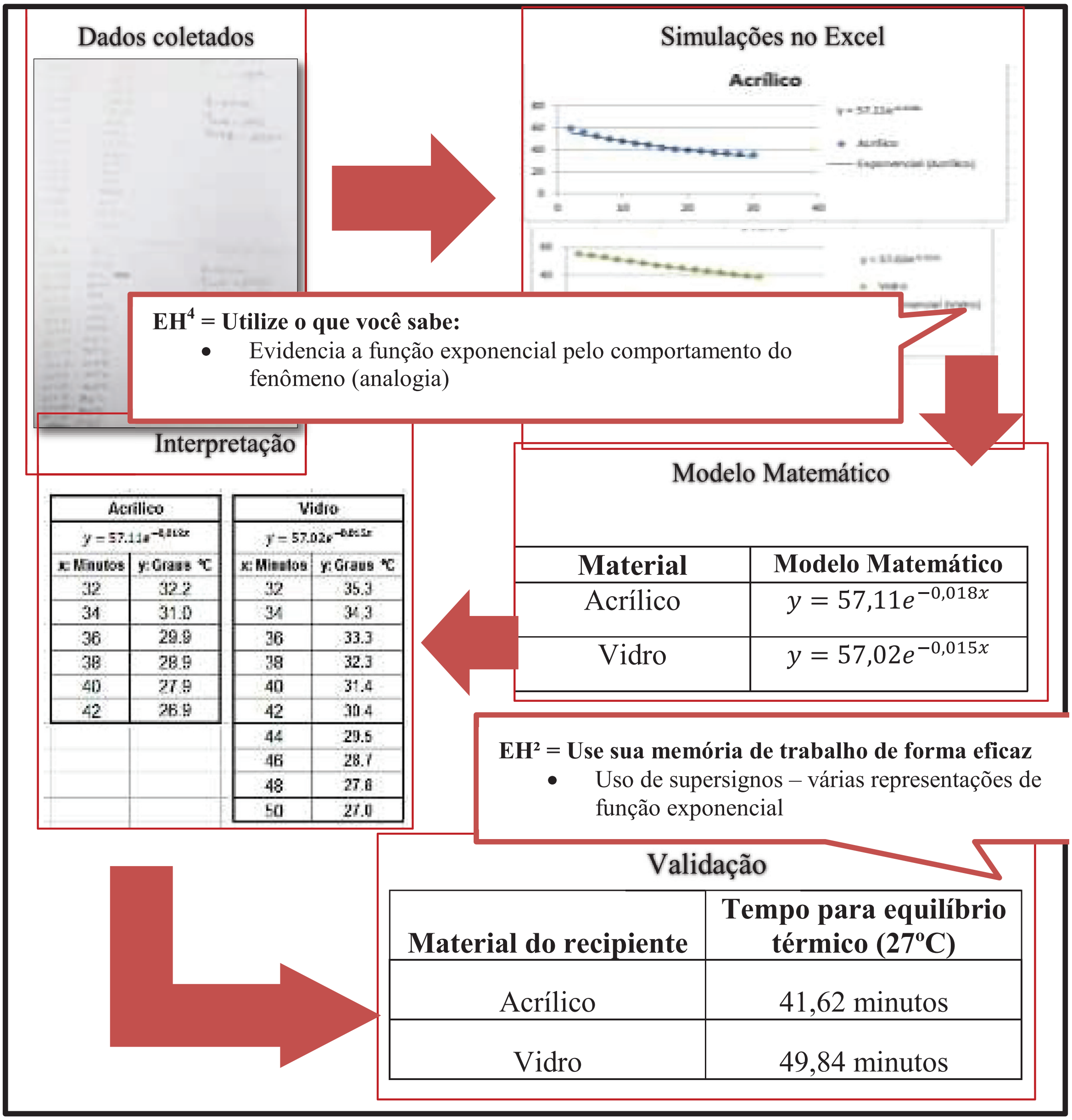
Figura 4 – Estratégia heurística e gráficos de temperaturas das amostras de café



Fonte: Dados da pesquisa.

Com o desenvolvimento da atividade foram reveladas as estratégias heurísticas "use sua memória de trabalho de forma eficaz" e "utilize o que você sabe", pois os alunos relembraram conteúdos conhecidos (função exponencial, intervalo e análise de gráficos) associando a situações-problema com a resolução (Figura 5). Isso mostrou que os alunos compreenderam que o equilíbrio térmico é representado pelo cálculo do limite para a temperatura de resfriamento do café. Esse cálculo validou o modelo que provisionou o tempo para que o café atingisse a temperatura ambiente no momento da coleta de dados – 27⁰C.

Figura 5 – Estratégias heurísticas no desenvolvimento, interpretação e validação do modelo matemático



Fonte: dados pesquisa.

Logo, as estratégias heurísticas evidenciadas nesta atividade revelaram que, além de buscarem os conteúdos matemáticos para a resolução, os alunos agiram de modo a entender a situação para essa associação e reconheceram a aplicabilidade da matemática em problemas cotidianos. Mesmo que ainda esperassem a aprovação do professor para seguir, começaram a experimentar a autonomia para planejar e decidir suas ações.

3.4 A atividade de terceiro momento: Antocianina

O tema escolhido o "estudo da antocianina", seguindo os encaminhamentos de uma Atividade Prática como Componente Curricular, em que se objetivou aproximar a teoria da prática em atividades para preparar o futuro professor para lecionar, foi de responsabilidade dos alunos e iniciou em sala de aula (Figura 6).

Figura 6 – Alunos reunidos com a pesquisadora para a escolha do tema e planejamento da atividade

Fonte: os autores.

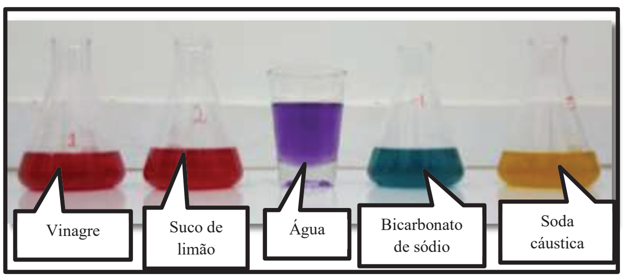
A ideia do grupo foi construir uma régua que diferencie o potencial Hidrogeniônico

, pH, da mistura pela cor, utilizando a antocianina presente no repolho roxo misturado ao vinagre, suco de limão, água, bicarbonato de sódio e soda cáustica para, então, estimar o volume necessário de mistura mais ácida da régua para neutralizar a mistura mais básica. No excerto transcrito a seguir os alunos mencionaram o encaminhamento a ser realizado:

> E1: Vamos cortar e ferver o repolho roxo. Tem outra forma de extrair, mas essa, pelas informações que coletamos, é mais eficiente. Paralelamente, iremos colocar em recipientes transparentes ácidos e bases que encontramos em casa.
> AP: Para medir o pH vocês irão utilizar o indicador de papel?
> E2: Isso, mas é mais para comprovar que o pH muda visivelmente pela coloração que a mistura fica.
> AP: Certo. Mas isso vocês já sabem que é verdade. Então, qual a situação-problema que será investigada?
> E1: A gente pensou no seguinte, professora, depois de fazer essa régua de pH, pegar os dois extremos, por exemplo pegar a mistura mais básica e colocar um pouco da mais ácida até neutralizar. E fazer o gráfico desta neutralização para descobrir qual é o volume necessário de ácido para o pH ser 7 [que indica sua neutralidade].

Para essa comprovação de pH, os alunos utilizaram indicadores de papel nas cinco misturas e criaram uma régua da mistura mais ácida até a mais básica, com alteração na coloração (Figura 7).

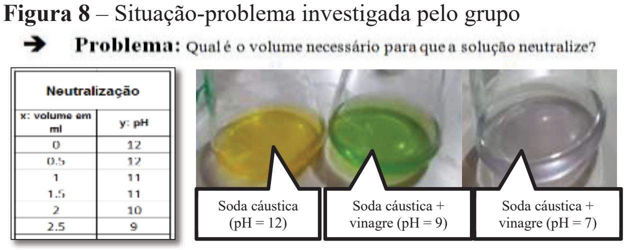
Figura 7 - Régua de coloração do pH construída pelos alunos



Fonte: Dados da pesquisa.

O problema proposto para a APCC, solicitou calcular o volume de mistura ácida necessário para neutralizar uma mistura básica. Assim, no recipiente que continha soda cáustica e a antocianina (solução de cor amarela), foi adicionada à mistura ácida de vinagre (solução de cor vermelha) até que se obtivesse uma mistura neutra (solução de cor roxa) (Figura 8).

Figura 8 – Situação-problema investigada pelo grupo



Fonte: Dados da pesquisa.

A construção do modelo matemático se deu a partir dos dados coletados e da utilização do *software Excel*, resultando em um modelo matemático representado por uma função exponencial – – no qual a variável dependente *y* representa o da mistura e a variável independente *x* representa o volume (em ml) de mistura ácida para neutralização. Considerando o na representação algébrica do modelo matemáticos deduzido, os alunos chegaram ao volume de 3,5023 ml para neutralização da mistura de soda cáustica.

Por meio de um aplicativo de rede social, utilizado para reunião dos alunos e também para contato com a pesquisadora, o grupo pediu uma orientação para a finalização da atividade de modelagem matemática, conforme transcrição:

> E1: Professora, nós conversamos [referindo-se a E1 e E2] e refletimos que quando eu fiz o técnico em Química os meus colegas apresentavam muita dificuldade em cálculos, principalmente por conta da matemática que teríamos que saber.
> E2: Aí, quando analisamos o gráfico para finalizar o relatório, reajustamos para outras funções e notamos que a função do segundo grau apresenta um R-quadrado maior.
> AP: Mas se o modelo que vocês encontraram descrevia o fenômeno, por que mudar?
> E1: É assim, professora, a APCC é um treino para a sala de aula, e o conteúdo de química seria para o primeiro ano do Ensino Médio e a função exponencial é só no fim do segundo ano... ou mais para frente eu acho.
> AP: Entendi! Seria uma alteração de modelo para melhor adequação do conteúdo a ser trabalhado.
> E2: A gente pode fazer isso? É que para explicar também é mais fácil. Até porque como o problema é o volume necessário para que a solução fique neutra, então não precisava analisar depois disso.

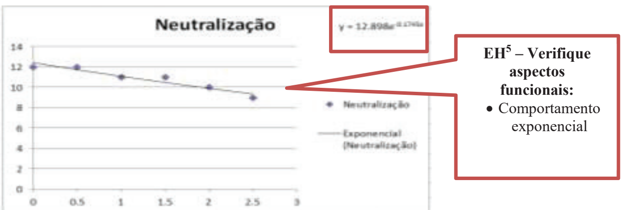
Com o "novo" modelo – em que *y* representa o pH e *x* representa o volume (em ml) –, o grupo de alunos restringiu a imagem para o intervalo de [7,12], encontrando o volume aproximado de 3,466 ml para neutralização da mistura. Para validar, lançaram mão de realizar um procedimento experimental, obtendo 3,5 ml para a neutralização.

Analisando o desenvolvimento desta atividade evidenciamos que, como o aluno E1 conheceu a antocianina como um medidor alternativo de potencial Hidrogêniônico em um curso técnico em Química, associamos seus encaminhamentos à estratégia heurística "use sua memória de trabalho de forma eficaz", uma vez que os alunos buscaram uma simetria matemática para a resolução.

Além disso, o grupo buscou informações para compreender a situação real e a associaram a um problema que poderia ser resolvido subsidiados em conteúdos de Química e Matemática já estudados. Identificamos, mais uma vez, a estratégia heurística "Use sua memória de trabalho de forma eficaz", pois observamos que houve a divisão em subproblemas: como retirar a antocianina? Como medir o pH? Quanto misturar para neutralizar? Além da escolha das variáveis investigadas, que sugeriu a utilização da estratégia heurística "verifique aspectos funcionais", pois o grupo relacionou as informações com conteúdo matemático de funções.

Assim, para resolver o problema, o grupo deduziu um modelo que correspondia ao comportamento do fenômeno, optando pela representação da função exponencial em forma de gráfico e expressão algébrica. A interpretação quanto ao comportamento da função sugeriu a estratégia heurística "utilize o que você sabe", indicando o resgate de conceitos anteriores para a resolução da situação-problema, além de ter favorecido uma tentativa de generalização quanto ao pH da mistura qualquer que fosse o volume de ácido adicionado (Figura 9).

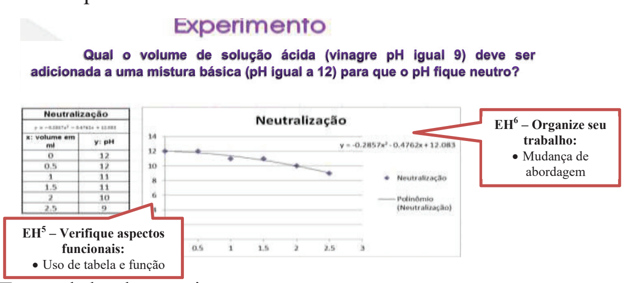
Figura 9 – Estratégia heurística para a dedução do modelo exponencial



Fonte: dados da pesquisa.

Entretanto, o grupo decidiu por alterar o modelo matemático exponencial por considerar a necessidade de adaptar a atividade para ser implementada com alunos do 1º ano do Ensino Médio, deixando evidente outra estratégia heurística "Organize seu Trabalho". Assim, evidenciamos que os alunos consideraram os conteúdos matemáticos como ferramentas de resolução desta atividade, reforçando a estratégia "organize seu material/entenda o problema" e "use sua memória de trabalho de forma eficaz" utilizando simulações computadorizadas e supersigno referente à função quadrática (Figura 10).

Figura 10 – Estratégias heurísticas na mudança de abordagem, modelo quadrático



Fonte: dados da pesquisa.

4 Algumas Considerações

Trazer contribuições das tendências da Educação Matemática têm sido empreendimento de diferentes pesquisadores e professores da área. No que compete à implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula, diferentes encaminhamentos têm se configurado. Dentre esses encaminhamentos, a presença de estratégias heurísticas enquanto dispositivo para auxiliar no desenvolvimento de atividades de modelagem em sala de aula têm sido temática, mesmo que ainda inicial, de pesquisadores.

Entender e identificar as estratégias heurísticas em atividades de modelagem subsidia o fazer modelagem e, nesse sentido, evidenciamos neste artigo como tais estratégias se fazem presentes com a familiarização dos alunos. Para isso, levando em consideração os apontamentos de Almeida et al. (2012), as temáticas estudadas nas atividades seguiram as orientações dos momentos de familiarização sendo no primeiro e no segundo momentos sugeridas e planejadas por AP e PR e no terceiro momento de escolha do grupo.

Assim, as reflexões que permearam nossa questão de investigação nos permitiram inferir que as estratégias heurísticas estão presentes nas ações dos alunos e revelam, em um primeiro momento, a falta e a busca de algoritmos "prontos" para a resolução do problema. Entretanto, com a experiência gradativa do "fazer modelagem matemática" os alunos ganham seguridade e autonomia para buscar relações com conhecimentos anteriormente estudados, realizando, de maneira gradativa, em cada momento, procedimentos mais organizados e eficientes.

As estratégias utilizadas para definir hipóteses e simplificar a situação foram fundamentais para determinar os encaminhamentos e auxiliaram as ações dos alunos no que se refere ao próximo passo. Ao terem experiência com atividades de modelagem matemática, o grupo utilizou ferramentas matemáticas distintas em cada momento, articulando conceitos, operações com o tema estudado.

Assim, ainda que as estratégias pertençam ao mesmo grupo, conforme definição de Stender (2018), têm diferentes intencionalidades, primeiramente com objetivo mais matemático de resolução do problema, passando para a aplicação do conteúdo e depois mais como forma de compreensão da situação-problema, sendo utilizadas de diferentes maneiras de acordo com a autonomia e a maior independência e responsabilidade dos modeladores na atividade: que passaram de alunos para pesquisadores e então se tornaram modeladores. Neste sentido, a investigação que realizamos subsidiou a implementação de atividades de modelagem matemática no contexto de aulas de Matemática no Ensino Superior, mais especificamente nas aulas de Cálculo Diferencial de uma variável real de um curso de Licenciatura em Química.

No Quadro 2 sintetizamos as estratégias heurísticas organizadas por Stender (2018) no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em cada um dos momentos de familiarização sugeridos por Almeida, Silva & Vertuan (2012), relacionando-as às fases de modelagem.

Quadro 2 - Relação entre Modelagem Matemática e Estratégias Heurísticas nos diferentes momentos de familiarização dos alunos

Fases da Modelagem Matemática	Estratégia Heurística		
	1º momento	2º momento	3º momento
Inteiração Matematização	"organize seu material/ entenda o problema"	"organize seu material/ entenda o problema"	"organize seu material/ entenda o problema"
	"verifique aspectos funcionais"	"verifique aspectos funcionais"	"use sua memória de trabalho de forma eficaz"

Fases da Modelagem Matemática	Estratégia Heurística		
	1º momento	2º momento	3º momento
Dedução do Modelo Interpretação de Resultados Validação	“organize seu material/ entenda o problema”	“organize seu material/ entenda o problema”	“organize seu material/ entenda o problema”
	“use sua memória de trabalho de forma eficaz”	“use a memória de trabalho de forma eficaz”	“use sua memória de trabalho de forma eficaz”
	“utilize o que sabe”	“verifique aspectos funcionais”	“utilize o que sabe”
		“utilize o que sabe”	“verifique aspectos funcionais”
			“organize seu trabalho”

Fonte: dados da pesquisa.

As estratégias heurísticas foram reveladas pelas ações dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e indicaram que a medida que a confiança e autonomia aumentaram, aumentou também o número de estratégias utilizadas para organizar e planejar a resolução do problema. Ainda, inferimos que a experiência em modelar evidenciou uma maior preocupação com a relação ao modelo matemático desenvolvido e ao problema estudado.

Referências

Almeida, L.M.W. et al. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto.

Almeida, L.M.W. & Vertuan, R. E. (2014). Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: Almeida, L.M.W. & Pessoa, K. A. (Org.). *Modelagem Matemática em foco (pp.1-19)*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Almeida, L.M.W. (2020). A Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. *Com a Palavra, o Professor*, 5(11), p. 220-236.

Araújo, J. L. & Campos, I. S. (2015). Negotiating the Use of Mathematics in a Mathematical Modelling project. In: Stillman, G. A., Blum, W. & Kaiser, G. (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education*, ICTMA 16, New York: Springer.

Bassanezi, R.C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2002.

Blum, W. (1995). Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research. In: C, Sloyer, C. *Advances and perspectives in the teaching of Mathematical modelling and Applications*, (pp.1-20). Yorklyn, DE: Water Street Mathematics.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: Cho, S. J. (Eds.) *The Proceedings of the 12th international congress on mathematical education*, Cham: Springer, p. 73-96.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Reflexionkompetenzen von studierenden beim Lehren und lernen mathematischer Modellierung*: Konzepte und Transfer, p. 3-20.

Carlson, M.A. & Wickstrom, M.H. (2016). A case for Mathematical Modeling in the Elementary School Classroom. In: *NCTM. Mathematical Modeling and Modeling Mathematics*, APME, Estados Unidos.

Cavalheiro, G. C. S. & Meneghetti, R.C.G. (2020). Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas: uma Análise das Perspectivas de Licenciados em Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 13(1), p. 64-72.

Disparati, J. A. (2015). *George Polya e Ensino de Matemática Através da Resolução de Problemas nas diretrizes Curriculares Nacionais para formação de Professores de Matemática*. (Especialização, Monografia, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo), IFSP.

Doerr, H., Ärlebäck, J. B. & Misfeldt, M. (2017). Representations of Modelling in Mathematics Education. In: Stillman, G.A. *Mathematical Modelling and Applications, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. New York, Linköping, Copenhagen: Springer, p. 71-81.

Ferreira, P. E. A. & Silva, K.A.P. (2019). Modelagem Matemática e uma Proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem. *BOLEMA*, 33(65), p. 1233-1254.

Geiger, V., Ärlebäck, J. B. & Frejd, P. (2016). *Interpreting Curricula to find: opportunities for modeling: case studies from Australia and Sweden.* Mathematical Modeling and Modeling Mathematics, p. 207-215.

Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modeling. In Stillman, G., Blum, W. & Biembengut, M. S. (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences*, ICTMA 16. Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer, p. 173-183.

Levy, L. F. (2018). O Cotidiano, o Científico e a Modelagem Matemática: Relações Complexas. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 11(2), p. 172-77.

Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modeling. In G. Stillman, W. Blum, M. S. Biembengut (Eds.), Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences ICTMA 16 (pp. 173–183). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Greefrath, G. (2015). Problem solving methods for mathematical modeling. In G. Stillman, W. Blum, M. S. Biembengut (Eds.), Mathematical modelling in education research and practice. Cultural, social and cognitive influences ICTMA 16 (pp. 173–183). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Meyer, J. F. C. A. (2020). Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade .... *Com a Palavra, o Professor*, 5(11), 140-9.

Moreira, M. A. (2011). *Metodologias de Pesquisa em Ensino*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Polya, G. (2006). *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Schroetter, S.M. et al. (2016). A escrita e o pensamento matemático no ambiente virtual utilizando a modelagem matemática: experiência de uma turma de 9ºano. *Educação Matemática Pesquisa*, 18 (1), 373-96.

Sekerák, J. (2010). Phases of mathematical modelling and competence of high school students. *The Teaching of Mathematics*, 2, 105-12.

Silva, A.C. et al. (2020). Antecipação e Encaminhamento de uma atividade de Modelagem Matemática no contexto de Aulas de Educação Financeira. *Jornal Internacional de Estudos em*

Educação Matemática, 13(1), 73-83.

Silva, K.A.P. et al. (2011). "Aprendendo" a fazer modelagem matemática: a vez do aluno. *Educação Matemática em Revista*, 1(1), 28-36.

Silva, K.A.P. (2017). Tarefas que emergem em atividades de modelagem matemática em um ambiente educacional de cálculo diferencial e integral. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 10(1), 23-40.

Silva, R.S. et al. (2016). Modelagem matemática e tecnologias digitais: uma aprendizagem baseada na ação. *Educação Matemática Pesquisa*, 18 (1), 421-446.

Stender, P. & Kaiser, G. (2017). The use of heuristic strategies in modeling activities. In Dooley, T. & Gueudet, G. (Ed.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Dublin, Ireland.

Stender, P. (2018). The use of heuristic strategies in modelling activities. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education,* 50(1-2), p. 315-326.

Stender, P. (2019). Heuristic Strategies as a Toolbox in Complex Modeling Problems. In Stillman, G. & Brown, J. (Eds.). *Lines of Inquiry in Mathematical Modeling Research in Education*.

Stillman, G., Brown, J. & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. In: Lesh, R., Galbraith, P. L., Haines, C. R. & Hurford, A. *Modeling students' mathematical modeling competencies*. New York: Springer, p. 385-398.

Stillman, G. A., Brown, R. J. P. & Geiger, V. (2015). Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School. In Stillman, G., Blum, W. & Kaiser, G. (Eds.). *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences*. Switzerland: Springer, p. 93-104.

Stillman, G. A. (2017). Enabling Anticipation Through Visualisation in Mathematising Real-World Problems in a Flipped Classroom. In: G.A., Stillman, et al. *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* ICTMA 16. New York: Springer.