MUNDO FORMAL: DECISIVO NO APRENDIZADO DE NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

Rosana Nogueira de Lima [1]
Universidade Anhanguera de São Paulo
Paulo César Freire[2]
Faculdade da Aldeia de Carapicuíba

RESUMO

Neste artigo, apresentamos um estudo sobre números racionais na forma fracionária, no qual analisamos respostas de 41 alunos de 6º ano a questões envolvendo subconstrutos, especificamente buscando como eles lidam com características formais desses números para resolver as situações dadas. Os dados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, e os resultados evidenciam que esses alunos não empregam características formais relacionadas com o subconstruto parte-todo, que também pode ter contribuído com as dificuldades deles de lidar com outros subconstrutos.

Palavras-chave: número racional na forma fracionária, subconstrutos, Três Mundos da Matemática, mundo formal.

ABSTRACT

In this paper, we present a study regarding rational numbers in fraction form, in which we analyse responses from 41 6th graders to questions involving subconstructs, specifically looking for how they deal with its formal characteristics to solve the given situations. Data were analysed using the theoretical framework of Three Worlds of Mathematics, and results show that students do not employ formal characteristics related to the part-whole subconstruct, which may also have contributed to their difficulties in dealing with other subconstructs.

[1] rosananlima@gmail.com
[2] profpaulocf@gmail.com

Keywords: rational number in fraction form, subconstructs, Three Worlds of Mathematics, formal world.

INTRODUÇÃO

Pesquisas em Educação Matemática relacionadas a números racionais na forma fracionária há muito tempo enfatizam a necessidade de discutir o ensino e a aprendizagem desses números pela análise de suas diferentes facetas. Estas facetas foram nomeadas subconstrutos (por exemplo, BEHR, RICHARD, et al., 1983). No Brasil, muitas pesquisas sobre concepções de números racionais na forma fracionária de alunos de várias idades, e até mesmo de professores, foram realizadas. Usando a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud para analisar dados, Moutinho (2005), Garcia Silva (2007) e Ferreira da Silva (2005), entre outros, evidenciaram que esses diferentes grupos tem grandes dificuldades em lidar com esses números.

Resultados similares foram obtidos em outros países. Ao relatar resultados obtidos em Chipre, Charalambous e Pitta-Pantazi (2005) argumentaram que alunos e professores têm mais familiaridade com o subconstruto parte-todo, e têm grandes dificuldades com o subconstruto medida. Até mesmo abordagens com o parte-todo, aparentemente a maneira mais fácil de lidar com números racionais na forma fracionária, têm aspectos problemáticos próprios, já que, de acordo com Naik e Subramaniam (2008), alunos nem sempre percebem que, de acordo com a definição do próprio subconstruto, uma figura deve estar dividida em partes de mesma área, isto é, figuras equivalentes, e este é um elemento importante e problemático.

À luz desses resultados, nos engajamos em uma pesquisa com o objetivo de analisar quais mudanças de raciocínio alunos de 6º ano apresentam depois de estudarem números racionais na forma fracionária nesse ano escolar, já que, no Brasil, é no 6º ano do Ensino Fundamental que esses números são apresentados de uma maneira mais aprofundada, depois de serem informalmente introduzidos no 5º ano. Durante nossa pesquisa, percebemos uma necessidade de considerar outra teoria para analisar os dados, em busca de melhor compreender as dificuldades com números racionais na forma fracionária previamente levantadas. Essa necessidade surgiu de nossos desejos de trazer como resultado mais do que os subconstrutos com os quais professores e alunos de níveis diversos de escolaridade têm dificuldades ou as estratégias de resolução de algumas situações envolvendo subconstrutos, como em Merlini (2005), mas quais possíveis raízes para essas dificuldades. Para isso, escolhemos o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013), que afirma que existem pelo menos três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo em Matemática que habitam três diferentes mundos da Matemática: o mundo conceitual corporificado, o mundo operacional simbólico e o mundo formal axiomático.

Com este quadro teórico, além de diferentes facetas dos números racionais na forma fracionária, também foi possível considerar diferentes características presentes em cada uma dessas facetas no que diz respeito a corporificações, simbolismos e formalismos. Dessa forma, nos foi possível conjecturar que a raiz dos problemas de dividir a figura em partes equivalentes, uma característica do subconstruto parte-todo, está na necessidade de entender características do mundo formal subjacentes a ele; ideias de relacionar intervalos da reta numérica a unidades de medida, característica essencial ao entendimento do subconstruto medida, também habitam o mundo formal (FREIRE, 2011).

Nossa pesquisa também abriu portas para analisarmos a influência do subconstruto parte-todo nos outros subconstrutos, como levantado por Behr, Richard, et al. (1983), e a percepção dessa influência foi possível graças ao entendimento das similaridades entre as características corporificadas, simbólicas e formais presentes no subconstruto parte-todo e aquelas nos outros subconstrutos (FREIRE e LIMA, 2012).

Tendo em mente a diversidade de contribuições que o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática nos proporcionou, consideramos continuar as discussões levantas em nossa pesquisa, e nos perguntamos quais outras dificuldades com subconstrutos de números racionais na forma fracionária poderiam ser resultado da falta de entendimento de ideias presentes no mundo formal.

Para nosso estudo, elaboramos um questionário composto por 13 questões, considerando seis subconstrutos, bem como os Três Mundos da Matemática (TALL, 2013). Aplicamos este questionário a 41 alunos de 6º ano antes e depois que eles foram introduzidos a números racionais na forma fracionária nesse ano. Nossas análises dos dados coletados sugerem que a principal razão para as dificuldades dos alunos com esses subconstrutos foi a falta de uso ou de entendimento de características do mundo formal. Neste artigo, então, objetivamos considerar como o mundo formal pode ser um fator decisivo para o aprendizado de números racionais na forma fracionária.

QUADRO TEÓRICO

Para elaborar nosso questionário, usamos duas bases teóricas. Primeiro, consideramos várias classificações de números racionais na forma fracionária em subconstrutos. Entendemos que cada subconstruto enfatizaria diferentes aspectos de cada mundo matemático, então, depois de analisar algumas categorizações, decidimos elaborar questões usando os subconstrutos *parte-todo*, *quociente*, *operador*, *medida*, e *razão* (BEHR, RICHARD, *et al.*, 1983). Além disso, analisamos o uso do subconstruto *probabilidade* em Romanatto (1997), e decidimos que, já que ele tem algumas características diferentes daquelas do subconstruto *razão*, valeria a pena inclui-lo no estudo.

A segunda base teórica que usamos foi o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013). Tall (2013) propõe que existem pelo menos três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo em Matemática, e que entender diferentes conceitos envolve conectar essas diferentes formas. Nossa crença é a de que os alunos em nossa pesquisa, bem como aqueles que participaram dos estudos previamente citados, podem ter aprendido números racionais na forma fracionária de alguma forma em que essas conexões ficaram perdidas ou sem sentido para os sujeitos. Para Tall (2013), os três diferentes tipos de desenvolvimento cognitivo em Matemática são parte de três diferentes mundos da Matemática, o mundo *conceitual corporificado*, o mundo *operacional simbólico* e o mundo *formal axiomático*.

O mundo *conceitual corporificado* é o mundo das percepções. Nesse mundo, um indivíduo observa um objeto e suas propriedades para dar sentido a elas e para ser capaz de descrevê-lo verbalmente.

Podemos exemplificar características do mundo corporificado nos números racionais na forma fracionária com a divisão de uma figura geométrica plana em partes de mesma área.

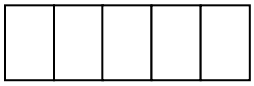

Figura 1: Figura geométrica plana dividida em partes de mesma área

Com isso, o indivíduo poderá perceber que o número racional na forma fracionária se refere a divisões em partes iguais, e, posteriormente se destacarmos uma ou mais partes, a figura poderá ser representada, como no exemplo da Figura 2, e o indivíduo, perceber e aprender o conceito da representação desse número.

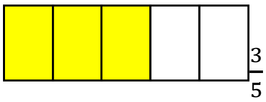

Figura 2: Figura geométrica plana dividida em partes de mesma área e tendo três partes pintadas

O mundo *operacional simbólico* (previamente chamado de *proceitual simbólico*, como por exemplo em TALL, 2004) é o mundo em que usamos símbolos para representar entidades matemáticas, e agimos sobre elas para efetuar procedimentos. Esses símbolos podem ser vistos flexivelmente tanto como o próprio procedimento quanto como o resultado desse procedimento, que é o conceito, e eles compõem a dualidade de um proceito[3] (GRAY e TALL, 1994).

Uma característica do mundo simbólico no conceito dos números racionais na forma fracionária é a própria forma $\frac{a}{b}$, sendo “a” a quantidade de partes destacadas de um objeto ou de um conjunto de objetos, e “b” o número total de partes em que o objeto foi dividido ou a quantidade total de objetos no conjunto. Outro exemplo são as operações envolvendo tais números. Com o uso de símbolos, conseguimos efetuar operações matemáticas como $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}-\frac{5}{8}$, entre outras.

O mundo *formal axiomático*, no qual axiomas, propriedades, definições e teoremas são usados para construir o corpo axiomático da Matemática.

Podemos citar como exemplo de características formais para os números racionais na forma fracionária a própria definição apresentada aos alunos ainda no

[3] De acordo com Gray e Tall (1994), símbolos em Matemática são “proceitos” quando eles carregam consigo a possibilidade de serem vistos tanto como o procedimento, quanto como o conceito que eles representam. Um indivíduo tem pensamento “proceitual” quando tem a habilidade de trabalhar com símbolos flexivelmente como processo ou objeto.

ensino fundamental, $\mathrm{Q} = \left\{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} \mid \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{Z} \text{ e } \mathrm{b} \neq 0\right\}$. Traços do mundo formal também aparecem quando é apresentado ao aluno qualquer um dos subconstrutos. Essas características emergem, por exemplo nas situações em que há a generalização, tal como, na apresentação da escrita da forma $\frac{a}{b}$, e a generalização, que “a” representa o número de partes destacadas e “b” o número em que o todo foi particionado.

Neste artigo, nos referimos a esses mundos como o mundo *corporificado*, o mundo *simbólico* e o mundo *formal*.

PESQUISAS SOBRE NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

Merlini (2005) buscou fazer um diagnóstico das diferentes estratégias de resolução adotadas por alunos de 6º e 7º ano para resolver situações envolvendo significados de números racionais na forma fracionária como *número*, *parte-todo*, *medida*, *operador multiplicativo* e *quociente* (NUNES, DESLI e BELL, 2003). Para isso, aplicou um questionário a 60 alunos de cada um desses anos, de duas escolas da rede pública estadual de São Paulo, e fez entrevistas com alguns deles. Com os dados obtidos, a pesquisadora evidenciou que situações que envolviam o significado *número* foram as que trouxeram maior dificuldade para aqueles alunos, enquanto as situações sobre *parte-todo* foram as mais fáceis. Acreditamos que tais resultados são devidos, respectivamente, à grande ênfase que parece ser dada ao subconstruto *parte-todo* no ensino, e às sofisticadas características formais presentes no subconstruto *medida*. Considerando que as características corporificadas, simbólicas e formais presentes no subconstruto *medida* não estão em sua totalidade presentes nas características do subconstruto *parte-todo*, pode-se conjecturar que o ensino do primeiro não cobre todas as características do segundo.

No que se refere às estratégias utilizadas, Merlini (2005) destaca que os sujeitos de pesquisa relacionaram partes pintadas e partes brancas, desconsiderando o todo, isto é, usaram características corporificadas deixando de lado as formais; inverteram numerador e denominador; e desprezaram a necessidade de dividir uma figura em partes de mesma área (novamente características formais), entre outras estratégias usadas. Não houve, por parte dos alunos, uma regularidade de uso de estratégias para cada significado, várias delas podendo ser usadas para o mesmo significado, ou uma delas para mais de um significado. Tais mudanças de estratégia também podem estar ligadas ao mundo formal. Se os sujeitos dessa pesquisa não fizeram relação entre as ideias corporificadas ou simbólicas que estão usando com princípios formais necessários para o trabalho com números racionais na forma fracionária, então não perceberam uma qualidade específica de um procedimento que seja necessário para este ou aquele subconstruto.

Já Naik e Subramaniam (2008) trabalharam os subconstrutos *medida* e *quociente* com cinco alunos de 11 anos que já haviam estudado o subconstruto *parte-todo* em aulas de Matemática na Índia. Para os autores, a falta de entendimento de que um todo deve ser dividido em partes de mesma área se deve à falta de ênfase na ideia de unidade. Naik e Subramaniam (2008) afirmam que os alunos trabalharam com números inteiros, com a contagem de partes, e ignoraram o tamanho das partes em que o todo foi dividido, isto é, uma "fração unidade". Eles também consideram essa ideia essencial para o estudo do subconstruto *medida*, e é nesta ideia que eles se baseiam para desenvolver a intervenção. Dessa forma, os alunos passaram a perceber, por exemplo, que $\frac{5}{4}$ é o mesmo que cinco partes de $\frac{1}{4}$ (a fração unidade), e foram capazes de comparar números racionais na forma fracionária a partir dessas unidades, mas também comparando, por exemplo, a quantidade de crianças que dividiram um bolo ($\frac{1}{5}$ é maior do que $\frac{1}{7}$ porque o bolo foi dividido entre cinco crianças, então o pedaço é maior do que aquele do bolo dividido entre sete crianças).

As ideias presentes na abordagem desenvolvida por esses autores se baseiam em características do mundo formal, ao determinar uma fração unidade para comparação, para que seja garantida a divisão do todo em partes de mesma área. Por outro lado, os alunos relacionaram essa característica formal com ideias do mundo corporificado, ao decidir que número é maior pensando no tamanho da fatia de bolo que cada criança obteve. Estas conexões entre mundos são essenciais para que se possa ter um entendimento cada vez mais sofisticado de números racionais na forma fracionária.

Conexões como essas também podem ser vistas na pesquisa de Cortina, Visnovska e Zuniga (2012), que trabalharam com 16 estudantes mexicanos com idades entre 8 e 9 anos utilizando ideias de Freudenthal (1983, apud CORTINA, VISNOVSKA e ZUNIGA, 2012) de números racionais na forma fracionária como "fraturadores" e "comparadores"[4]. De acordo com os autores, ideias relacionadas a esses números desenvolvidas ao se trabalhar com partição e partilha de bolo (por exemplo) não colaboram com o desenvolvimento de características mais sofisticadas desses números. Esse tipo de trabalho pode trazer dificuldades com quantidades maiores que 1 e relação entre grandezas diferentes. A abordagem deles pareceu surtir efeitos, mas necessita de mais pesquisas.

Charalambous e Pitta-Pantazi (2005) tiveram por objetivo compreender as construções do conceito de números racionais na forma fracionária por 340 alunos de 5ª série e 306 alunos de 6ª séries em Chipre. Foram aplicadas 50 questões, divididas de acordo com a classificação de números racionais na forma fracionária elaborada por Behr, Richard, *et al.*,(1983), e as operações de equivalência, multiplicação e adição. O estudo mostrou que o desempenho dos alunos foi melhor nas questões relacionadas ao subconstruto *parte-todo* e menor nas do subconstruto *medida*. Estes resultados também foram encontrados em pesquisas brasileiras, tais como Merlini (2005), Garcia Silva (2007) e Moutinho (2005). Dados coletados com essas pesquisas foram analisados por meio da Teoria de Campos Conceituais de Vergnaud (1993 apud MERLINI, 2005), e, apesar de trazerem contribuições importantes para o estudo desse conteúdo, não possibilitaram percepções sobre razões para as dificuldades de professores e alunos com números racionais que elas próprias apontaram. Nosso intuito ao trazer um novo quadro teórico para essa pesquisa foi exatamente o de obter novos insights para a pesquisa. Dessa forma, fundamentamos nossas análises no quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (TALL, 2013) e nos subconstrutos apontados por Behr, Richard, *et al.* (1983).

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

[4] Em inglês, "fracturers" e "comparers"

Para analisar as diferenças no raciocínio de alunos de 6º ano ao lidarem com números racionais na forma fracionária, antes e depois de eles terem estudado esse conteúdo da forma sistemática apresentada no currículo do 6º ano, elaboramos um questionário considerando os subconstrutos *parte-todo*, *quociente*, *operador*, *medida*, *razão* (BEHR, RICHARD, *et al.*, 1983) e *probabilidade* (ROMANATTO, 1997). Quatro das questões foram extraídas de um livro didático Projeto Buriti (2007), uma delas foi inspirada em Moutinho (2005), e criamos as outras inspirados em nosso quadro teórico e nos subconstrutos com os quais queríamos trabalhar. No fim, tínhamos quatro questões de *parte-todo* (Questões 1, 3, 12 e 13), duas questões de *quociente* (Questões 2 e 10), duas de *operador* (Questões 6 e 8), duas de *medida* (Questões 7 e 9) e duas de *razão* (Questões 4 e 11), e uma questão de *probabilidade* (Questão 5).

Administramos este questionário duas vezes ao mesmo grupo de 41 alunos, quando eles estavam no 6º ano: uma no começo do ano escolar, antes de eles terem sido formalmente introduzidos a números racionais na forma fracionária; e depois na segunda metade do ano escolar, quando eles já haviam estudado esse conteúdo com o professor de Matemática do 6º ano. Esses 41 alunos estudavam na mesma escola pública na zona sul de São Paulo, e estavam divididos em duas classes de 6º ano, não sendo o mesmo professor de Matemática nas duas classes. Eles não representam o total dos alunos de ambas as classes, mas aqueles cujos pais permitiram a participação na pesquisa assinando o termo de consentimento livre e esclarecido.

Depois de uma análise inicial dos dados e categorização das respostas dos alunos, convidamos seis deles para entrevistas, de forma a melhor entender os processos de raciocínio que eles adotaram à medida que tentavam resolver as questões propostas. Essas entrevistas foram conduzidas por um dos autores na presença de um observador, e áudio-gravadas para análises posteriores. O observador tinha a função de apenas fazer anotações da conversa, e gerenciar a gravação, sem interferir diretamente no que ocorria durante a entrevista.

Nós também entrevistamos os professores de ambas as classes, buscando saber se eles discutiram questões similares àquelas incluídas no questionário com esses alunos durante as aulas envolvendo números racionais na forma fracionária. É importante mencionar que os professores apenas tiveram contato com nossas questões depois que ambas as coletas de dados foram realizadas, pois não pretendíamos avaliar a abordagem de ensino empregada por eles nem influenciar as aulas deles, mas observar as mudanças de raciocínio desenvolvidas pelos próprios alunos ao estudarem esses números.

Buscando em nossos dados indícios de *como o mundo formal pode ser um fator decisivo para o aprendizado de números racionais na forma fracionária*, limitamos nossa atenção para as respostas dos alunos a seis questões, 1, 2, 9, 11, 12 e 13, considerando que a análise de dados mostrou que estas são as questões das quais emergiram mais características formais. Resultados relacionados a todas as questões e outras discussões sobre subconstrutos específicos podem ser encontrados em outros artigos (por exemplo FREIRE, 2011; LIMA, FREIRE e SOUZA, 2012 e FREIRE e LIMA, 2012).

Na Questão 1 (Figura 3), apresentamos quatro figuras geométricas, cada uma dividida em partes equivalentes com algumas partes coloridas. A tarefa dos alunos era escrever o número racional na forma fracionária correspondente. Essa questão envolvia o subconstruto *parte-todo*.

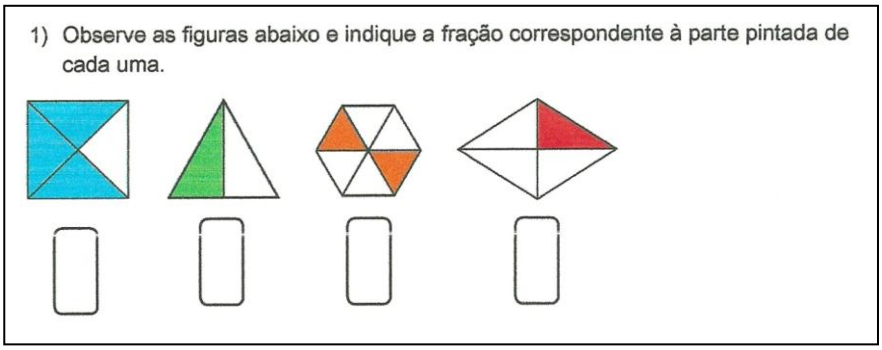

Figura 3: Questão 1 do questionário envolvendo subconstruto parte-todo

A Questão 2 (Figura 4) envolve o subconstruto quociente. Ela envolve uma situação em que os alunos deveriam calcular quanto de cada uma das cinco barras de chocolate “Pedro” deveria dar a cada um de seus quatro amigos.

2) Pedro dividiu igualmente cinco barras de chocolate entre quatro amigos. Quanto de chocolate cada amigo de Pedro recebeu?

Figura 4: Questão 2 do questionário envolvendo subconstruto quociente

Na Questão 9 (Figura 5), apresentamos uma reta numérica, com números inteiros de 0 a 5, e pedimos aos alunos para posicionarem $\frac{1}{3}$ e $\frac{5}{4}$ nela, uma situação de *medida*.

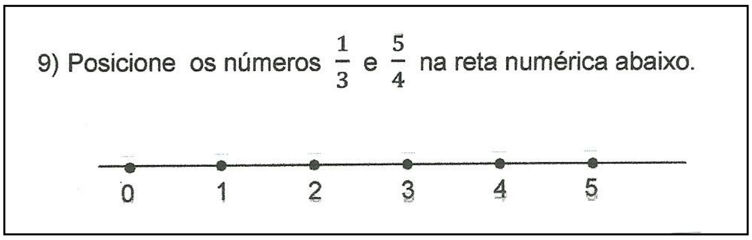

Figura 5: Questão 9 do questionário envolvendo o subconstruto medida

Para resolver a Questão 11 (Figura 6), os alunos deveriam comparar três sentenças relacionadas ao número de meninos e meninas em uma sala de aula, e decidir quais estavam afirmando a mesma coisa, o que envolve o subconstruto *razão*.

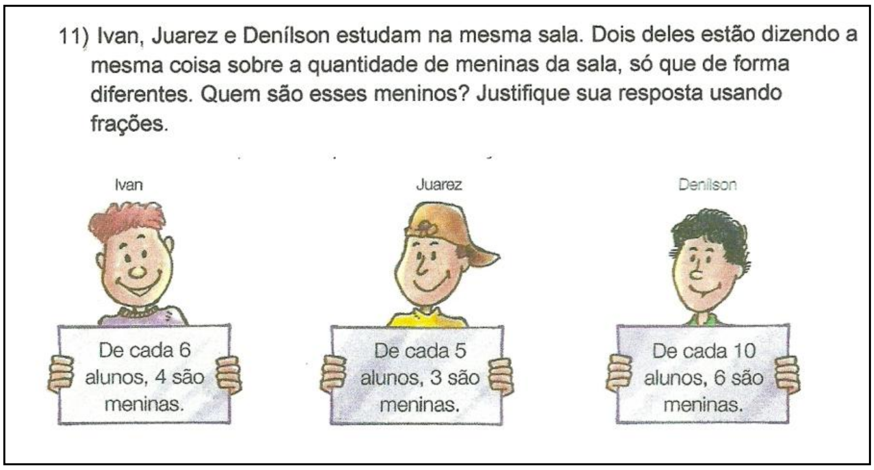

Figura 6: Questão 11 do questionário envolvendo o subconstruto razão

Na Questão 12 (Figura 7), outra questão enfatizando o subconstruto *parte-todo*, havia dois círculos com partes coloridas, e os alunos deveriam desenhar outro círculo no qual a parte colorida representasse a soma das partes coloridas dos círculos dados.

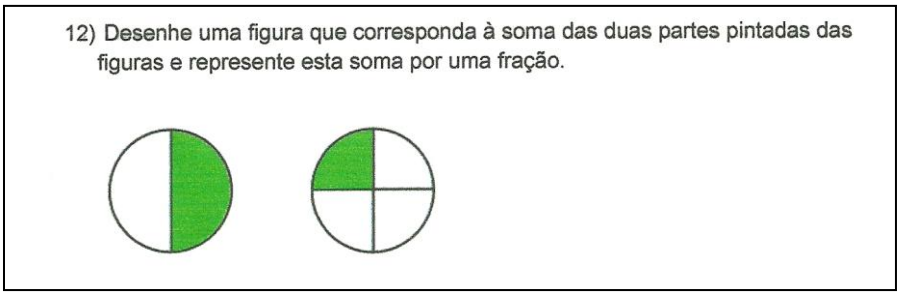

Figura 7: Questão 12 do questionário envolvendo o subconstruto parte-todo

Finalmente, na Questão 13 (Figura 8) apresentávamos um quadrado dividido em partes não equivalentes, com uma parte colorida, e os alunos deveriam decidir qual número racional na forma fracionária representaria tal parte. Novamente, esta questão foi incluída no questionário tendo em mente o subconstruto *parte-todo*.

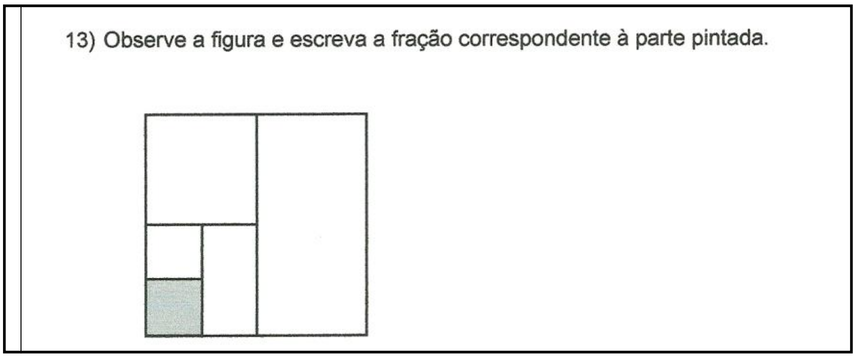

Figura 8: Questão 13 do questionário envolvendo o subconstruto parte-todo

Tendo descrito as questões, nos é possível mostrar como vemos a relação entre os Três Mundos da Matemática e números racionais na forma fracionária e seus subconstrutos, apesar de ser importante enfatizar que essas são as características de cada mundo que pretendíamos para cada questão, mas os alunos poderiam resolvê-las usando características diferentes daquelas por nós levantadas.

Com a Questão 1, nossa intenção foi levantar características do mundo corporificado por causa da necessidade de visualizar as figuras para perceber que elas estão divididas em partes equivalentes, para analisar em quantas partes a figura foi dividida e quantas estavam coloridas. Neste nível de escolaridade, entendemos que a percepção de que as partes em que a figura foi dividida são equivalentes é feita apenas visualmente, considerando que esses alunos podem não ter tido contato com Geometria o suficiente para perceber características formais que garantam essa divisão. Estas características corporificadas podem ser relacionadas com o mundo simbólico quando se representa a figura com um número racional na forma fracionária. Saber que o número de partes em que a figura foi dividida é o denominador e o número de partes coloridas é o numerador, entretanto, é uma convenção, parte do mundo formal.

Nosso intuito com a Questão 2 foi verificar se esses alunos utilizariam características simbólicas, e fariam a divisão de 5 por 4, ou se usariam algum tipo de diagrama ou desenho para perceber o resultado dessa divisão, caracterizando, assim, a resolução como corporificada.

Com a Questão 9, pretendíamos levantar características formais relacionadas à localização de números racionais na forma fracionária na reta numérica, sendo a unidade o todo, e esse número uma parte desse todo, caracterizando uma *medida*.

Na Questão 12, nossa intenção foi motivar o uso de características corporificadas, com soluções envolvendo a adição de diferentes partes de um círculo em outro círculo, e descobrindo qual fração do círculo o resultado seria – uma representação corporificada para a adição. Esta questão também envolve a ideia de que a adição deve ser efetuada com elementos de mesma natureza, uma característica formal dessa operação, o que implica que é necessário relacionar as partes pintadas de cada círculo, e isso, no mundo simbólico, está relacionado a buscar frações equivalentes.

A Questão 13 foi elaborada para levantar características formais. Para resolver a questão de maneira bem-sucedida, é necessário saber qual fração do quadrado o quadradinho colorido representa. Novamente, isso envolve saber que o todo deve ser dividido em partes equivalentes, o que é uma característica do mundo formal, dado que faz parte da definição de números racionais, e representá-la com um número é uma característica simbólica.

Tendo estas características em mente, encaminhamos a análise dos dados.

RESULTADOS E ANÁLISE

Considerando todas as questões do questionário, em geral, a maioria dos alunos utilizaram características associadas ao mundo corporificado na primeira coleta de dados, usando as figuras dadas para contar partes, comparar quantidades, ou fazer divisões, por exemplo. Na segunda coleta de dados, notamos uma tendência entre esses alunos de tentar empregar métodos de resolução com características do mundo simbólico, fazendo divisões com uso de algoritmos ao invés de usar figuras, e adicionando números ao invés de observar partes coloridas em figuras para obter resultados. Este resultado era esperado considerando que o currículo sugere manipulação de material concreto para alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental, e uma abordagem em que se faça uma relação mais aprofundada entre o que entendemos ser características dos mundos corporificado e simbólico para alunos de anos finais desse mesmo nível. O que foi menos encontrado nas resoluções apresentadas foram características do mundo formal.

Para apresentar os dados, iniciamos com as questões que envolvem o subconstruto *parte-todo*. Em relação à primeira questão, foi possível ver uma melhora nas respostas na segunda coleta de dados, se comparado com a primeira, com 11 alunos apresentando respostas corretas para a Questão 1 na primeira coleta e 21 na segunda. Entre as respostas incorretas, estavam inversão entre numerador e denominador, ou uso de partes coloridas e partes brancas ao invés de número de partes em que a figura foi dividida, como apresentado na Figura 9. Nessa figura e em outras questões, observamos também que o menor dos números aparece com frequência no numerador.

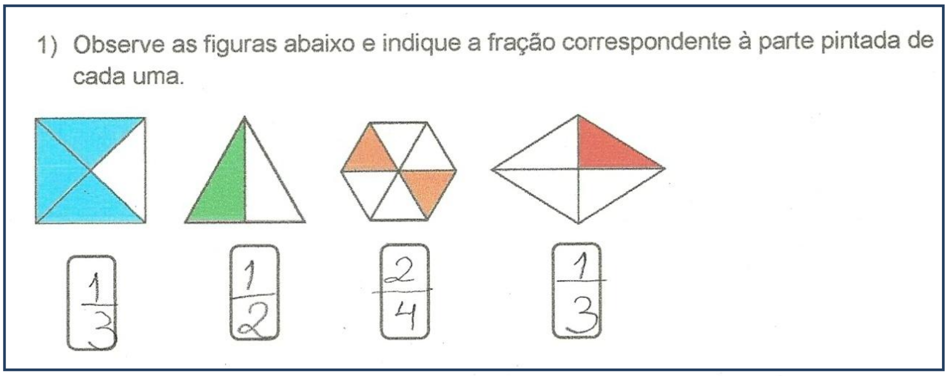

Figura 9: Resposta para Questão 1 considerando partes pintadas e brancas

As respostas indicam que os alunos usaram características corporificadas para identificar um número racional na forma fracionária, por meio da contagem de partes pintadas e brancas na figura. Mesmo quando contam corretamente partes pintadas e partes em que a figura foi dividida, a alguns deles falta entendimento formal de como escrever a representação simbólica do número racional na forma fracionária associado, trocando numerador com denominador. Ao apresentar partes pintadas e brancas como numerador e denominador, eles não estão usando a ideia formal central do subconstruto *parte-todo*, de que um número racional na forma fracionária representa partes de um todo. Respostas desses tipos também foram obtidas por Merlini (2005), ao buscar estratégias de resolução de situações envolvendo esse subconstruto, por alunos da mesma faixa etária.

Para a Questão 12, também uma questão de *parte-todo*, tivemos 11 respostas corretas na primeira coleta e 12 na segunda. Respostas corretas foram similares ao que é apresentado na Figura 10. Alguns alunos apresentaram tanto a figura quanto o cálculo, outros apresentaram apenas o cálculo ou apenas a figura de um círculo com três quartos pintados. Eles usaram ambos os mundos corporificado e simbólico, ao apresentar ambas as soluções, como na Figura 10, e ao apresentar somente cálculos com símbolos, já que eles tinham que interpretar a figura para decidir qual número racional na forma fracionária adicionar. Eles usaram apenas o mundo corporificado quando desenharam a figura resultante sem usar números para representá-la.

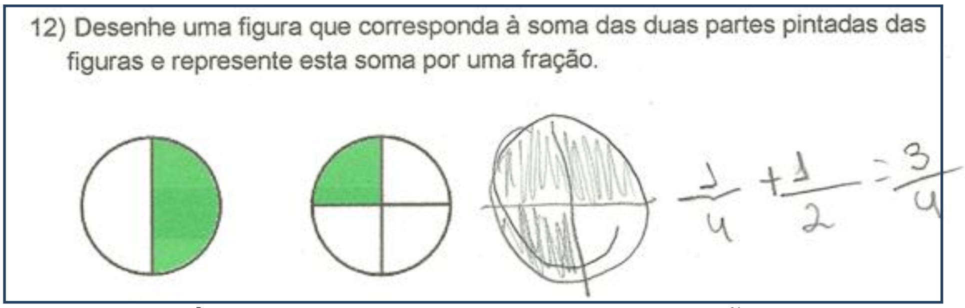

Figura 10: Resposta correta para a Questão 12

Outras respostas envolveram desenhar um círculo dividido em quatro, seis ou oito partes, e pintar duas delas, ou simplesmente representar cada figura dada com um número racional na forma fracionária (correto ou incorreto), sem nenhuma tentativa de adicioná-los. Tais respostas mostram que alguns desses alunos não entenderam a necessidade de comparar partes pintadas com a mesma “unidade” e usar números racionais na forma fracionária equivalentes para calcular a soma. Isto também está relacionado com características formais, de perceber a necessidade de comparar partes de mesma área, e também com a discussão de Naik e Subramaniam (2008) da divisão problemática de uma figura em partes equivalentes, como apresentado nas respostas dos alunos para a Questão 13, que também foi criada para discutir o subconstruto *parte-todo*, mas nosso principal propósito com ela foi entender como os alunos lidariam com uma figura que não foi dividida em partes equivalentes, uma característica do mundo formal.

Apenas quatro alunos deram resposta correta para esta questão, todos eles na segunda coleta de dados (nenhum aluno respondeu esta questão corretamente na primeira coleta). Eles mostram que a figura poderia ser dividida em 16 quadrados menores de mesma área e apenas um deles foi pintado. Outras respostas envolveram contar partes da figura, desconsiderando a área de cada parte, e decidir onde colocar os números, se no denominador ou no numerador. Na Figura 11, apresentamos a solução de um aluno que contou em quantas partes a figura foi dividida para representar o denominador, e quantas partes estavam pintadas, para o numerador.

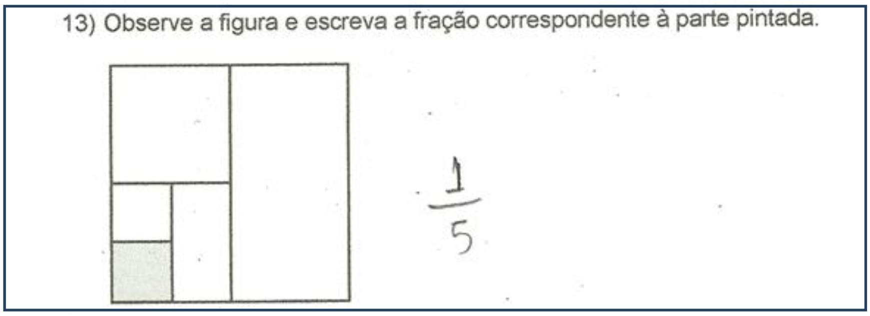

Figura 11: Resposta para a Questão 13, na qual um aluno contou as partes da figura

Na Questão 1, a dupla contagem de partes (contar em quantas partes a figura foi dividida e contar quantas dessas partes estavam pintadas) foi suficiente para um aluno ser bem-sucedido em respondê-la. Na Questão 13, mais do que a dupla contagem, os alunos precisavam saber características do mundo formal, especificamente que as partes em que a figura foi dividida devem ser equivalentes. Na falta dessa característica, relações entre os mundos corporificado e formal ficam comprometidas, resultando, também, em problemas com a representação, uma característica simbólica. É nosso entendimento que esta diferença entre as questões foi fundamental para a diferença entre quantidade de acertos em uma e em outra questão, enfatizando o fator decisivo do mundo formal no entendimento do subconstruto *parte-todo*.

A Questão 2 envolve o subconstruto quociente, e foi respondida corretamente por três alunos, tanto na primeira quanto na segunda coleta. Outras respostas para esta questão envolveram distribuir um chocolate para cada amigo de Pedro, e mais “um pedaço” ou “uma metade”. Aparentemente, esses alunos não sabiam como analisar quanto da última barra de chocolate deveria ser distribuído para cada um dos quatro amigos de Pedro. Enfatizamos as respostas de um aluno, que, na primeira coleta respondeu como apresentado na Figura 12, e na segunda coleta, a resposta da Figura 13.

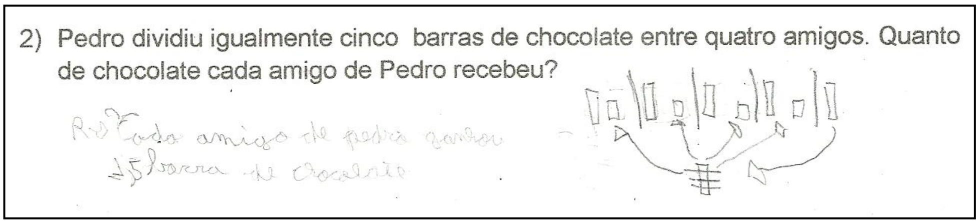

Figura 12: Resposta do aluno 7A para a Questão 2 na primeira coleta de dados

O aluno desenha quatro “barras de chocolate”, e uma dividida em quatro partes, e cada uma dessas partes distribuída ao lado das barrinhas. Entendemos que, ao trabalhar com características corporificadas, este aluno resolve a situação satisfatoriamente. Porém, a resposta simbólica dada por ele *“cada amigo de Pedro ganhou 1,5 barra de chocolate”* não corresponde com a solução corporificada. Nesse caso, o aluno não fez uma inter-relação entre os mundos corporificado e simbólico, inter-relação esta que necessita de características formais de relacionar o “pedacinho” da barra de chocolate com 0,25 (e não 0,5) ou $\frac{1}{4}$ para se concretizar. Já na segunda coleta, o mesmo aluno apresentou a resposta da Figura 13.

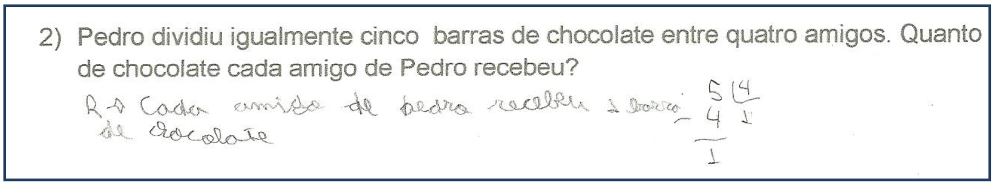

Figura 13: Resposta do aluno 7A para a Questão 2 na segunda coleta de dados

Percebemos uma tentativa deste aluno de resolver a questão por meio de características simbólicas. Para isso, ele dividiu 5 por 4, obtendo resultado 1 e resto 1, sendo a resposta que *“cada amigo de Pedro recebeu 1 barra de chocolate”*.

Percebe-se que, ao tentar resolver a questão simbolicamente, o aluno não efetuou qualquer ação sobre a barra de chocolate restante. Entendemos que também são características formais as necessárias para se decidir o que fazer com a barra restante. Seria preciso que o aluno percebesse a necessidade de se dividir a barra restante de chocolate para se fazer a divisão igualitária requerida na questão, e também relacioná-la a um número racional, seja na forma fracionária ou na decimal.

A Questão 11 envolve o subconstruto *razão*, e apenas três alunos apresentaram soluções corretas na segunda coleta de dados, comparando números racionais na forma fracionária equivalentes (Figura 14). Nenhum aluno acertou esta questão na primeira coleta.

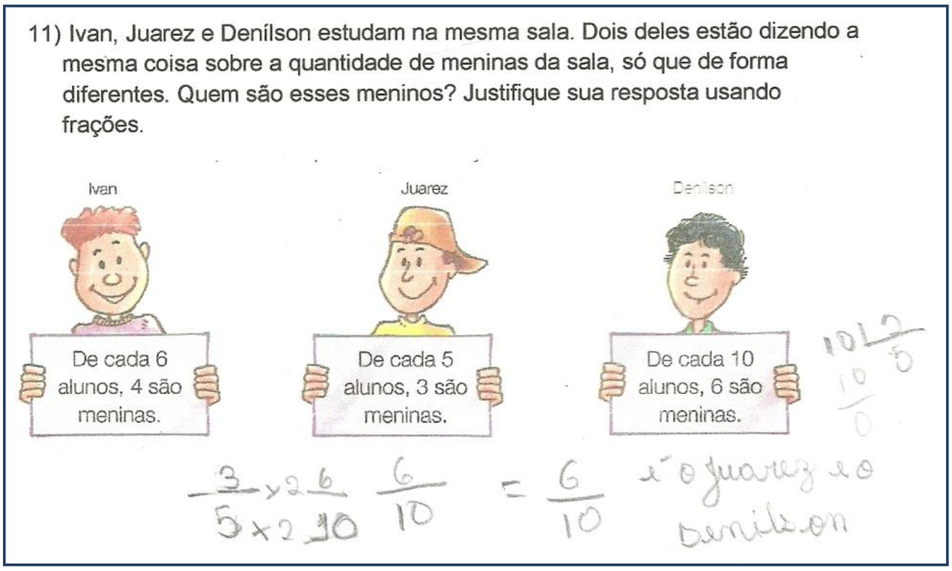

Figura 14: Solução correta para Questão 11

Outras respostas incluíram apresentar um número racional na forma fracionária (correto ou incorreto) para cada situação, mas não continuar a resolução da questão.

Na Questão 9, apresentamos uma reta numérica na qual os alunos deveriam localizar dois números racionais na forma fracionária. Esse tipo de questão não é especificamente discutida durante o 6º ano, e ela envolve o entendimento de que um número racional na forma fracionária não é um número inteiro (caso o numerador não seja um múltiplo do denominador) e ele deve ser posicionado entre dois números inteiros.

Na Figura 15, apresentamos uma das três respostas que consideramos parcialmente corretas na segunda coleta de dados (nenhuma resposta correta foi obtida na primeira coleta para esta questão), já que $\frac{1}{3}$ foi posicionado em algum lugar entre zero e 1.

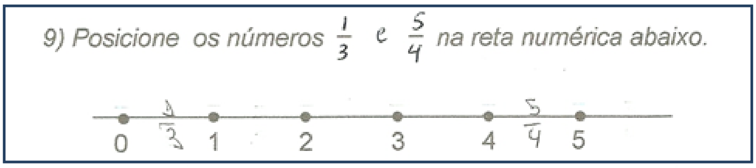

Figura 15: Uma solução para a Questão 9

Entretanto, $\frac{5}{4}$ foi posicionado entre 4 e 5, e pode ser o caso que estes números foram apenas posicionados antes do número que está no numerador deles, sem nenhuma intenção do aluno de posicioná-lo corretamente entre zero e 1. De acordo com Cortina e Zúñiga (2008), erros como este acontecem porque os alunos vêem $\frac{1}{3}$ como “um em três”, então ele está relacionado à cardinalidade, e não ao tamanho do número. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) indicam que ideias como esta, relacionadas a números naturais podem ser fatores dificultadores para o aprendizado de números racionais na forma fracionária, tais como, achar que $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$ já que $3 > 2$.

Esta é uma questão do subconstruto *medida*, considerado por muitos pesquisadores na literatura (tais como CORTINA e ZÚÑIGA, 2008) como o subconstruto mais difícil de ser aprendido. Em nossa opinião, isso acontece por causa de características formais que este subconstruto envolve, desde o entendimento de frações como números, até a percepção de que tais números são maiores ou menores que o todo.

CONCLUSÕES

Neste artigo, tínhamos por objetivo analisar *como o mundo formal pode ser um fator decisivo para o aprendizado de números racionais na forma fracionária*, buscando novos insights para o entendimento das dificuldades dos alunos com números racionais na forma fracionária proporcionados a partir de uma análise dos dados coletados com o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática.

Ao lidar com figuras divididas em partes equivalentes, os alunos sujeitos de nossa pesquisa usaram a dupla contagem (contagem do número de partes coloridas e do número de partes em que a figura foi dividida), e, na Questão 1, este procedimento corporificado parece ter sido suficiente para o sucesso deles. Levantamos a hipótese de que este também é o caso para muitos dos exemplos com os quais os alunos se deparam no currículo escolar. Entretanto, ao lidarem com figuras divididas em partes não-equivalentes (como ocorre na Questão 13), os mesmos alunos tiveram mais dificuldade em resolver a situação. Dividir a figura em partes equivalentes é uma característica formal, que não pode ser evitada para lidar com números racionais na forma fracionária, assim como saber que o numerador é o número de partes pintadas e o denominador o número de partes em que o todo foi dividido. Equivalência entre partes do todo também é uma razão pela qual alunos neste estudo foram bem-sucedidos ou falharam na Questão 12.

Localizar um número racional na forma fracionária na reta numérica também é uma característica do mundo formal, já que ela envolve leitura e interpretação de o que aquele número representa ao ser comparado com a unidade. A ideia de ter um pedaço da unidade é mais sofisticada do que ter uma parte do todo, e tal diferença de interpretação não parece ser derivada de outro subconstruto.

Percebemos que três das quatro questões que escolhemos para discutir características formais ao ensinar números racionais na forma fracionária são situações de *parte-todo*. Este é, usualmente, o primeiro subconstruto a ser ensinado no Brasil (FERREIRA DA SILVA, 2005) (e em outros países), e é dito por muitos pesquisadores (tais como BEHR, RICHARD, *et al.*, 1983) como sendo relacionado a todos os outros subconstrutos. Dessa forma, acreditamos que características formais devem ser familiares a um estudante no subconstruto *parte-todo* para que ele possa entender características do mundo formal em outros subconstrutos, por exemplo, localizar um número racional na forma fracionária na reta numérica. Entendemos que outras pesquisas devem ser feitas para analisar outros subconstrutos em termos do mundo formal.

REFERENCES

BEHR, M. J. et al. **Rational-Number Concepts**. New York: Academic Press, 1983.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática**. Brasília: MEC/SEF, v. 1a a 4a, 1997. 142 p.

CHARALAMBOUS, C.; PITTA-PANTAZI, D. Drawing on a Theoretical Model to Study Students Understandings of fractions. **Educational Studies in Mathematics**, 64, n. 3, 2005. 293-316.

CORTINA, J. L.; VISNOVSKA, J.; ZUNIGA, C. **Alternative Starting Point for Teaching Fractions**. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. Singapore: MERGA. 2012.

CORTINA, J. L.; ZÚÑIGA, C. **Ratio-like comparisons as an alternative to equal-partitioning in supporting initial learning of fractions**. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 andd PME-NA XXX. Morelia, Mexico: [s.n.]. 2008. p. 385-392.

FERREIRA DA SILVA, M. J. **Investigando os Saberes de Professores do Ensino Fundamental com Enfoque em Números Fracionários para a Quinta Série**. PUC/SP. São Paulo. 2005. Tese apresentada para obtenção do título de Doutorado em Educação Matemática.

FREIRE, P. C. **Uma Jornada por Diferentes Mundos da Matemática Investigando os Números Racionais na Forma Fracionária**. Univrsidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, p. 194. 2011.

FREIRE, P. C.; LIMA, R. N. D. **O Subconstruto Parte-Todo:** uma análise com os Três Mundos da Matemática. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Petrópolis: [s.n.]. 2012.

GARCIA SILVA, A. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: Análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do ensino fundamental, tendo como objetivo de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações**. PUC/SP. São Paulo. 2007. Tese de Doutorado em Educação Matemática.

GRAY, E.; TALL, D. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. **The Journal for Research in Mathematics Education**, 26, n. 2, 1994. 115-141.

LIMA, R. N. D.; FREIRE, P. C.; SOUZA, V. H. G. D. **A journey through three worlds of mathematics considering rational numbers as quotient**. Proceedings o the 12nd ICME. Seoul: [s.n.]. 2012.

MERLINI, V. L. **O Conceito de Fração em seus Diferentes Significados: Um Estudo Diagnóstico com Alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP. São Paulo. 2005.

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2005. Mestrado em Educação Matemática.

NAIK, S.; SUBRAMANIAM, K. **Integrating the measure and quotient interpretation of fractions**. Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX. Morelia, Mexico: [s.n.]. 2008. p. 17-24.

NUNES, T.; DESLI, D.; BELL, D. The development of children's understanding of intensive quantities. **International Journal of Educational Research**, Londres, 39, 2003.

PROJETO BURITI. **Matemática**. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 4, 2007.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional: relações necessárias à sua compreensão**. Universidade Estadual de Campinas. Campinas. 1997. Tese de Doutorado em Educação apresentado a Universidade Estadual de Campinas.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically**. New York: Cambridge University Press, 2013.

TALL, D. O. **Thinking through three worlds of mathematics**. Proceedings of the 28th Meeting of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway: Bergen. 2004a. p. 281-288.

Submetido: Março 2014

Aceito: Junho 2014