UMA RELAÇÃO ENTRE O SUBCONSTRUTO PARTE-TODO E OUTROS SUBCONSTRUTOS À LUZ DOS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA[1]

Paulo César Freire[2]
Faculdade da Aldeia de Carapicuíba
Rosana Nogueira de Lima[3]
Universidade Anhanguera de São Paulo

RESUMO

A literatura em Educação Matemática relacionada aos números racionais na forma fracionária aponta o subconstruto *parte-todo* como um dos principais fatores de influência na aprendizagem dos outros subconstrutos. Neste artigo, retomamos os dados coletados em nossa pesquisa, envolvendo os subconstrutos *parte-todo*, *quociente*, *razão*, *operador*, *medida* e *probabilidade*, para buscar se há indícios dessa influência no trabalho de alunos de 6º ano de uma escola pública de São Paulo. Esses alunos resolveram um questionário contendo 13 questões em dois momentos, antes e depois do ensino de números racionais na forma fracionária no 6º ano. Os dados foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, e os resultados mostram que esses alunos utilizam, principalmente, características do mundo corporificado, e têm muitas dificuldades de lidar com os mundos simbólico e formal em todos os subconstrutos. Este quadro teórico nos permite perceber que as características simbólicas e formais de cada subconstruto parecem ser diferentes, o que sugeriria menor influência de um em relação aos outros.

Palavras-Chave: subconstrutos, número racional na forma fracionária, Três Mundos da Matemática.

---

[1] Este texto foi elaborado a partir de um artigo publicado nos Anais do V SIPEM, com o título "O subconstruto parte-todo: uma análise com os Três Mundos da Matemática", e apresentado no GT9. Agradecemos os comentários dos membros do grupo que contribuíram para o desenvolvimento desta versão.
[2] profpaulocf@gmail.com
[3] rosananlima@gmail.com

ABSTRACT

Literature in mathematics education regarding rational numbers in fractional form points to part-whole subconstruct as one of the main factors to influence the learning of the others. In this paper, we go back to data collected from our research considering *part-whole, quotient, ratio, operator, measurement and probability*, to search for any indication of such influence in 6^{th} grade public school students' work. They solved a questionnaire with 13 questions, before and after learning rational numbers in fractional form in 6^{th} grade. Data were analyzed in the light of the theoretical framework of the Three Worlds of Mathematics, and our findings show that these students mainly use embodied world characteristics, and face many difficulties in dealing with symbolic and formal worlds. This theoretical framework allows us to realize that symbolic and formal characteristics in each subconstruct may be different, which suggests smaller influence of one in relation to the others.

Keywords: subconstructs, rational numbers in fractional form, Three Worlds of Mathematics.

INTRODUÇÃO

Várias pesquisas em Educação Matemática foram realizadas tendo como foco números racionais na forma fracionária. Entre elas, estão aquelas que analisam esses números e os classificam em diferentes subconstrutos, como é o caso, por exemplo, de Kieren (1976), Behr, Lesh, Post, & Silver (1983), Nunes, et al. (2008) e Romanatto (1997). Com essas pesquisas, observou-se a necessidade e a relevância de se classificar números racionais na forma fracionária em subconstrutos, as relações entre tais subconstrutos e a importância deles para o ensino e a aprendizagem de números racionais. Em particular, para Behr, *et al.* (1983) o subconstruto *parte-todo* representa um conceito fundamental para o número racional na forma fracionária, e também para o desenvolvimento do conceito. Além disso, por estar diretamente ligado aos outros, é um ponto de partida para a aprendizagem de características que envolvem os outros subconstrutos em particular.

A partir dessas classificações, outras pesquisas foram realizadas com o intuito de analisar o trabalho de alunos (e.g., Charalambous & Pitta-Pantazi, 2005; Merlini, 2005) e de professores (e.g., Ferreira da Silva, 2005) com os números racionais na forma fracionária. Percebemos que muitas delas evidenciam que o melhor domínio dos sujeitos é em situações que envolvem conhecimentos específicos do subconstruto *parte-todo*.

Com nossa pesquisa, tivemos por objetivo verificar quais mudanças de raciocínio alunos tiveram depois de estudarem os números racionais na forma fracionária no 6º ano. Para isso, elaboramos um questionário contendo 13 questões abordando os subconstrutos *parte-todo*, *razão*, *operador*, *quociente*, *medida* (Behr, et al., 1983) e *probabilidade* (Romanatto, 1997), e o aplicamos a alunos de dois 6os anos de uma escola pública da cidade de São Paulo, antes e depois de eles terem estudado números racionais na forma fracionária nesse ano. Os dados dessa pesquisa foram analisados à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013).

Considerando os resultados das pesquisas anteriores, que mostram que o subconstruto *parte-todo* é fundamental no aprendizado dos outros subconstrutos, e por ser geralmente este subconstruto o primeiro a ser introduzido na aprendizagem dos números racionais na forma fracionária, pois está presente na maioria dos itens a ser aprendido sobre os outros subconstrutos (Ferreira da Silva, 2005, p. 106), analisamos os resultados de nossa pesquisa buscando verificar as diferenças e similaridades entre nossa análise das respostas dos alunos nas questões referentes ao subconstruto *parte-todo* e a análise das respostas das questões relativas aos demais subconstrutos que utilizamos em nossa pesquisa, observando se as características relativas a cada um dos Mundos da Matemática que estão presentes na análise das questões de *parte-todo* também se manifestam nas análises das respostas dadas às outras questões. Com isso, temos por objetivo analisar a influência do subconstruto *parte-todo* na aprendizagem de outros subconstrutos pelos sujeitos de nossa pesquisa. Como o intuito da nossa pesquisa não foi especificamente o de estudar essa influência, fazemos uma análise inicial dela, considerando os dados obtidos a partir das questões do nosso questionário.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para a elaboração do questionário de coleta de dados de nossa pesquisa, utilizamos duas frentes teóricas. Escolhemos os subconstrutos a serem utilizados nas questões do nosso questionário, e fizemos uso do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013) para a elaboração das questões desse questionário, e também para a análise dos dados coletados. Além disso, fizemos uma análise detalhada de cada subconstruto à luz do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática.

Os Três Mundos da Matemática

A escolha do quadro teórico dos Três Mundos da Matemática (Tall, 2013) deveu-se ao fato de que ele retrata a existência de pelo menos três diferentes tipos de conceitos matemáticos,

> *(...) Os <u>objetos corporificados</u>, tais como, os elementos da Geometria, gráficos e outros, podem, inicialmente, ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. Os "<u>proceitos</u>" <u>simbólicos</u> são conceitos matemáticos que necessitam de símbolos para serem representados, como números ou equações algébricas.*

> *Por fim, os <u>conceitos axiomáticos</u> são axiomas, definições, teoremas, usados para servir de base para o sistema axiomático com o qual desenvolvemos a Matemática formal. (Lima, 2007, p. 70, grifo da autora)*

Esses três diferentes tipos de conceitos em Matemática habitam três diferentes Mundos da Matemática: o mundo conceitual corporificado, o mundo operacional simbólico (previamente chamado de mundo “proceitual” simbólico, Tall, 2004) e o mundo formal axiomático.

Mundo Conceitual Corporificado

O mundo conceitual corporificado (ao qual nos referiremos como *mundo corporificado*) é o mundo das observações, ações e reflexões sobre objetos, referindo-se a objetos físicos e também a experiências mentais. O sujeito não precisa, necessariamente, fazer manipulações físicas do objeto, pois pode manipulá-lo em seu pensamento, levantando conjecturas sobre as propriedades do objeto ou a respeito de uma ação sobre ele. Neste mundo, a visualização é fator importante, pois é por meio dela que as características matemáticas de um objeto ou de uma figura são percebidas.

Podemos exemplificar características do mundo corporificado nos números racionais na forma fracionária com a divisão de uma figura geométrica plana em partes de mesma área, e o destaque de uma ou mais partes desse todo, como no exemplo apresentado na Figura 1. Visualmente, percebe-se a divisão de um todo e o destaque de algumas partes. Dessa forma, pode-se determinar que foram destacadas três partes de um todo dividido em cinco partes.

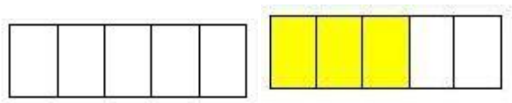

Figura 1: Divisão de figura em partes de mesma área, e com três partes pintadas

Mundo Operacional Simbólico

O mundo operacional simbólico (ao qual nos referiremos como *mundo simbólico*) é o mundo do uso dos símbolos matemáticos. O símbolo tem a função de representar ações e percepções existentes no mundo corporificado. Também é no mundo simbólico que é possível efetuar cálculos matemáticos. Nesse mundo, os símbolos são vistos tanto como o *conceito* que eles representam quanto o *processo*, numa dualidade representada pelos "*proceitos*" (Gray & Tall, 1994). Neste mundo, as ideias por trás dos símbolos são importantes, e são elas que estão no foco de atenção.

Uma característica do mundo simbólico no conceito dos números racionais na forma fracionária é a própria representação desse número na forma $\frac{a}{b}$, sendo "*a*" a quantidade de partes destacadas de um objeto ou de um conjunto de objetos, e "*b*" o número total de partes em que o objeto foi dividido ou a quantidade total de objetos no conjunto. Isso porque aquela figura, parte do mundo corporificado, é representada simbolicamente, e o símbolo pode substituir a figura. Dessa forma, evidencia-se outra característica importante do mundo simbólico que é a capacidade de "compressão", isto é, podem-se comprimir muitas informações em um único símbolo. Por exemplo, seria mais apropriado ao aluno trabalhar com o número $\frac{3}{1249}$ do que tentar fazer um desenho de uma figura geométrica dividida em 1249 partes (ou um conjunto com 1249 elementos) e destacar 3 dessas partes (ou escolher três desses elementos).

Mundo Formal Axiomático

O mundo formal axiomático (ao qual nos referiremos como *mundo formal*) é baseado em linguagem formal, em definições e axiomas, que são usados para formar as estruturas matemáticas, fazer deduções e demonstrações. Apesar de este mundo ser trabalhado em sua totalidade principalmente no ensino superior, o aluno da educação básica também se depara com características dele quando estuda. Por exemplo, ao trabalhar com números racionais na forma fracionária, é necessário que um aluno na educação básica (ou em qualquer nível de escolaridade) perceba que uma figura precisa ser dividida em partes de mesma área para que cada uma das *n* partes em que a figura foi dividida representem exatamente $\frac{1}{n}$ parte da figura. Esta é uma característica formal justamente por fazer parte da definição de divisão.

Podemos citar como exemplo de características formais para os números racionais na forma fracionária a definição apresentada aos alunos ainda no ensino fundamental, $\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z} \; e \; b \neq 0\right\}$. Traços do mundo formal também aparecem, por exemplo, nas situações em que há generalização, tal como na apresentação da escrita da forma $\frac{a}{b}$, e a generalização de que "*a*" representa o número de partes destacadas e "*b*" o número de partes em que o todo foi dividido.

Vale salientar que não existe hierarquia entre os mundos, pois se pode trabalhar com características corporificadas no mundo formal, ou características formais no mundo simbólico, ou características simbólicas no mundo corporificado, entre outras.

Nossa escolha por este quadro teórico se deu por entendemos que justamente na passagem do 5º para o 6º ano há uma lacuna no entendimento do aluno, dificultando a aprendizagem dos números racionais na forma fracionária, pelo fato de o aluno não mais aprender com exemplos manipuláveis, pertencentes ao mundo conceitual corporificado, e passar a aprender efetuando ações com símbolos para representar conceitos, que pertencem ao mundo operacional simbólico. Talvez esta passagem seja muito brusca para eles, e, considerando o objetivo inicial de nossa pesquisa, este quadro teórico se mostrou adequado.

Classificação de números racionais na forma fracionária a ser usada nesta pesquisa

Em Freire (2011), apresentamos classificações para os números racionais na forma fracionária feitas por Kieren (1976) (o primeiro a elaborar uma classificação para esse número), Behr, et al. (1983), Nunes, et al. (2008) e Romanatto (1997). Após um estudo delas, entendemos que uma classificação contendo seis subconstrutos, *parte-todo*, *quociente*, *operador*, *medida*, *razão* (Behr, et al., 1983) e *probabilidade* (Romanatto, 1997) seria a mais adequada para a nossa pesquisa e para a análise dos dados coletados, pois com ela ficam mais evidentes as características dos Três Mundos da Matemática que procuramos, e ela engloba um subconstruto não evidenciado por Behr, et al. (1983).

O diagrama da Figura 2 é uma adaptação do diagrama elaborado por Behr, et al. (1983) para apresentar a classificação de números racionais na forma fracionária elaborada por eles, e as relações que eles acreditam que os subconstrutos por eles criados tenham com conceitos relacionados a esse tipo de número. A adaptação que fizemos foi a introdução, nesse diagrama, do subconstruto *probabilidade*, que também fez parte de nossa pesquisa.

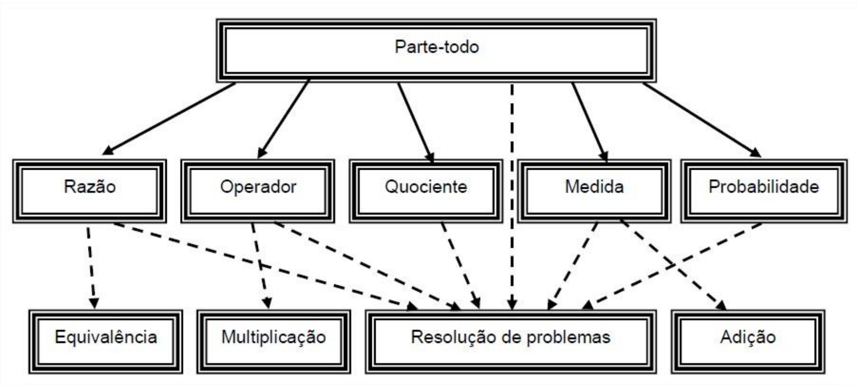

Figura 2: Nossa classificação (adaptada de Behr, et al., 1983, p. 10)

O diagrama apresenta a divisão do número racional na forma fracionária em seis subconstrutos, sendo que há uma ligação do subconstruto *parte-todo* com os demais, o que também foi encontrado em Ferreira da Silva (2005), e acreditamos que também com o subconstruto *probabilidade*. Com isso, entendemos que existem características do subconstruto *parte-todo* em todos os outros subconstrutos, além de cada um deles possuir suas próprias características. O diagrama também apresenta uma ligação dos subconstrutos com as operações matemáticas e com a resolução de problemas.

O subconstruto *razão* está conectado com a equivalência, o que sugere que, para a resolução de problemas envolvendo equivalência entre números racionais na forma fracionária, utilizam-se as características do subconstruto *razão*, isto é, para qualquer valor de $k \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.

O subconstruto *operador* está conectado com a operação de multiplicação, sugerindo o uso de características dele para a resolução de problemas envolvendo multiplicação de um número racional na forma fracionária por outro, ou seja, a multiplicação $\frac{a}{b} \cdot k = \frac{ak}{b}$, com $b \neq 0$ e $a, b, k \in \mathbb{Z}$, ou ainda a multiplicação de dois números racionais na forma fracionária, $\frac{a}{b} \cdot \frac{k}{x} = \frac{ak}{bx}$, com $b \neq 0$ e $x \neq 0$ sendo $a, b, k, x \in \mathbb{Z}$.

O subconstruto *medida* está interligado com a operação de adição. Algumas vezes, precisamos calcular a soma de medidas para resolver uma situação. Ou seja, após escolhermos uma unidade de medida, verificamos quantas vezes ela cabe dentro da outra (a ser medida), fazendo uma comparação entre duas grandezas de mesma espécie (Caraça, 1951, p. 30).

Essas e outras observações podem ser feitas pela leitura do diagrama. Em Freire (2011), as definições de cada subconstruto são apresentadas mais detalhadamente, assim como exemplos de situações envolvendo-os.

PESQUISAS SOBRE ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA

Em sua pesquisa, Garcia Silva (2007) teve como objetivo analisar fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores dos anos iniciais do ensino fundamental, como resultado de uma formação continuada. A coleta de dados foi realizada em uma escola pública estadual localizada em Franco da Rocha/SP; e teve como sujeitos 17 professores dos anos iniciais do ensino fundamental e 77 alunos, 35 de 4º ano e 42 de 5º ano do ensino fundamental. Os resultados obtidos mostram que os professores pesquisados apresentam razoável domínio dos números racionais na forma fracionária quando se refere ao subconstruto *parte-todo*; um pouco menos de domínio com os subconstrutos *quociente* e *operador*; e relativamente pouco domínio dos subconstrutos *razão* e *medida*. Ao contrário dos professores, os alunos pesquisados tiveram melhor aproveitamento no subconstruto *quociente* do que no subconstruto *parte-todo*, tendo baixo aproveitamento para *razão*, *operador* e *medida*.

Merlini (2005) e Moutinho (2005) realizaram estudos diagnósticos com alunos de escolas públicas de São Paulo. Merlini (2005), com 60 alunos de 6º e 60 de 7º ano do ensino fundamental, com idades entre 10 e 14 anos; Moutinho (2005) com 65 alunos de 5º ano, com idades entre 10 e 13 anos; e 58 alunos de 9º ano, entre 14 e 16 anos. Esses alunos apresentaram o maior desempenho nas questões envolvendo o subconstruto *parte-todo*, e o segundo melhor desempenho nas questões referentes ao subconstruto *quociente* para 6^{os}, 7^{os} e 9^{os} anos, e *razão* para 5^{os} anos. As questões referentes ao subconstruto *medida* foram aquelas nas quais os alunos apresentaram o pior desempenho.

Damico (2007) investigou a formação inicial de professores de Matemática. Para isso, trabalhou com 346 alunos de cursos de Licenciatura em Matemática de duas instituições de nível superior do ABC Paulista, cursando primeiro ou último ano. De acordo com Damico (2007), ao criarem exercícios, esses alunos utilizaram com mais frequência o subconstruto *operador*, seguido do subconstruto *parte-todo*. Ao resolverem exercícios, eles tiveram maior índice de acertos no subconstruto *operador*, e no *parte-todo*.

Charalambous e Pitta-Pantazi (2005) tiveram por objetivo compreender as construções do conceito de fração por 340 alunos de 6º ano e 306 alunos de 7º ano. A coleta de dados foi realizada em Chipre. Foram aplicadas 50 questões, divididas de acordo com a classificação elaborada por Behr, et al. (1983), e as operações de equivalência e multiplicação e adição. O estudo mostrou que o desempenho dos alunos foi melhor nas questões relacionadas com o subconstruto *parte-todo*, e menor nas do subconstruto *medida*.

Apresentadas as pesquisas, notamos que as questões de maior aproveitamento envolvem, principalmente, o subconstruto *parte-todo*. Dessa forma, entendemos a importância de analisar nossos dados tendo em vista a influência dele no trabalho com números racionais na forma fracionária.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para alcançarmos o objetivo de nossa pesquisa, de verificar quais as mudanças de raciocínio os alunos tiveram depois de estudarem números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental, fizemos duas coletas de dados em uma escola pública estadual de São Paulo. A primeira coleta foi realizada com 41 alunos de dois 6ºs anos, no início do ano letivo, antes que eles tivessem contato com o conteúdo de número racional na forma fracionária com o professor do 6º ano. A segunda coleta de dados foi realizada com os mesmos 41 alunos após o ensino desse conteúdo pelo professor do 6º ano.

Para ambas as coleta de dados, foi elaborado um questionário, contendo 13 questões sobre números racionais na forma fracionária, à luz do quadro teórico dos

Três Mundos da Matemática, e considerando a classificação para esses números apresentada por Behr, et al. (1983), bem como o subconstruto *probabilidade* de Romanatto (1997). O questionário contém quatro questões envolvendo o subconstruto *parte-todo* (Questões 1, 3, 12 e 13), duas sobre o subconstruto *quociente* (Questões 2 e 10), duas considerando o subconstruto *razão* (Questões 4 e 11), duas sobre o subconstruto *operador* (Questões 6 e 8), duas com o subconstruto *medida* (Questões 7 e 9) e uma envolvendo o subconstruto *probabilidade* (Questão 5). Uma análise detalhada das questões em relação aos subconstrutos e aos Três Mundos da Matemática encontra-se em Freire (2011).

Depois de classificarmos as respostas apresentadas pelos 41 alunos participantes em cada questão do questionário, tanto para a primeira quanto para a segunda coleta, escolhemos seis alunos para participarem de entrevistas, a fim de melhor compreendermos o raciocínio deles ao responderem as questões. Estas entrevistas foram conduzidas pelo primeiro autor deste artigo, na presença de um observador, que também fez alguns questionamentos aos alunos. As entrevistas foram áudio-gravadas e transcritas para análise.

Com o intuito de compreendermos como foram ensinados os números racionais na forma fracionária às classes de 6º ano com as quais coletamos nossos dados, entrevistamos os dois professores das salas, somente como subsídio para a análise dos dados coletados com os alunos.

Para este artigo, discutiremos as análises efetuadas sobre respostas a questões envolvendo o subconstruto *parte-todo*, e as confrontaremos com as análises das outras questões, numa tentativa de verificar se características diferentes dos Três Mundos da Matemática se manifestam no trabalho desses alunos.

ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

As respostas desses alunos às questões do questionário foram separadas em categorias, e as categorias, bem como as falas dos alunos nas entrevistas foram analisadas considerando características dos mundos corporificado, simbólico e formal. Para apresentar esta análise neste artigo, consideramos as questões de cada subconstruto separadamente, considerando inicialmente os resultados relativos ao subconstruto *parte-todo*, para depois compararmos nossas análises com os resultados obtidos nas questões envolvendo os outros subconstrutos.

Questões envolvendo o subconstruto *parte-todo*

As questões relacionadas ao subconstruto *parte-todo* são as Questões 1, 3, 12 e 13, apresentadas na Figura 3.

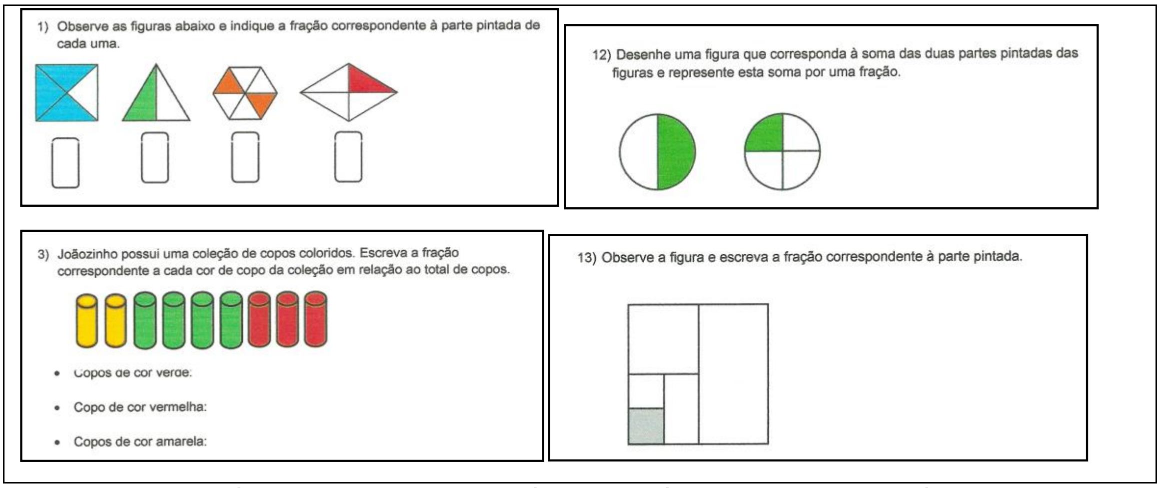

Figura 3: Questões relativas ao subconstruto *parte-todo*

Onze alunos responderam corretamente a Questão 1 na primeira coleta de dados e 21 na segunda. As respostas corretas denotam a contagem da quantidade de partes pintadas na figura e da quantidade de partes em que a figura foi dividida, o que consideramos como característica corporificada, acompanhada de uma representação correta do número racional na forma fracionária, o que é característica do mundo simbólico. Dessa forma, percebemos uma conexão apropriada dos mundos corporificado e simbólico nas respostas desses alunos.

Já as respostas incorretas envolveram principalmente a inversão de numerador com denominador ou o uso da quantidade de partes pintadas na figura e da quantidade de partes não pintadas, seja no numerador ou no denominador. Percebemos as mesmas características corporificadas das respostas corretas, porém elas não estão conectadas a características do mundo simbólico, na medida em que os alunos que deram tais respostas não sabiam "onde colocar" (no numerador ou no denominador) os números que eles conseguiram com a contagem das partes pintadas e não pintadas, ou do total de partes em que a figura foi dividida. Esta aparente inabilidade de escrever o número racional na forma fracionária também pode ser devida ao não entendimento de características presentes no mundo formal, ou seja, na formação do número. Considerando as respostas dadas na Questão 1, entendemos que os alunos trabalharam, principalmente, com o mundo corporificado, pois há uma falta de compreensão de características simbólicas ao utilizar esta representação para "indicar a fração correspondente à parte pintada", como lhes foi solicitado.

As respostas para a Questão 3 foram similares às apresentadas na Questão 1. Onze alunos deram resposta correta na primeira coleta, e 15 na segunda. Aparentemente, essas respostas envolveram a contagem de copos de cada cor e a contagem do total de copos. As respostas incorretas, novamente, envolveram a inversão do numerador pelo denominador, e algum número racional na forma fracionária envolvendo os números naturais que representam a quantidade de copos de cada cor, por exemplo, $\frac{4}{4}$ ou $\frac{1}{4}$ para a quantidade de copos verdes.

Da mesma forma que na Questão 1, consideramos que, nessa questão, os alunos apresentaram características corporificadas para determinar o número racional na forma fracionária, contando a quantidade de copos de uma cor e a quantidade total de copos, mas tiveram dificuldades em relacionar essas com características simbólicas, mostrando dificuldade em representar simbolicamente as quantidades.

A Questão 12 foi inserida no questionário com o intuito de verificar se esses alunos conseguiriam efetuar operações utilizando características do mundo corporificado, isto é, fazendo uso de figuras e relacionando-as. Onze alunos responderam corretamente esta questão na primeira coleta, e 12 na segunda. Deles, sete alunos na primeira coleta e nove na segunda resolveram usando características corporificadas, enquanto os outros se utilizaram também de características simbólicas, efetuando o cálculo da soma antes de desenhar a figura solicitada, conforme o aluno Ângelo[4] explicou em entrevista[5], que transcrevemos a seguir:

> *P: Agora você fez um círculo e dividiu em quatro. Por que?*
> *An: Por causa dessas contas.*

[4] Para preservar a identidade dos sujeitos, escolhemos nos referir a eles com nomes fictícios.

[5] Nos trechos de entrevistas utilizamos P para indicar a fala do Pesquisador que conduziu a entrevista, e as duas primeiras letras do nome fictício do aluno para indicar a fala dele.

P: O que tem essas contas?
An: Eu fiz aqui um sobre dois vezes dois.
P: Para que?
An: Para ficar igual a esse [referindo-se ao outro número].
P: E depois?
An: Eu somei $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}$ *e deu esse,* $\frac{3}{4}$.
P: Quem você fez primeiro, o desenho ou a conta?
An: A conta.
P: Por que?
An: Porque é mais fácil.
P: E por que aqui você não fez conta? [apontando para a primeira coleta]
An: Eu ainda não sabia.
(Trecho de entrevista com aluno Ângelo)

Esta entrevista também enfatiza o fato de que a resposta que Ângelo apresentou na primeira coleta envolvia uma tentativa corporificada de resolver a questão, o que não ocorreu na resposta dele na segunda coleta, que foi apresentada com características simbólicas. Esse uso de simbolismos trouxe sucesso para alguns alunos além de Ângelo.

As respostas incorretas para a Questão 12 envolveram a construção de um círculo dividido em quatro, seis ou oito partes, com duas partes pintadas, ou respostas em que os alunos apenas apresentavam os números racionais na forma fracionária correspondentes às duas figuras. Estas respostas nos levam a crer que tais alunos tiveram dificuldades de usar características corporificadas e simbólicas, não conectando esses dois mundos, talvez por falta de compreensão ou conhecimento de características do mundo formal subjacentes a esta conexão, como, por exemplo, o entendimento de que as duas figuras deveriam estar igualmente divididas em partes de mesma área para que a adição fosse possível.

Nenhum aluno apresentou resposta correta para a Questão 13 na primeira coleta de dados, e somente quatro o fizeram na segunda coleta. Tal fato parece ser uma discrepância em relação às pesquisas que sugerem maior acerto em questões do subconstruto *parte-todo*. Todas as respostas corretas foram feitas com o uso de características do mundo formal, já que os alunos redividiram a figura, para obter partes de mesma área. Respostas incorretas envolveram a contagem de partes em que a figura foi dividida e partes pintadas, sem que fosse levado em consideração que a figura não estava dividida em partes de mesma área. Houve também algumas tentativas de redividir a figura, mas nem todas as partes com mesma área. Dessa forma, vemos que as características corporificadas usadas nas Questões 1 e 3 não foram suficientes para que os alunos fossem bem-sucedidos em responder a Questão 13.

Em resumo, ao lidarem com questões envolvendo o subconstruto *parte-todo*, esses alunos utilizam com mais frequência características do mundo corporificado, principalmente na primeira coleta. Tiveram dificuldades em lidar com o mundo simbólico, o que se reflete nas representações incorretas de situações com o uso de um número racional na forma fracionária; e não parecem ter compreendido características do mundo formal, já que não percebem a necessidade de as partes em que uma figura foi dividida terem mesma área, não parecem ter compreendido a diferença entre numerador e denominador, e tiveram dificuldades em representar uma adição de frações por meio de uma figura.

Para verificarmos a influência do subconstruto *parte-todo* no trabalho com outros subconstrutos, procuramos, nas respostas para as outras questões, se esses alunos apresentam essas mesmas dificuldades e também se apresentam respostas corretas com as mesmas características apresentadas no subconstruto *parte-todo*.

Questões envolvendo o subconstruto *quociente*

As Questões 2 e 10 envolviam situações com o subconstruto *quociente*, e são apresentadas na Figura 4.

2) Pedro dividiu igualmente cinco barras de chocolate entre quatro amigos. Quanto de chocolate cada amigo de Pedro recebeu?

10)

Qual dos dois meninos está certo? Por quê?

Figura 4: Questões relativas ao subconstruto *quociente*

Tivemos três respostas corretas em cada uma das coletas na Questão 2. Dois dos alunos que deram respostas corretas o fizeram por meio de características do mundo corporificado, desenhando representações para as barras de chocolate, distribuindo uma barra para cada amigo de "Pedro", e dividindo a barra restante em quatro partes aparentemente iguais. Entretanto, quando deram a resposta à Questão 2, com números, não utilizaram o número correto, indicando dificuldades de representar numericamente, isto é, com características do mundo simbólico, o que obtiveram com a representação pertencente ao mundo corporificado. Nas respostas apresentadas, os alunos mencionam uma barra de chocolate para cada amigo de Pedro e mais “um pedaço” ou “uma metade”, ou utilizam números racionais incorretos, como $1{,}5$.

Na primeira coleta, o raciocínio mais frequentemente apresentado foi o de tentar representar a situação com figuras, característica do mundo corporificado. Na segunda coleta, houve mudança nas estratégias usadas pelos alunos, um número maior de estudantes passou a fazer tentativas simbólicas de resolução, efetuando operações, e tendo dificuldades de efetuar uma divisão que resultasse em um número racional. Um desses alunos, Bruno, ao ser questionado na entrevista, respondeu que abandonou as características do mundo corporificado porque “*avançou*”:

> *Br: Acho que eu avancei. Do desenho para a conta.*
> *P: Você acha que isso foi um avanço?*
> *Br: É.*
> *P: Por isso que você abandonou o desenho?*
> *Br: É. Antes para contar eu fazia pontinhos, agora eu faço números.*
> *P: E quem te convenceu a abandonar os desenhos?*
> *Br: Eu mesmo.*
> *P: Você achou que agora você está aprendendo bastante e tinha que abandonar os desenhos?*
> *Br: É, a gente tem que aprender um dia, né? Não pode ficar em só uma coisa.*
> *(Trecho de entrevista com aluno Bruno).*

Bruno entende que deve deixar de usar características do mundo corporificado para que possa “avançar”, isto é, utilizar ideias matemáticas mais sofisticadas. Porém, aparentemente, não consegue ainda resolver a questão usando somente características do mundo simbólico. Ele divide 5 por 4, obtendo quociente 1 e resto 1, e não efetua nenhuma operação sobre o resto para obter algum número racional como resposta da divisão igualitária dessas cinco barras de chocolate entre quatro amigos. Talvez lhe falte conhecimento do mundo formal do subconstruto *quociente* para entender, por exemplo, que, se comparada com a divisão no conjunto dos números naturais, não faz sentido obter resto de uma divisão no conjunto dos números racionais. Esta é uma característica formal que não está presente em situações que envolvem o subconstruto *parte-todo*.

Vinte alunos na primeira coleta de dados e 24 na segunda responderam a Questão 10 corretamente. Tais respostas envolviam alguma afirmação de que $\frac{8}{8}$ é o mesmo que um inteiro. As outras respostas apontaram um dos dois meninos, sem nenhuma explicação. Percebe-se um número maior de respostas corretas para esta questão, talvez por um número inteiro ter sido representado por uma fração, talvez pela própria figura que acompanha a questão.

O mundo simbólico, nas questões de *quociente* também não foi utilizado de forma apropriada, pois os alunos não conseguiram representar um quarto da barra de chocolate utilizando números. Entretanto, eles foram bem-sucedidos ao fazer a divisão com características do mundo corporificado. Por outro lado, eles fazem a relação de que $\frac{8}{8}$ é o mesmo que um inteiro, o que pode ter sido observado com características do mundo formal, ao perceberem a equivalência, ou do mundo corporificado, ao desenharem o bolo. Esta equivalência entre dois números racionais na forma fracionária é uma característica formal que também pode ser trabalhada em situações do subconstruto *parte-todo*.

Questões envolvendo o subconstruto *razão*

As Questões 4 e 11, apresentadas na Figura 5, contém situações envolvendo o subconstruto *razão*.

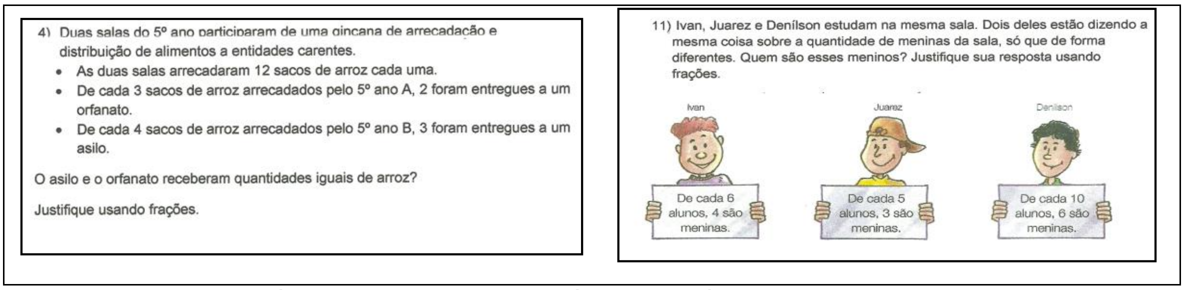

Figura 5: Questões relativas ao subconstruto *razão*

Somente um aluno respondeu corretamente a Questão 4 na primeira coleta de dados, e cinco na segunda. Respostas corretas envolveram o uso de características do mundo simbólico, pois os alunos fizeram cálculos usando números racionais na forma fracionária. É possível que essa escassez de respostas corretas se deva justamente ao fato de que esta é uma questão que envolve principalmente características simbólicas e formais, que não parecem ter sido compreendidas por esses alunos. Respostas incorretas para esta questão envolveram tentativas de fazer cálculos com uso de símbolos ou de figuras, isto é, as dificuldades apresentadas foram tanto para usar características do mundo corporificado quanto do mundo simbólico. Da mesma forma que o ocorrido nos subconstrutos *parte-todo* e *quociente*, as tentativas corporificadas foram em maior número na primeira coleta de dados do que na segunda.

Na Questão 11, não tivemos nenhuma resposta correta na primeira coleta, e três na segunda. Os alunos que a acertaram apresentaram as razões referentes às falas de cada um dos meninos da questão, e fizeram multiplicações para perceber a igualdade entre duas delas. Respostas incorretas envolveram comparações errôneas ou a falta da comparação e apresentação somente das razões. As justificativas apresentadas em entrevistas para as respostas incorretas evidenciam que estes alunos parecem não terem compreendido também as características do mundo formal envolvidas no subconstruto *razão*. Por exemplo, no diálogo abaixo entre o pesquisador e o aluno Bruno:

> *P: Por que você escolheu o Ivan e o Juarez?*
> *Br: Eu acho que eles são mais iguais, esses dois números são menores.*
> *P: Eles são menores?*
> *Br: São. Os denominadores são menores.*
> *(Trecho de entrevista com aluno Bruno)*

Este aluno explicita que achou que os números $\frac{4}{6}$ e $\frac{3}{5}$ eram “mais iguais” por serem menores, mostrando que fez uma comparação baseada nos números que estavam no numerador e no denominador das razões que ele encontrou, e não em características formais dessas razões. Entendemos que o subconstruto *razão* tem características formais diferentes daquelas do *parte-todo*, especialmente no que diz respeito ao tipo de comparação presente nesta questão. Em situações referentes ao *parte-todo*, observa-se uma quantidade de um todo, por exemplo, a quantidade de meninas em uma classe. Ao trabalhar com o subconstruto *razão*, é possível comparar a quantidade de meninas em relação à quantidade de meninos, e não ao todo, o que pode trazer dificuldades, como afirmam Cortina, Visnovska, e Zuniga (2012).

Para se resolver essas duas questões, nos parece necessário o uso de características dos mundos simbólico e formal, características essas que raramente foram usadas de maneira bem-sucedida por esses alunos nas questões do questionário. Tal sofisticação envolvida na resolução dessas questões talvez seja o principal fator das dificuldades apresentadas por eles.

Questões envolvendo o subconstruto *probabilidade*

A Questão 5 representa o subconstruto *probabilidade* (Figura 6).

5) A caixa abaixo possui 20 bolinhas coloridas. Gabriela retirou uma bola de dentro da caixa. Qual a chance de Gabriela ter retirado uma bolinha vermelha?

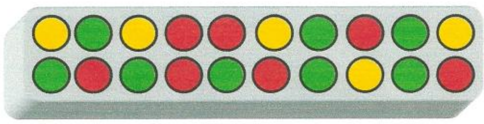

Figura 6: Questão envolvendo o subconstruto *probabilidade*

Em ambas as coletas, obtivemos 13 respostas corretas para esta questão. Essas respostas foram apresentadas de duas maneiras diferentes: nove alunos na primeira coleta e seis na segunda representaram a *razão* existente entre as bolinhas vermelhas e o total de bolinhas contidas na caixa, $\frac{7}{20}$, ou seja, 7 bolinhas vermelhas para um total de 20 bolinhas na caixa; e quatro alunos na primeira coleta e sete na segunda apresentaram a resposta escrevendo somente “sete chances”. As respostas incorretas envolveram números naturais que representam as quantidades de bolinhas de cada cor, ou frases como, “porque tem mais vermelhas na caixa”.

As respostas dadas pelos alunos a esta questão são muito similares àquelas das Questões 1 e 3 do subconstruto *parte-todo*. Elas são ou corretas, ou envolvendo números naturais, sem reflexão sobre como seria um número racional na forma fracionária que caracterizasse a situação. Além disso, as respostas corretas também foram obtidas por meio do uso de características corporificadas, isto é, pela contagem da quantidade de bolinhas vermelhas e a quantidade de bolinhas na caixa. É possível que estas respostas caracterizem uma influência direta do subconstruto *parte-todo* no *probabilidade*, especialmente dada a similaridade entre eles.

Questões envolvendo o subconstruto *operador*

A Figura 7 apresenta as Questões 6 e 8, que envolvem situações do subconstruto *operador*.

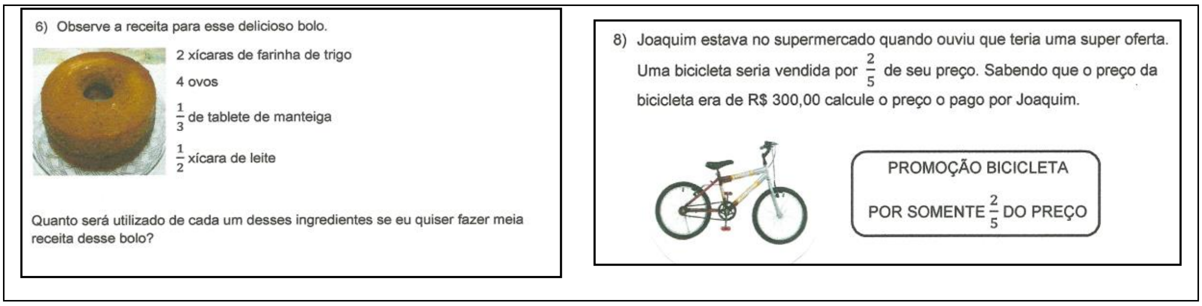

Figura 7: Questões envolvendo o subconstruto *operador*

Apenas um aluno respondeu corretamente a Questão 6 na segunda coleta de dados, e nenhum aluno a respondeu corretamente na primeira coleta. Esta resposta foi correta, entretanto, somente para as quantidades de farinha de trigo, ovos e leite. Para a manteiga, o aluno respondeu $\frac{1}{5}$. Respostas incorretas envolveram subtração de uma unidade dos denominadores; divisão do numerador ou do denominador por 2; divisão somente das quantidades representadas por números naturais; e criação de novas receitas.

Esta questão também envolvia, principalmente, características dos mundos simbólico e formal, o que pode ter dificultado a resolução dela. Já era familiar aos alunos a divisão de números naturais por 2, e entendemos que eles utilizaram esse conhecimento para efetuar divisões com números racionais na forma fracionária, dividindo tanto numerador quanto denominador ou escolhendo um dos dois para a divisão. É possível também que características formais dessa divisão ainda não sejam familiares para esses alunos.

Tal resposta nos remete às respostas dadas nas questões do subconstruto *parte-todo*, nas quais os alunos demonstravam não saber qual número deve ser colocado no numerador ou no denominador, e, nas entrevistas, alguns deles declararam ser o numerador o total das partes em que a figura foi dividida. Dessa forma, a divisão de ambos, numerador e denominador, ou do numerador nos parece ser relacionada ao entendimento que tiveram desse tipo de número ao trabalharem com situações do subconstruto *parte-todo* e com números naturais. Além disso, vemos, novamente, dificuldades em lidar com operações presentes no mundo simbólico e que têm características formais.

A Questão 8 também envolve características do mundo simbólico, e foi resolvida corretamente por um aluno na primeira coleta e dois na segunda. Para essas soluções, os alunos dividiram o preço inicial da bicicleta (R$300,00) por 5 e tomaram duas partes, resultando em R$120,00. Respostas incorretas envolveram somente a divisão do preço inicial pelo denominador ou pelo numerador do *operador* $\frac{2}{5}$, ou a divisão do preço inicial por 3.

Estas respostas também sugerem dificuldade em entender a representação simbólica de um número racional na forma fracionária e as dificuldades já mencionadas para a Questão 6 com características do mundo simbólico.

Questões envolvendo o subconstruto *medida*

Com as Questões 7 e 9, pretendíamos trabalhar o subconstruto *medida*. Elas são apresentadas na Figura 8.

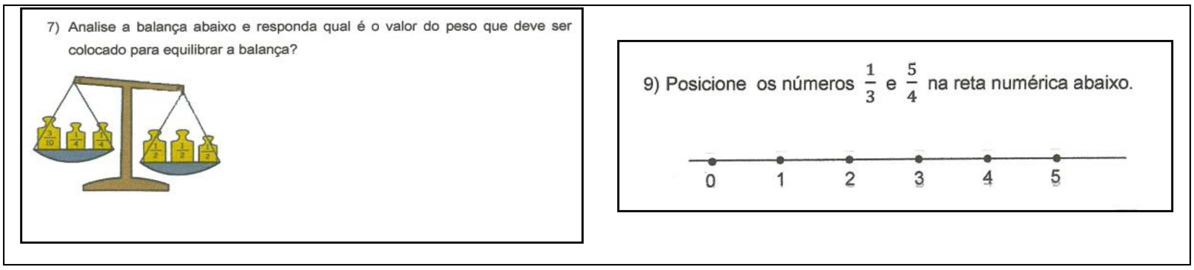

Figura 8: Questões envolvendo o subconstruto *medida*

Nenhum aluno apresentou resposta correta para a Questão 7. Ao analisarmos as respostas apresentadas, entendemos que a questão não representava de maneira satisfatória o subconstruto *medida*, e o enunciado dela pareceu muito difícil para esses alunos. Porém, podemos, ainda assim, perceber que os alunos buscaram responder a questão com uso de características corporificadas na primeira coleta e, diferentemente das outras questões, não abandonaram o uso dessas características na segunda coleta. Isso pode ter acontecido devido à figura apresentada, que pode ter influenciado o aluno a esse uso, e também, por a maioria deles não entender como resolver a questão com características dos mundos simbólico e formal.

Com a Questão 9, obtivemos três respostas parcialmente corretas na segunda coleta de dados, e nenhuma na primeira. Nelas, os alunos localizaram $\frac{1}{3}$ entre zero e 1 na reta real, mas não localizaram $\frac{5}{4}$ corretamente. As outras respostas envolvem a localização de $\frac{1}{3}$ entre 1 e 2, entre 3 e 4, no número 1 ou no número 3, e a localização de $\frac{5}{4}$ entre 4 e 5, depois do 5, no número 4 ou no número 5. Vemos que a relação feita entre os números racionais na forma fracionária e a localização deles na reta real é por meio do numerador ou do denominador desses números. Novamente, eles podem estar tratando números racionais na forma fracionária como números naturais. Vale ressaltar que alguns alunos sugerem relação da reta real com uma régua graduada, como evidenciado na entrevista abaixo, com a aluna Clara:

> *P: Nessa questão, você tinha que posicionar o $\frac{1}{3}$ e o $\frac{5}{4}$ na reta numérica. Você já tinha visto uma reta numérica?*
> *Cl: Já.*
> *P: Onde você já tinha visto uma reta numérica?*
> *Cl: Já tinha visto em uma régua.*
> *P: Você posicionou o $\frac{1}{3}$ depois...*
> *Cl: Três e pouquinho.*
> *P: Você posicionou depois...*
> *Cl: Do três, como se fosse trinta, depois vem o trinta e um, por isso que eu coloquei o ponto.*
> *P: Você tirou daí? Mas por que trinta? Não é três?*
> *Cl: É como se fosse dois inteiros, por exemplo, se em cima, no numerador, fosse dois, seria dois terços.*
> *P: E aí era depois do dois ainda?*
> *Cl: Era mais um pouco.*
>
> *(Trecho de entrevista com aluna Clara)*

Neste trecho de entrevista, também percebemos a aluna Clara mencionar que entende um número racional na forma fracionária como "se fosse dois inteiros". Esta questão evidencia a dificuldade desses alunos em trabalhar com características do mundo formal, enquanto o uso de números inteiros e a relação da reta numérica com uma régua graduada indicam características do mundo corporificado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa pesquisa, tivemos como objetivo verificar como alunos de 6º ano trabalham com números racionais na forma fracionária antes do ensino desse conceito no 6º ano, e se e como o raciocínio deles sofreu mudanças depois desse ensino. Para isso, elaboramos um questionário envolvendo subconstrutos de números racionais na forma fracionária e características dos Três Mundos da Matemática. Percebemos que esses alunos apresentaram respostas no mundo corporificado mais frequentemente na primeira coleta de dados do que na segunda, quando fizeram mais esforço para usar características do mundo simbólico. As questões de maior acerto foram 1, 3 (*parte-todo*), 5 (*probabilidade*) e 10 (*quociente*).

Considerando evidências de pesquisas anteriores de que o subconstruto *parte-todo* é essencial para o estudo de números racionais na forma fracionária, por fundamentar os outros subconstrutos, por ser mencionado como o de maior índice de acerto entre alunos, e por, aparentemente, ser frequentemente o primeiro subconstruto a ser introduzido no ensino, decidimos verificar se os resultados obtidos em nossa pesquisa relativos ao subconstruto *parte-todo* evidenciam alguma influência dele no trabalho com os outros subconstrutos.

Como o objetivo principal desta pesquisa não envolve essa comparação, entendemos que o questionário aplicado não engloba todos os elementos necessários para uma comparação detalhada desses dados, porém os resultados obtidos com as questões aplicadas podem dar subsídios para uma análise sobre a possível relação entre as características do subconstruto *parte-todo* presentes no trabalho desses alunos e as características apresentadas por eles no que se refere aos outros subconstrutos pesquisados.

Observamos que, nas questões envolvendo o subconstruto *parte-todo*, os alunos participantes de nossa pesquisa utilizam principalmente características do mundo corporificado, quando evidenciaram compreender a necessidade da contagem de partes em que a figura foi dividida (ou quantidade de elementos de um conjunto) e da contagem de partes destacadas da figura (ou quantidade de elementos destacados de um conjunto). As características corporificadas nem sempre surtiram efeito positivo no trabalho desses alunos, pois elas não estavam conectadas a características simbólicas e formais. As simbólicas, no contexto das questões envolvendo *parte-todo* estão ligadas à representação da figura dada em um número racional na forma fracionária; e as formais, ao entendimento de que a figura deve ser dividida em partes de mesma área, e na escolha dos números que são colocados no numerador e no denominador.

A análise das questões envolvendo o subconstruto *quociente* mostra que também são usadas características corporificadas para a resolução. Os alunos foram capazes de criar suas próprias figuras para representar uma situação, e dividi-las, entendimento este que pode ter sido criado a partir do *parte-todo*. As características simbólicas ausentes no subconstruto *parte-todo* também não se apresentam no *quociente*, pois evidenciamos novamente dificuldades em representar figuras com números.

As questões relacionadas aos subconstrutos *razão* e *operador* envolviam principalmente o uso do mundo simbólico, e talvez justamente por isso os alunos não as tenham resolvido satisfatoriamente. As características simbólicas necessárias para resolvê-las não foram tão solicitadas nas questões de *parte-todo*, o que nos impede de fazer uma comparação mais detalhada. Por outro lado, as características formais envolvidas nestas questões são similares às do *parte-todo*, e também não se manifestaram nos subconstrutos *razão* e *operador*.

O subconstruto *probabilidade* foi representado em nossa pesquisa por uma questão muito similar à outra de *parte-todo*, e as mesmas características corporificadas foram apresentadas pelos alunos.

As questões envolvendo o subconstruto *medida* são caracterizadas, principalmente, pela necessidade de uso de características do mundo formal, que não se manifestaram no trabalho desses alunos com nenhum subconstruto.

Não se evidencia, no trabalho dos alunos pesquisados com os subconstrutos *razão*, *operador*, *quociente*, *medida* e *probabilidade*, nenhuma característica de qualquer dos Três Mundos da Matemática que não tenha se manifestado nas questões do subconstruto *parte-todo*. Dessa forma, acreditamos que há uma influência dele no trabalho com outros subconstrutos.

Por outro lado, entendemos que o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática, utilizado nesta pesquisa para a análise dos dados, nos permitiu chegar a conclusões diferentes das outras pesquisas, dada a possibilidade de analisarmos as questões com outro olhar, isto é, ir mais a fundo no que o aluno analisou, observou ou pensou para responder a questão, ao invés de analisar sucessos ou insucessos em cada subconstruto. As lentes dos Três Mundos da Matemática pareceram nos mostrar que existem características simbólicas e formais que são *particulares a cada subconstruto*, e que, talvez, sejam desenvolvidas somente com a familiaridade com o próprio subconstruto, e não somente com o *parte-todo*. Por exemplo, as características do mundo formal presentes nos subconstrutos *razão* e *medida* não são as mesmas do *parte-todo*, e precisam de atenção especial, visto que *medida*, por exemplo, é um subconstruto apresentado como de muita dificuldade tanto por parte de alunos quanto de professores. Pretendemos que novas pesquisas sejam feitas nessa direção, para que possamos comprovar ou refutar esta conjectura.

Além dessa, temos também a conjectura de que características formais de todos os subconstrutos são um fator decisivo para o aprendizado de números racionais na forma fracionária. Destacamos que a quantidade de acertos na Questão 13 não foi a mesma das outras questões referentes ao subconstruto *parte-todo*, mas bem inferior àquelas. A principal diferença entre essas questões é a necessidade de dividir a figura da Questão 13 em partes equivalentes, uma característica do mundo formal, o que não foi feito por esses alunos. Assim, a impossibilidade de uso de somente características corporificadas impediu sucesso nessa questão. Mesmo a própria escrita do número racional na forma fracionária não foi suficientemente estabelecida por meio desse subconstruto e dessas características. Tal fato nos leva a crer que não somente o subconstruto *parte-todo* é essencial para o aprendizado desses números, mas também as características formais devem ser consideradas no ensino.

REFERÊNCIAS

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). *Rational-Number Concepts.* New York, USA: Academic Press.

Brasil. Relatório SAEB - Matemática. (2005). *Sistema de Avaliação do Ensino Básico.* Brasília: INEP, MEC.

Brasil. Relatório SAEB - Matemática. (2007). *Sistema de Avaliação do Ensino Básico.* Brasília: INEP, MEC.

Brasil. Relatório SAEB - Matemática. (2009). *Sistema de Avaliação do Ensino Básico.* Brasília: INEP, MEC.

Caraça, B. D. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática* (1a ed.). Lisboa, Portugal: Tipografia Matemática.

Chagas, F. A. (2010). *Compreendendo as estratégias utilizadas por crianças para resolver problemas de multiplicação e divisão, envolvendo coleção e não-coleção.* Monografia - Especialização em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Faculdade de Psicologia, Recife.

Charalambous, C., & Pitta-Pantazi, D. (2005). Drawing on a Theoretical Model to Study Students Understandings of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), pp. 293-316.

Cortina, J. L., Visnovska, J., & Zuniga, C. (2012). Alternative Starting Point for Teaching Fractions. Em J. Dindyal, L. P. Cheng, & S. F. Ng (Ed.), *Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia.* Singapore: MERGA.

Damico, A. (2007). *Uma investigação sobre a formação inicial de professores de Matemática para o ensino dos números racionais no ensino.* Tese de Doutorado em Educação Matemática, Pontifíica Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo.

Ferreira da Silva, M. J. (2005). *Investigando os saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a 5a série.* Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1995). The rule of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education*, pp. 3-17.

Freire, P. C. (2011). *Uma jornada por diferentes Mundos da Matemática investigando os números racionais na forma fracionária.* Dissertação de Mestrado, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo.

Garcia Silva, A. F. (2007). *O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objetivo de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações.* Tese de Doutorado, PUC/SP, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Gitirana, V., Campos, T. M., Spinillo, A., & Magina, S. (no prelo). *Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.* São Paulo, SP, Brasil: PROEM.

Gray, E., & Tall, D. O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), pp. 115-141.

Kieren, T. (1976). *On mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational nunbers.* Columbus.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: its intuitive and formal development. Em J. Hiebert, & M. Behr, *Number Concepts and Operations in teh Middle Grades* (pp. 80-162). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lima, R. N. (2007). *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática.* Tese (Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo.

Magina, S., Santos, A., & Merlini, V. (2010). Quando e Como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental? Contribuição para o debate. *Revista EMTEIA, 1*(1).

Merlini, V. L. (2005). *O Conceito de Fração em seus Diferentes Significados: Um Estudo Diagnóstico com Alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo.

Moutinho, L. V. (2005). *Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC/SP, São Paulo.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Bell, D., Evans, D., & Wade, J. (2008). Children's Understanding of Fractions. *Anais do encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics.* Oxford.

Relatório OECD (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico. (2009). *The Programme For Internationa Student Assessment.* Acesso em 5 de maio de 2013, disponível em http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf

Relatório OECD (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico). (2011). *The Programme For International Student Assessment.* Acesso em 13 de maio de 2013, disponível em http://www.pisa. oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf

Romanatto, M. C. (1997). *Número racional: relações necessárias à sua compreensão.* Tese de Doutorado em Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Rudio, F. V. (2001). *Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica* (32a ed.). Petrópolis, RJ, Brasil: Vozes.

São Paulo. Relatório SARESP - Matemática. (2009). *Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.* São Paulo, SP, Brasil: SEE.

Tall, D. (2013). *How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics* (1a ed.). New York, NY, USA: Cambridge University Press.

Tall, D. O. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. *Proceedings of the 28th Meeting of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. 4*, pp. 281-288. Bergen, Norway: Bergen.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. Em R. Lesh, & M. Landau, *Acquisitions of mathematics concepts and procedures* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. Em H. Hiebert, & M. Behr, *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*, pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? Em H. Guershon, & J. Confrey, *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. Em J. Brun, *Didáctica das Matemáticas* (M. J. Figueiredo, Trad., pp. 155-191). Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.

Submetido: setembro de 2013

Aceito: junho de 2014