DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2022v15n1p20-26

Vetores no Ensino Médio: um Percurso à Luz dos Três Mundos da Matemática

Vectors in High School: a Route in the Light of Three Worlds of Mathematics

Wagner Gomes Barroso Abrantes[a]; Maria Elisa Esteves Lopes Galvão[b]

[a]Universidade Anhanguera de São Paulo. SP, Brasil.
[b]Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística. SP, Brasil.
*E-mail: elisa@ime.usp.br

Resumo

O presente artigo trata do recorte de uma atividade diagnóstica realizada com alunos voluntários do primeiro ano do Ensino Médio a respeito dos "já encontrados" sobre o objeto matemático vetor. O objetivo dessas atividades foi verificar se os alunos estavam aptos a corporificar o conceito de vetor como deslocamento e velocidade, bem como associá-lo à representação como um segmento de reta orientado. Este recorte contempla duas atividades, parte de uma atividade diagnóstica, subdivididas, que foram aplicadas de modo que os alunos resolvessem de forma individual. Seguiu-se a orientação metodológica do Design Experiment e o aporte teórico considerado foi a Teoria dos Três Mundos da Matemática, de David Tall. Ficaram evidenciadas as dificuldades dos estudantes em relação à soma vetorial associada à composição de deslocamentos, ainda que a maioria a representasse como um segmento orientado, e também as dificuldades com as possibilidades da velocidade ser considerada uma grandeza vetorial ou escalar, dependendo do contexto. Concluímos que as dificuldades apresentadas pelos alunos na corporificação do vetor como deslocamento e como velocidade, bem como suas representações como segmento de reta orientado têm origem nos "já encontrados", isto é, nas experiências vivenciadas por eles na disciplina de Física.

Palavras-chave: Vetor. Corporificação. Deslocamento. Velocidade.

Abstract

This article deals with the clipping of a diagnostic activity carried out with volunteer students from the first year of high school regarding the "met-before" of the vector mathematical object. The objective of these activities was to verify if the students were able to embody the concept of vector as route and speed, as well as to associate it with the representation of a segment of an oriented line. This clipping includes two activities, part of a diagnostic activity, subdivided, which were applied so that the students could solve them individually. The Design Experiment methodological orientation was followed and the theoretical contribution considered was the Theory of the Three Worlds of Mathematics, by David Tall. The difficulties of the students in relation to the vectorial sum associated with the composition of route were evidenced, although the majority represented it as na oriented segment, and also the difficulties with the possibilities of the speed being considered a vectorial quantity or scalar, depending on the context. We conclude that the difficulties presented by the students in the embodiment of the vector as route and as speed, as well as their representations as a segment of the oriented line have their origin in the "met-before", that is, in the experiences lived by them in the subject of Physics.

Keywords: *Vectors. Embodiment. Route. Speed.*

1 Introdução

A espécie humana possui diversas habilidades que a diferenciam de outras espécies animais. Algumas dessas habilidades são natas, isto é, nos acompanham desde o momento do nosso nascimento. Outras habilidades são adquiridas no transcurso de nossas vidas, a partir das experiências vividas. Tall (2013, p. 21) cita esses dois tipos de habilidades, inatas ou adquiridas, e as classifica como os atributos que todos nós compartilhamos e os atributos construídos com as experiências, respectivamente.

Dentre os atributos que todos nós compartilhamos, Tall (2013, p. 21) destaca três: reconhecimento, repetição e linguagem. O primeiro está ligado à capacidade sensorial e nos permite reconhecer padrões, semelhanças e distinções entre objetos, nos permitindo identificá-los e diferenciá-los por suas características próprias. O segundo se conecta à nossa capacidade motora que nos permite realizar uma sequência de ações repetidas vezes até que possamos executá-la naturalmente, de maneira automática. O terceiro corresponde a uma habilidade própria da espécie humana, que é fundamental para a descrição e discussão de fenômenos, nos permitindo construir estruturas complexas de conhecimentos a respeito deles. Essas três características são fundamentais para a construção do pensamento matemático em longo prazo.

Em relação àqueles atributos que são adquiridos a partir das experiências vividas, Tall (2013, p. 22) afirma que o desenvolvimento intelectual depende de como nós usamos nossas experiências para lidar com novas situações, de forma que aquilo que aprendemos em um determinado estágio irá influenciar a nossa maneira de pensar no próximo estágio.

Esses conhecimentos mobilizados e influenciadores foram abordados por Tall (2013, pág. 23) e traduzidos por Lima (2007, p. 86) como "já-encontrados", definidos formalmente como uma estrutura que temos no nosso cérebro em um determinado momento como resultado de experiências que vivenciamos antes.

Nesse sentido, cada experiência vivida irá gerar um estimulo que vai interagir com os estímulos oriundos de experiências anteriores. Essa interação, caso aconteça de forma harmônica, irá proporcionar a evolução do indivíduo. Caso contrário, poderá colocá-lo em conflito. Moreira e David (2016, p. 32) afirmam que esse é um processo de construção dialética que se estabelece entre o conhecimento "novo" e o "antigo", no desenvolvimento da aprendizagem.

A partir deste contexto, é importante ressaltar que esta pesquisa consiste em parte de uma avaliação diagnóstica realizada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular no Rio de Janeiro, com o objetivo de conhecer os "já-encontrados" desses alunos a respeito do objeto matemático vetor verificar se os alunos estavam aptos a corporificar as grandezas deslocamento e velocidade e associa-las com a representação de um vetor na forma de um segmento de reta orientado. Entender as experiências, conhecimentos e conflitos que esses alunos apresentam a respeito deste objeto subsidiarão uma pesquisa maior, realizada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo.

2 Fundamentação Teórica: os Três Mundos da Matemática

Os Três Mundos da Matemática estão relacionados às experiências referentes ao desenvolvimento do conhecimento e construção do conceito matemático em longo prazo. Tall (2013, p.16) associa a aprendizagem da matemática a três distintos, porém interligados, mundos da matemática: o mundo conceitual corporificado, o proceitual simbólico e o axiomático formal.

O mundo conceitual corporificado, ou apenas corporificado, é dos objetos corporificados, tais como de gráficos, tabelas, construções geométricas, entre outros, e que podem ser fisicamente manipulados ou concebidos mentalmente.

O mundo proceitual simbólico, ou apenas simbólico, é aquele que utiliza os símbolos para cálculos e manipulações na álgebra e na aritmética, por exemplo, inter-relacionando processos e conceitos. Esse mundo leva em consideração os proceitos, caracterizado por Tall (2013) como símbolos que representam, ao mesmo tempo, um processo e um conceito.

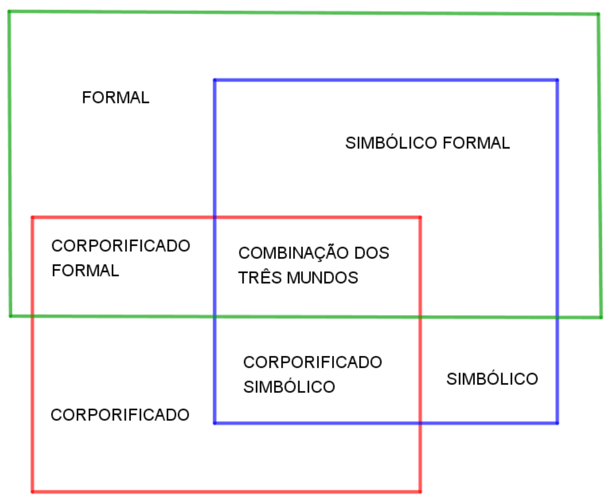
O mundo axiomático formal, ou apenas formal, é composto pelos axiomas, teoremas, propriedades, definições que formam o sistema axiomático com o qual se desenvolve a matemática formal.

É importante destacar que os três mundos são independentes, isto é, não existe uma hierarquia entre esses mundos. Além disso, a trajetória percorrida ao longo dos três mundos varia de pessoa para pessoa. Tall (2004, p.286, tradução nossa) afirma que

> À medida que um indivíduo viaja através de cada mundo, vários obstáculos que ocorrem no caminho exigem que ideias anteriores sejam reconsideradas e reconstruídas de modo que a jornada não é a mesma para cada viajante. Pelo contrário, indivíduos diferentes lidam com os vários obstáculos de maneiras diferentes, que levam a uma variedade de desenvolvimentos pessoais, alguns dos quais permitem ao indivíduo progredir através do aumento da sofisticação de um modo significativo, enquanto outros vão em direção às concepções alternativas, ou mesmo falhas.

Apesar de serem independentes, na medida em que o indivíduo percorre os três mundos no desenvolvimento de um dado objeto matemático, os mundos vão interagindo entre si (Figura 1). Segundo Tall (2013), na interação "*corporificado simbólico"* é onde as ações corporificadas dão origem às operações simbólicas e o simbolismo corporifica representações. Na interação "*corporificado formal*" o corporificado dá suporte às definições e deduções formais. Na interação "*simbólico formal*" a estrutura simbólica é deduzida e definida de maneira formal.

Figura 1 – Interação entre os Três Mundos da Matemática



Fonte: Tall (2013, tradução e adaptação nossas)

Sobre a validação nos diferentes mundos da matemática, o artigo de Watson, Spyrou & Tall (2003) traz que, mesmo com o mundo formal se manifestando nos mundos corporificado e simbólico, cada um desses mundos tem uma distinta noção de validação. No mundo corporificado, a validação se dá pela percepção e pelo experimento. Já no mundo simbólico, a verdade pode ser testada pela manipulação ou uso de algoritmos. Já no mundo formal, há a necessidade de axiomas para provar a veracidade de uma afirmação.

2.1 O Vetor no Contexto dos Três Mundos da Matemática

Segundo Watson, Spyrou & Tall (2003), a corporificação dos vetores está na Física e na Mecânica, na representação como força, transformação, velocidade, aceleração ou como qualquer outro objeto caracterizado pela magnitude e direção. O mundo simbólico é constatado a partir da translação (em n dimensões), na representação do vetor como uma matriz coluna (ou a representação em coordenadas) e das operações algébricas oriundas dessas representações. Já o mundo formal é caracterizado e definido pela estrutura de espaço vetorial subjacente ao conjunto formado por todos esses elementos.

A preocupação de Watson, Spyrou & Tall (2003) está em como os estudantes serão apresentados a esse tema complexo. Eles acreditam que a abordagem no âmbito da Física tem uma complexidade adicional, pois as experiências físicas podem ocasionar diferentes significados sensoriais. Isso pode levar a uma gama de crenças conscientes e inconscientes que são capazes de produzir obstáculos na aprendizagem. Os pesquisadores exemplificam que a corporificação do vetor como uma rota leva ao uso da lei do triângulo na soma de vetores, enquanto que a corporificação do vetor como força leva ao uso da lei do paralelogramo, podendo causar equívocos significantes na mecânica.

Watson e Tall (2002) apresentaram a visão que um aluno teve ao trabalhar a corporificação do vetor na translação de objetos. Esse aluno verificou que sucessivas translações teriam o mesmo efeito que apenas uma única translação, desde que essas sucessivas translações tivessem o mesmo ponto de origem e o mesmo ponto de chegada que a translação composta por um único movimento. Nesse contexto, o aluno, por analogia, percebeu que a soma dos vetores corporificados pelas sucessivas translações corresponderia ao vetor corporificado por esse único movimento de translação.

Watson, Spyrou e Tall (2003) argumentam que o conceito matemático de vetor, no Ensino Médio, está muito ligado aos mundos corporificado e simbólico. Sendo assim, a sugestão seria introduzir esse conceito a partir da translação de um objeto geométrico no plano. Os pontos positivos ressaltados pelos autores seriam o sentido de movimento dinâmico e o conceito de flecha como um objeto, como propusemos em nossa pesquisa. Da mesma forma, a representação simbólica dos componentes x, y em uma matriz coluna ou um par ordenado pode oferecer a ideia de quantidade, tendo um duplo significado de processo e conceito.

3 Metodologia

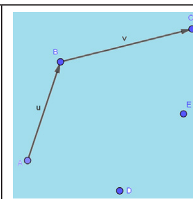
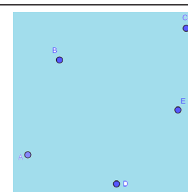
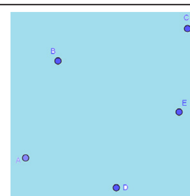
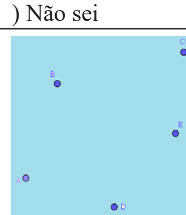
Apresentaremos um recorte da parte diagnóstica de uma pesquisa aprovada pelo Comitê de Ética da Universidade Anhanguera de São Paulo por meio do parecer 2.687.784, cuja coleta de dados já foi concluída e seguiu as orientações metodológicas do Design Experiment. Para fazer a análise dos "já-encontrados" em relação ao objeto matemático vetor, foi aplicada uma atividade realizada individualmente pelos alunos voluntários. Participaram do diagnóstico quatorze alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola particular do Rio de Janeiro, que se voluntariaram a participar da pesquisa. Atribuímos, à listagem dos nomes em ordem alfabética, os códigos A1, A2,..., A14, respectivamente.

É importante ressaltar que esses alunos já tinham iniciado o contato com o objeto matemático vetor na disciplina de Física. A estratégia utilizada pelo professor foi a de iniciar esse contato apresentando o cálculo vetorial básico, antes mesmo de corporificá-lo como uma grandeza que possui módulo, direção e sentido. Nesse contexto, o professor seguiu a seguinte sequência: abordou o vetor como segmento de reta orientado, passou pelas regras do triângulo e do paralelogramo para explicar a soma de vetores e chegou à decomposição de vetores e a consequente utilização da trigonometria no triângulo retângulo como ferramenta para as soluções dos problemas puramente matemáticos. Na sequência, foi apresentada aos alunos a corporificação do vetor como velocidade circular. Cabe ressaltar também que o professor optou por não apresentar o vetor no mundo simbólico, isto é, como uma matriz coluna (ou um par ordenado) cujos elementos são as coordenadas do vetor, conforme afirma Watson, Spyrou & Tall (2003). Esta pesquisa teve início no período em que os alunos estavam iniciando o estudo das Leis de Newton, corporificando o vetor como força.

Na atividade diagnóstica foram propostas, dentre outras, duas questões referentes ao tema. A primeira foi subdividida em cinco itens, enquanto a segunda foi subdividida em três itens.

A primeira questão (Quadro 1) teve como objetivo verificar se os alunos estão aptos a corporificarem o vetor como deslocamento, a partir da percepção de que ele é uma grandeza que pode ser representada por um vetor como segmento de reta orientado. Alguns conceitos, como vetores opostos e uso da regra do triângulo para soma de vetores, são explorados nessa questão.

Quadro 1 – Enunciado da primeira questão

Questão 1: Um navio encontra-se navegando no oceano Atlântico e se desloca do ponto A para o ponto C, passando por B, conforme figura ao lado. O vetor **u** representa o deslocamento do navio do ponto A para o ponto B; e o vetor **v** representa o deslocamento do navio do ponto B para o ponto C.	
a) Suponha que um navio parta do ponto A para o ponto C, sem escalas. Represente na figura ao lado, com apenas um vetor, o deslocamento desse navio.	
b) Suponha que um navio parta do ponto C para o ponto A, sem escalas. Represente na figura ao lado, com apenas um vetor, o deslocamento desse navio.	
c) O vetor do item a) é igual ao vetor do item b)? ( ) Sim ( ) Não ( ) Não sei	
d) Suponha que um navio parta do ponto A com destino ao ponto C, e deseja fazer apenas uma escala em um ponto diferente de B. Utilize apenas dois vetores para representar, na figura ao lado, o deslocamento desse navio.	

e) Em relação ao vetor construído no item a), é possível afirmar: (É permitido que o aluno assinale mais de uma alternativa, caso julgue necessário).
(   ) Não sei. Nunca estudei vetor.
(   ) É a diferença dos vetores construídos no item d).
(   ) É a diferença dos vetores **u** e **v**, citados no enunciado.
(   ) É a soma dos vetores construídos no item d).
(   ) É a soma dos vetores **u** e **v**, citados no enunciado.
(   ) É o produto dos vetores construídos no item d).
(   ) É o produto dos vetores **u** e **v**, citados no enunciado.

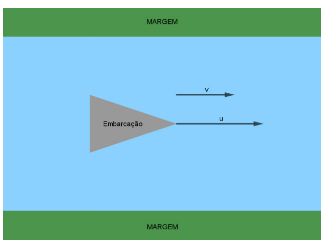
Fonte: Dados da pesquisa

A segunda questão (Quadro 2) teve como objetivo investigar se os alunos estão aptos a corporificarem o vetor como velocidade, a partir da percepção de que ela é uma grandeza que pode ser representada por um vetor como segmento de reta orientado. Alguns conceitos, como soma de vetores na mesma direção e uso da regra do paralelogramo para soma de vetores perpendiculares, são explorados nessa questão.

Quadro 2 – Enunciado da segunda questão

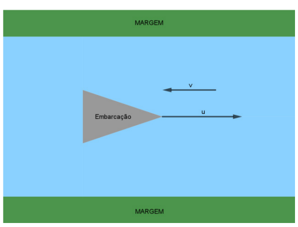
Questão 2: Uma embarcação possui velocidade em relação à água (proporcionada pelos seus motores) igual a 9 m/s , representada pelo vetor **u** nas figuras a seguir. Essa embarcação navega em um rio cuja correnteza tem uma velocidade igual a 6 m/s, representada pelo vetor **v**, nas figuras a seguir. Portanto, ela se movimentará (em relação à terra) com uma velocidade **w**, resultante de **u** e **v**. (Adaptado do livro **Física: contexto & aplicações** - Volume 1)

a) Calcule a velocidade **w** da embarcação quando ela está navegando a favor da correnteza, conforme figura ao lado.



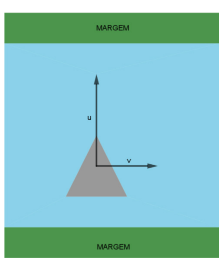
Embarcação navegando a favor da correnteza

b) Calcule a velocidade **w** da embarcação, quando ela está navegando contra a correnteza, conforme figura ao lado.



Embarcação navegando contra a correnteza

c) Calcule a velocidade **w** da embarcação, quando ele está navegando de uma margem à outra, perpendicularmente à correnteza, conforme figura ao lado.



Embarcação navegando perpendicular à correnteza

Fonte: Dados da pesquisa.

A coleta de dados para essa atividade diagnóstica foi realizada em um encontro de uma hora e quarenta minutos de duração. Os participantes trabalharam indivudualmente, registrandos suas respostas por escrito. Apresentaremos, na sequência, a análise dos protocolos que contêm as respostas dos alunos a essas questões.

4 Análise dos Protocolos

A análise dos protocolos referentes às duas questões citadas nos Quadros 1 e 2 se dará por questão e será quantitativa e qualitativa.

4.1 Análise dos dados obtidos na primeira questão

Iniciaremos essa análise apresentando, em números, o desempenho dos alunos (Quadro 3). Em seguida, faremos uma análise mais minuciosa dos protocolos dos alunos.

Quadro 3 - Análise quantitativa de acertos da primeira questão

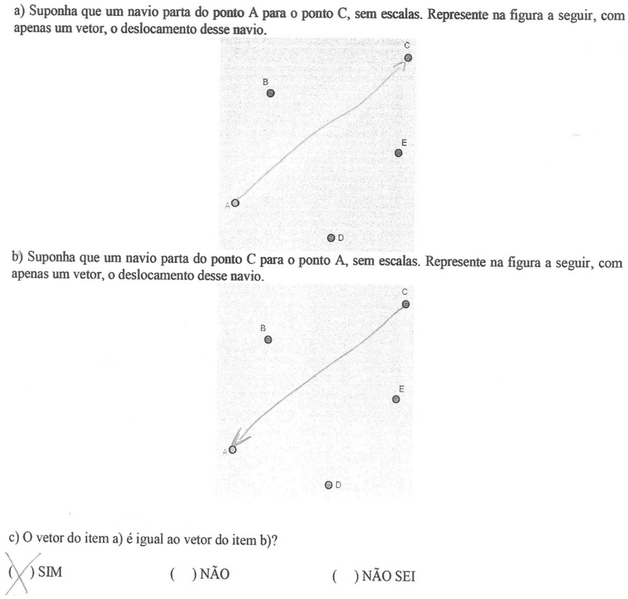
	Integralmente correta	Parcialmente correta	Incorreta	Em branco
1ª questão	00	11	03	00
Análise da primeira questão por itens				
Item a	11	00	03	00
Item b	11	00	03	00
Item c	09	00	05	00
Item d	11	00	03	00
Item e	00	02	11	01

Fonte: Dados da pesquisa.

Foi observado que 11 alunos responderam a primeira questão, de maneira parcialmente correta. No item a, eles representaram corretamente o movimento do navio do ponto A para o ponto C por meio de um segmento de reta orientado com a origem em A e a extremidade em C. Analogamente, no item b esses alunos representaram o movimento do navio partindo do ponto C para o ponto A por meio de um segmento de reta orientado com a origem em C e a extremidade em A. Esses dois itens nos permitiu evidenciar que esses 11 alunos representaram o deslocamento do navio por meio de um segmento de reta orientado, isto é, eles conseguiram corporificar o vetor como deslocamento.

Dentre esses onze alunos, apenas A1 (Figura 2) e A13 não identificaram a diferença entre os vetores dos itens **a** e **b**, o que culminou com o erro do item **c**. Isso evidencia uma falha na corporificação do vetor como deslocamento. Para estes dois alunos, o deslocamento do ponto A para o ponto C pode ser representado pelo mesmo vetor utilizado para representar o deslocamento do ponto C para o ponto A. Além disso, essa resposta representa uma dificuldade conceitual a respeito de vetores opostos.

Figura 2 - Solução do aluno A1 (Itens **a**, **b**, e **c** da primeira questão)

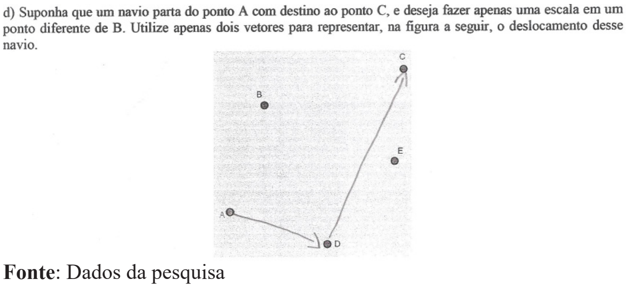


Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda sobre os três primeiros itens da primeira questão, os alunos A2, A12 e A14 identificaram os vetores dos itens a e b por meio de um segmento de reta que une os pontos A e C. Isso evidencia que esses três alunos não conseguiram corporificar adequadamente o vetor, na forma de segmento de reta orientado, como deslocamento. Sendo assim, eles não conseguiram diferenciar os vetores que representam o movimento do navio partindo de A para C e, tampouco partindo de C para A, o que prejudicou a resolução de toda a primeira questão.

Todos os onze alunos que representaram corretamente as respostas para os itens a e b corporificaram os deslocamentos propostos no item d com um segmento de reta orientado e conseguiram acertar este item. Há de se destacar que três participantes optaram por fazer a escala no ponto D, conforme a solução do aluno A1 (Figura 3), e oito por fazerem a escala no ponto E.

Figura 3 - Solução do aluno A1 (Item **d** da primeira questão)



Fonte: Dados da pesquisa

No item **e**, os alunos tinham então duas situações para serem analisadas e relacionadas:

- Situação 1: a corporificação de dois vetores como dois deslocamentos sucessivos de um navio partindo do ponto A até o ponto C, com escala em um terceiro ponto a escolha deles. Nessa situação, a extremidade do vetor cuja origem está em A se conecta, no ponto qualquer escolhido aluno, à origem do vetor cuja extremidade está em C. Essa situação foi descrita no enunciado e também trabalhada no item **d**; e

Situação 2: a corporificação de apenas um vetor como deslocamento do navio do ponto A direto para o ponto C. Nessa situação, há apenas um vetor com origem em A e extremidade em C. Essa situação foi trabalhada no item **a**.

É importante ressaltar que ambas as situações, apesar não apresentarem a mesma dinâmica, possuem o mesmo efeito: o deslocamento do navio do ponto A para o ponto C.

Nenhum aluno apresentou a resolução integralmente correta. Havia duas possíveis respostas que deveriam ser assinaladas pelos alunos. O vetor construído no item **a** é a soma dos vetores construídos no item **d** e também a soma dos vetores **u** e **v** citados no enunciado. Ocorreram quatro tipos distintos de soluções:

- Um aluno deixou este item em branco;
- Nove alunos identificaram o vetor construído no item **a** como sendo o produto de vetores citados no enunciado;
- Dois alunos identificaram o vetor do item **a** como sendo a diferença entre os vetores construídos no enunciado; e
- Os alunos A1 e A8 identificaram corretamente o vetor do item **a** como sendo a soma entre os vetores construídos no item d. Esses dois alunos acertaram parcialmente o item e, pois eles não identificaram que também há a mesma relação com os vetores citados no enunciado.

Os dados coletados neste item evidenciam a dificuldade que os alunos têm em relacionar as duas situações citadas como soma de vetores. Faltou aos alunos a percepção de que a soma de dois vetores que corporificam dois deslocamentos sucessivos corresponde a um único vetor que corporifica um único deslocamento cujo efeito seja o mesmo.

4.2 Análise dos dados obtidos na segunda questão

Ao iniciarmos a análise dos protocolos referente à segunda questão, apresentaremos o desempenho dos alunos de forma quantitativa (Quadro 4) e, em seguida, daremos início a uma análise mais apurada dos dados obtidos.

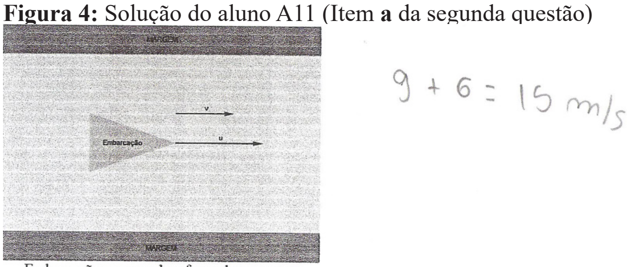
Quadro 4 - Análise quantitativa de acertos da segunda questão

	Integralmente correta	**Parcialmente correta**	**Incorreta**	**Em branco**
2ª questão	00	10	00	04
Análise da segunda questão por itens				
Item a	00	10	00	04
Item b	00	10	00	04
Item c	00	08	01	05

Fonte: Dados da pesquisa.

No item **a**, com os vetores e na mesma direção e mesmo sentido, dez alunos realizaram a operação de maneira escalar, somando os módulos desses vetores, conforme mostra a solução do aluno A11 (Figura 4). Apesar de esses alunos terem encontrado o valor correto do módulo da velocidade resultante, não foi dado um tratamento vetorial ao cálculo da velocidade, já que não apresentaram a direção e o sentido da velocidade resultante, ou seja, não se passou à corporificação na representação.

Figura 4: Solução do aluno A11 (Item **a** da segunda questão)

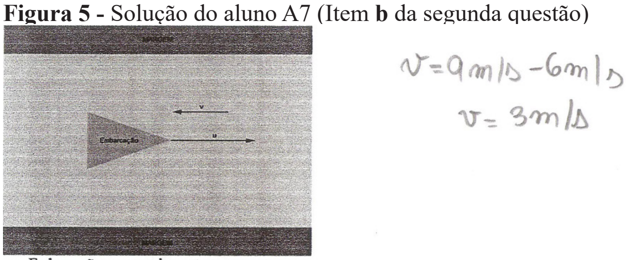


Embarcação navegando a favor da correnteza

Fonte: Dados pesquisa.

No item **b**, com os vetores e na mesma direção e sentidos opostos, os mesmos dez alunos realizaram a operação de forma análoga ao item anterior, isto é, de maneira escalar, subtraindo os módulos dos vetores, conforme mostra a solução do aluno A7 (Figura 5). Assim como ocorreu no item anterior, esses alunos encontraram o valor correto do módulo da velocidade resultante, mas tampouco deram o tratamento vetorial para o cálculo, pois não apresentaram a direção e o sentido da velocidade resultante, novamente, falhando na representação.

Figura 5 - Solução do aluno A7 (Item **b** da segunda questão)



Embarcação navegando contra a correnteza

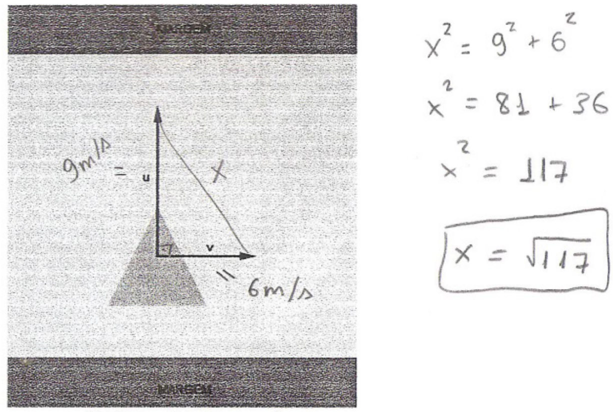
Fonte: Dados da pesquisa

As análises dos dados obtidos nos itens **a** e **b** evidenciam o comprometimento da corporificação do vetor como velocidade, haja vista que nenhum aluno deu o tratamento vetorial à velocidade. Os alunos não relacionam a velocidade a uma grandeza com módulo, direção e sentido. Essa dificuldade de corporificação do vetor à velocidade fica ainda mais evidente nos protocolos dos quatro alunos que deixaram esses itens em branco.

No item **c**, em que os dois vetores e estavam perpendiculares entre si, dividiremos as soluções em três grupos:

- oito alunos ligaram a origem do vetor à extremidade do vetor por meio de um segmento de reta não orientado, chegaram ao triângulo retângulo e calcularam o valor da medida da hipotenusa utilizando o Teorema de Pitágoras, conforme mostra as soluções do aluno A3 (Figura 6). Mesmo que os alunos tenham encontrado o valor correto do módulo do vetor da velocidade resultante, eles não se preocuparam em apresentar a direção e o sentido do vetor. Isso evidencia a dificuldade de corporificação do vetor como velocidade, com módulo, direção e sentido.

Figura 6 - Solução do aluno A3 (Item **c** da segunda questão)



Embarcação navegando perpendicularmente à correnteza

Fonte: Dados da pesquisa.

- Um aluno resolveu este item a partir da subtração entre os módulos de e . Sendo assim, não calculou sequer o valor correto do módulo do vetor da velocidade resultante.
- Cinco alunos deixaram este item em branco.

A análise das soluções do item **c** também será dividida em três grupos respectivamente conforme dividimos as soluções. As evidências obtidas dessa análise foram:

- oito alunos buscaram a regra do triângulo como forma de resolver a questão. Porém, a dificuldade na compreensão de que velocidade é uma grandeza vetorial comprometeu a corporificação do vetor como velocidade e a escolha da estratégia de resolução desse problema, haja vista que a regra do paralelogramo seria mais apropriada;
- o aluno que buscou a solução escalar não foi capaz de corporificar a velocidade como uma grandeza vetorial, com módulo, direção e sentido; e
- dentre os cinco alunos que deixaram este item em branco, quatro deixaram toda a segunda questão em branco. Nesse contexto, percebe-se que a corporificação do vetor como velocidade está demasiadamente comprometida.

Em todos os casos analisados, em virtude do aluno visualizar a velocidade como uma grandeza escalar, não houve a preocupação de representá-la como um segmento de reta orientado.

5 Considerações Finais

A partir da análise da primeira questão, é possível concluir que nove alunos realmente conseguiram corporificar o vetor como deslocamento entre dois pontos e dois alunos apresentaram falhas nesse processo de corporificação. Porém, quando se trata de corporificação de vetor como deslocamentos sucessivos e sua consequente relação de efeito com a corporificação do vetor soma, percebe-se que há um comprometimento de todos os alunos contribuindo como obstáculo para a utilização da regra do triângulo. Esse comprometimento pode ter ocorrido devido ao contato entre esses alunos e o objeto matemático vetor ter sido corporificado apenas como velocidade angular e força na disciplina de Física. Isso corrobora com a afirmação de Watson, Spyrou e

Tall (2003) de que a corporificação do vetor como uma rota leva ao uso da lei do triângulo na soma de vetores, enquanto que a corporificação do vetor como força leva ao uso da lei do paralelogramo.

É importante destacar também que três alunos explicitaram falhas conceituais de vetor, o que comprometeu a corporificação do vetor como deslocamento em todos os itens da primeira questão.

Nos dois primeiros itens da segunda questão, vimos uma dificuldade de corporificação do vetor como velocidade por todos os alunos. Os alunos trataram a velocidade como uma grandeza escalar, mas como em ambos os itens os vetores que representavam as velocidades da embarcação e da correnteza estavam na mesma direção, a maioria dos alunos conseguiu calcular corretamente o módulo do vetor resultante, sem especificar sua direção em sentido. Essa visão da velocidade como uma grandeza escalar pode ser consequência do estudo da cinemática na disciplina de Física.

Essa visão comprometeu a solução do terceiro item da segunda questão, pois a direção da velocidade do navio estava perpendicular à direção da velocidade da correnteza. Apesar da regra do paralelogramo ser mais adequada para a resolução desse problema, a maioria dos alunos utilizou de maneira equivocada a regra do triângulo, buscando calcular o módulo do vetor da velocidade resultante, sem preocupação com sua direção e sentido.

Em resumo, nas análises dos protocolos das duas questões, foi possível identificar comprometimentos de corporificação do vetor tanto no deslocamento como na velocidade. Na primeira grandeza, essa dificuldade se acentua na soma de vetores, enquanto que na segunda grandeza a dificuldade está em identificá-la como uma grandeza dotada de módulo, direção e sentido. Além disso, a maioria dos alunos conseguiu representar o deslocamento como segmento de reta orientado, mas a visão escalar da velocidade não gerou a preocupação de representarem a velocidade como um segmento de reta orientado.

Nosso entendimento é que a sequência didática adotada na disciplina de Física pode ocasionar alguns "vícios" que podem gerar conflitos na corporificação do vetor como deslocamento e velocidade e na sua consequente representação como segmento orientado. Esse entendimento vai ao encontro de Watson, Spyrou e Tall (2003), que afirmam que as experiências físicas podem ocasionar diferentes significados sensoriais e podem levar a uma gama de crenças conscientes e inconscientes que são capazes de produzir obstáculos na aprendizagem.

Referências

Lima, R. N. (2007). Equações algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática**.** Tese de Doutorado. PUC-SP.

Máximo, A., Alvarenga, B. (2013). Física: contexto & aplicações. Volume 1 – Ensino Médio. São Paulo: Scipione.

Moreira, P. C., Davis, M. M. (2016). A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Tall, D. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically: exploring the three worlds of mathematics. Cambridge: Cambridge University Press.

Tall, D. (2004) Thinking Through Three Worlds of Mathematics. Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. 4, 281-288.

Watson, A., Spyrou P., Tall, D. (2003). The Relationship between physical embodiment and mathematical simbolism: the concept of vector. The mediterranean Journal of Mathematical Education, 73-97.

Watson, A., Tall, D. (2002). Embodied action, effect and symbol in mathematical growth. Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education, 369-376.