O USO DE PONTOS DE REFERÊNCIA NA RESOLUÇÃO DE ADIÇÃO DE FRAÇÕES POR CRIANÇAS

Alina Galvão Spinillo[1]
Universidade Federal de Pernambuco
Maria Soraia Silva Cruz
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco

RESUMO

O presente estudo investigou o papel desempenhado por diferentes pontos de referência na resolução de adição de frações por estimativa. Crianças (8-9 anos) de classe média alunas do ensino fundamental resolveram as mesmas adições de frações em diferentes situações: usando o referencial de metade (Tarefa 1) e usando outros referenciais (Tarefa 2). Observou-se que as crianças solucionavam apropriadamente as adições com base no referencial de metade, o mesmo não ocorrendo em relação a outros referenciais. Também foi observado que as estratégias adotadas com base no referencial de metade eram mais sofisticadas do que aquelas empregadas com base em outros referenciais. O referencial de metade levava a criança a usar estratégias que envolviam a noção de equivalência que é considerada crucial ao conceito de fração. A principal conclusão foi que este referencial facilita a emergência de formas de pensar que favorecem a resolução de adição de frações por crianças mais do que outros referenciais. Implicações educacionais são discutidas.

Palavras-Chave: Adição de frações, referencial de metade, crianças.

ABSTRACT

The present study has investigated the role played by different referential points in the solving of mathematical problems involving the addition of fractions by estimation. Middle class children (8 - 9 years old) attending elementary school have solved the same mathematical problems involving the addition of fractions in different situations: using the referential of half (Task 1) and using other referential (Task2). It

[1] alinaspinillo@hotmail.com

was observed that whereas the children could appropriately solve the additions based on the referential of half, this was not the case when they made use of other referential. It was further observed that the strategies based on the referential of half were more sophisticated than those based on other referential. The referential of half led the child to use strategies which involved the notion of equivalence, which is considered crucial to the concept of fraction. Therefore the main conclusion was that this referential leads to ways of thinking which enable the solution of the addition of fractions by children more easily than other referential points. Educational implications are discussed.

Keywords: Addition of fractions, referential of half, children.

O conceito de fração é reconhecido, tanto entre pesquisadores como entre professores, como sendo uma noção de difícil compreensão, sendo diversas as interpretações dadas acerca das causas e natureza dessa dificuldade que se acentua quando as crianças são solicitadas a operar com frações. No caso da adição de frações, tema do presente artigo, pesquisas mostram que as dificuldades enfrentadas muitas vezes decorrem do fato dos estudantes aplicarem o conhecimento que possuem sobre os números naturais aos números fracionários (Biddlecomb, 2002; Gelman & Meck, 1992; Lamon, 1999; Nunes, 2003; Sophian, Garyants & Chang, 1997; Streefland, 1991). Esta forma de pensar gera procedimentos equivocados de resolução, como é o caso em que numeradores e denominadores são adicionados, obtendo-se resultados absurdos que indicam uma compreensão equivocada acerca do número fracionário e sua representação simbólica (Cruz & Spinillo, 2004; Kerslake, 1986; Koyama, 1997).

Outra dificuldade enfrentada pelas crianças ao adicionar frações decorre de uma não compreensão do princípio da invariância (ver Piaget & Szeminska,1960) seja por não disporem de um pensamento reversível ou por não compreenderem a noção de equivalência (Nunes, 2003; Streefland, 1997). As dificuldades estão também associadas à própria natureza multifacetada deste conceito que assume diferentes significados em função das situações em que se insere (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; Nunes & Bryant, 1997) e à complexidade da linguagem e da notação típicas do número fracionário (Brizuela, 2005; Mack, 1995). Além disso, o próprio conceito de número fracionário requer a compreensão de outras noções, como a de partição, de parte-todo, a de equivalência, a noção de inteiro e a noção de metade. As noções de inteiro e de metade são de particular importância na presente investigação.

De acordo com Streefland (1991) e Pitkethly e Hunting (1996), a noção de unidade permite tanto a flexibilidade em realizar divisões sucessivas de uma unidade em partes iguais como a possibilidade da reconstrução da unidade, sendo essas ações (composição e decomposição) fundamentais para a compreensão de número racional.

O *um* também é considerado uma unidade de referência importante em estudos sobre frações associadas à reta numérica (e.g., Baturo & Cooper, 1999; Pearn &

Stephens, 2007). Pearn e Stephens, por exemplo, investigaram como crianças entre cinco e seis anos de idade posicionavam uma determinada fração ($\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ etc.) em uma reta numérica em que estavam sinalizados o *zero* e o *um*. Os resultados mostraram que crianças que usavam o número *um* como ponto de referência para posicionar uma dada fração na reta numérica o faziam de forma apropriada, pois reconheciam a relação entre o todo e as partes.

A compreensão do *um* como unidade de referência também é importante em tarefas de partição com quantidades discretas relativas ao conceito de fração. Empson, Junk, Dominguez e Turner (2005) afirmam que o que diferencia as ações de uma criança em entender situações envolvendo a divisão ou a fração é o fato de como ela interpreta o significado dos elementos: se como unidades distintas ou se como pertencentes a um conjunto. Quando as crianças compreendem que a unidade de referência é o conjunto, ao dividi-lo em cinco grupos, por exemplo, passam a entender que dois desses grupos representam $\frac{2}{5}$ do conjunto e não duas unidades independentes. Deste modo, conseguem dar sentido às ações realizadas durante o processo de resolução das tarefas.

Resultados semelhantes foram encontrados por Mix, Levine e Huttenlocher (1999) em tarefas de adição de frações com quantidades contínuas. As autoras investigaram crianças de três a cinco anos quanto à adição de frações representadas por círculos e/ou semicírculos. As crianças eram solicitadas a calcular o resultado das operações com um valor que fosse menor ou igual a um inteiro (exemplo: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$). Analisando-se os procedimentos de resolução adotados, observou-se que as crianças dividiam o inteiro em quatro partes e que utilizavam quartos para fazer comparações com as demais frações. Notou-se que a relevância de uma unidade de referência reside no significado que cada fração tem em relação ao inteiro utilizado, e que ao tomar uma unidade como referência, a criança se colocava em condições de antecipar o tamanho das partes em que o todo teria sido dividido. Segundo nossa análise, ao dividir o todo em quartos, a criança estaria tomando $\frac{1}{4}$ como um referencial a ser utilizada na realização da tarefa. Importante comentar que a opção de eleger $\frac{1}{4}$ como âncora para apoiar sua forma de raciocinar não se deve ao acaso, mas ao fato de esta unidade fracionária estar associada à noção de metade (metade da metade) que, como evidenciam os estudos anteriormente realizados, são utilizadas em situações de estimativa que envolvem conceitos matemáticos complexos como a proporção (Spinillo, 1992; 1996; Spinillo & Bryant, 1991; 1999) e a ideia de chance (Spinillo, 1997; 2002).

Para Sowder (1995) e Zeman (1991) o número *um* pode ser usado como âncora para estimar um valor aproximado na adição de frações. Como exemplo tem-se as situações em que as crianças calculam que $\frac{7}{8}+\frac{9}{10}$ terá como resultado um valor um pouco menor que dois, uma vez que entendem que cada uma das frações é um pouco menor que um inteiro.

Os estudos mencionados demonstram que o *um* é uma unidade de referência relevante em muitas atividades com frações (na reta numérica, em tarefas de partição, em equivalências de frações e como âncora na adição de frações). De modo semelhante, a noção de *metade* também tem sido considerada um referencial importante para a compreensão de frações.

Em tarefas de subdivisão de área, Aguiar (1980) mostrou que a noção de *metade* não só antecede a formação de outras unidades fracionárias ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{6}$) como também contribui para a formação dessas unidades. No entender de Nunes e Bryant (1997), a compreensão inicial do conceito de *metade* favorece o estabelecimento das conexões entre os aspectos extensivos (parte-parte) e intensivos (parte-todo) do número racional. Já em problemas de equivalência de frações, Singer-Freeman e Goswami (2001) observaram que crianças pequenas (três e quatro anos) obtiveram maior sucesso nos problemas que envolviam a fração metade do que naqueles que envolviam as frações $\frac{1}{4}$ ou $\frac{3}{4}$.

Especificamente em relação à adição de frações, a noção de *metade* foi investigada por Cruz e Spinillo (2004) que testaram a possibilidade de que crianças que ainda não haviam sido formalmente instruídas acerca de operações com frações na escola seriam capazes resolver adições de frações por estimativa, utilizando o referencial de *metade* como apoio durante o processo de resolução. As crianças de oito e nove anos de idade foram solicitadas a resolver as mesmas operações em duas situações distintas: uma usando o referencial de *metade* e a outra usando o simbolismo formal matemático. Na tarefa em que era usado o referencial de *metade* eram disponibilizados círculos de cartolina que representavam bolos inteiros e cartelas com unidades fracionárias que representavam partes daqueles bolos (fatias). As frações representadas nas fatias de bolo foram $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, e $\frac{1}{6}$. As crianças recebiam unidades fracionárias que representavam a fração $\frac{1}{2}$ para compor uma equivalência da operação apresentada. Por exemplo, se a operação na cartela fosse $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, a criança deveria compor a equivalência com duas unidades fracionárias de $\frac{1}{2}$.

Na situação seguinte, as crianças foram solicitadas a realizar as mesmas operações apresentadas na primeira situação, sendo que agora as adições eram apresentadas por meio do simbolismo matemático usual das frações. Verificou-se um percentual de 83,3% de acertos na situação em que era disponibilizado o referencial de *metade* e apenas o percentual de 5,5% de acertos na situação em que as operações eram apresentadas por meio do simbolismo matemático. A conclusão das autoras foi que o referencial de *metade* auxilia na resolução de adição de frações por estimativa.

Isso remete ao que postula Bryant (1974) de que é mais fácil raciocinar com base em estimativas do que com base em cálculos numéricos precisos, porque a estimativa privilegia o raciocínio em termos relativos como *mais/menos que*, *maior/menor que*, raciocínio este mais precoce do que o raciocínio em termos absolutos baseado em cálculos numéricos precisos. Na mesma direção, seguem os resultados de uma série de pesquisas documentadas por Correa, Spinillo, Brito e Moro (1998) em que o uso de tarefas não-numéricas favorece a resolução de problemas, uma vez que é dada à criança a oportunidade de estabelecer relações lógicas que nem sempre se manifestam quando se exige que realize cálculos numéricos que ainda não domina.

Considerando que o uso de referenciais facilita a adição por estimativa e que os referenciais de *inteiro* e de *metade* são âncoras importantes na adição de frações, a presente pesquisa investiga se outras unidades fracionárias também seriam igualmente facilitadoras. Diante disto, este estudo teve como objetivo investigar se as crianças seriam capazes de realizar adição de frações, por estimativa, usando o referencial de *metade* e usando outros referenciais ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ *e* $\frac{1}{6}$). Importante comentar que, embora, como discutido, haja indícios na literatura de que outras unidades fracionárias, como $\frac{1}{4}$, por exemplo, possam auxiliar na adição de frações, não se conhece estudos que tenham se voltado diretamente para investigar esta possibilidade. A hipótese examinada nesta pesquisa é de que o referencial de *metade* teria um papel mais facilitador do que outras unidades fracionárias.

MÉTODO

Participantes

Quarenta e duas crianças de classe média, alunas do Ensino Fundamental de escolas particulares da cidade do Recife foram igualmente divididas em dois grupos: alunas do 3º ano, com 8 anos (média de idade: 8a 4m); e alunas do 4º ano, com 9 anos (média: 9a 3m). As crianças ainda não haviam sido formalmente instruídas sobre adição de frações, porém eram capazes de identificar corretamente a representação simbólica e diagramática das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ (utilizadas neste estudo). Isso foi garantido a partir da aplicação de uma tarefa de sondagem que permitiu selecionar como participantes da pesquisa apenas crianças que acertassem na identificação de todos os itens apresentados nesta tarefa de sondagem, que é descrita a seguir.

Planejamento Experimental, Material e Procedimento

Os participantes foram individualmente entrevistados em duas sessões com um intervalo de uma semana entre elas. Na primeira sessão, aplicou-se a Tarefa de Sondagem e a Tarefa1, e na segunda sessão, a Tarefa 2.

Tarefa de Sondagem

Esta tarefa teve por objetivo garantir que participassem da pesquisa apenas crianças capazes de identificar as representações simbólicas e diagramáticas das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ que foram utilizadas nas operações apresentadas na Tarefa 1 e na Tarefa 2. De acordo com a literatura, essas frações são familiares para crianças nesta faixa etária. A fração $\frac{1}{6}$, apesar de não ser tão familiar quanto as demais, foi utilizada por permitir estabelecer relações de equivalência com as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, favorecendo a elaboração dos itens em ambas as tarefas nesta investigação.

Nesta tarefa, composta por quatro itens com quatro alternativas de resposta cada um, a criança era solicitada a escolher a representação diagramática que correspondesse a uma dada fração simbolicamente representada e lida em voz alta pela examinadora (Figura 1).

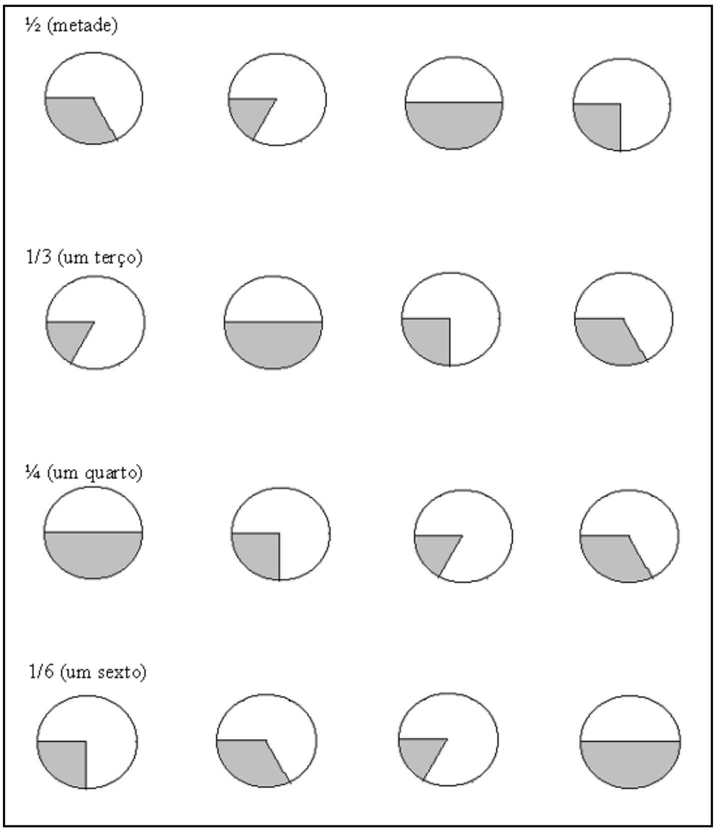

Figura 1. Itens apresentados na tarefa de sondagem

Apenas as crianças que acertaram todos os quatro itens apresentados foram participantes nesta investigação, sendo, então, solicitadas a resolver a Tarefa 1 (metade) e a Tarefa 2 (outros referenciais) descritas a seguir.

Tarefa 1 (metade)

Nesta tarefa, a criança era solicitada a compor uma adição que fosse equivalente a uma operação que lhe era mostrada, uma a uma, por escrito em uma cartela de papelão. Seis itens foram apresentados, como pode ser visto na Tabela 1 (primeira coluna). Em três deles, a adição de frações unitárias resultava em *metade* ($\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$) e nos outros três itens, a adição resultava em uma *unidade* ($\frac{1}{3}+$

$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$). O material disponibilizado consistia em dois círculos de cartolina (com 8 cm de diâmetro), sendo um na cor marrom, representando um bolo de chocolate e um círculo na cor amarela, representando um bolo de baunilha.

As operações eram apresentadas em um contexto lúdico envolvendo uma história com duas crianças que gostavam de comer bolo. A instrução dada pode ser assim resumida: “Pedro e Artur (mostra as figuras das crianças em uma folha de papel) são irmãos e gostam muito de comer bolos. A mãe deles sempre faz muitos tipos de bolos para eles comerem. Certo dia, ela fez um bolo de morango, um bolo de chocolate, um bolo de baunilha e um bolo de limão. Só que a mãe deles fatiou os bolos e disse a eles que, se eles quisessem comer dos bolos, teriam que comer as fatias do tamanho que ela havia cortado. Os bolos foram cortados do seguinte modo: o bolo de morango em duas partes iguais; o bolo de limão em três partes iguais; o bolo de baunilha em quatro partes iguais e o bolo de chocolate em seis partes iguais.” A examinadora mostrava à criança os bolos fatiados, os quais eram representados por círculos seccionados em duas partes (círculo rosa para o bolo de morango), em três partes (círculo verde para o bolo de limão), em quatro partes (círculo amarelo para o bolo de baunilha) e em seis partes (círculo marrom para o bolo de chocolate), como mostra a Figura 2, que também ilustra o material usado na Tarefa 2 que será posteriormente descrita. Havia uma cartela de papelão para cada círculo apresentado.

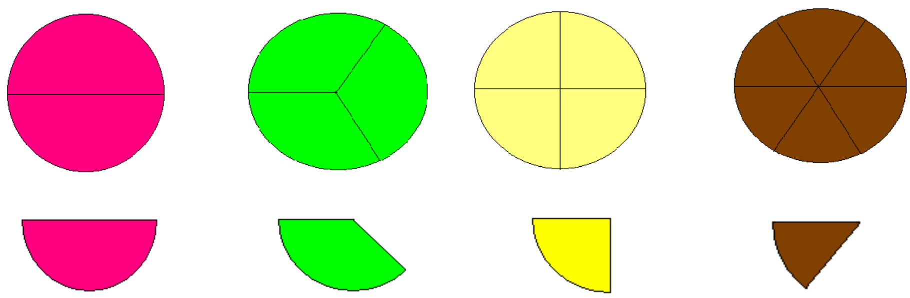

Figura 2. Os bolos e suas respectivas fatias usados na Tarefa 1 (*metade*) e na Tarefa 2 (*outros referenciais*).

A instrução prosseguia: “Artur comia de vários tipos de bolo e Pedro comia apenas de um tipo. Só que Pedro queria sempre comer o mesmo tanto de bolo que Artur comia.”

Neste momento, uma operação de adição era apresentada. No caso da adição $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$, por exemplo, a história prosseguia assim: “Um dia, Artur comeu uma fatia do bolo de limão ($\frac{1}{3}$) e uma fatia do bolo de chocolate ($\frac{1}{6}$).” A examinadora colocava as fatias do bolo sobre a mesa, sendo essas representadas por recortes de papelão nas cores e tamanhos correspondentes aos bolos que estavam sendo mencionados, no caso, uma fatia verde ($\frac{1}{3}$ do bolo de limão) e uma fatia marrom ($\frac{1}{6}$ do bolo de chocolate). A história continuava: “Pedro quer comer o mesmo tanto de bolo, só que ele não gosta do bolo de limão e nem do bolo de chocolate, pois ele só gosta do bolo de morango.” Aqui, a examinadora apresentava diversas fatias de bolo de morango sobre a mesa, sendo elas representadas por recortes de papelão na cor rosa e de tamanho correspondente à $\frac{1}{2}$ do bolo de morango, como ilustrado na Figura 3. Prosseguindo, a examinadora dizia: “Então para comer o mesmo tanto de bolo que Artur comeu, quantas fatias desse bolo de morango Pedro vai ter que comer? Faz aqui para eu ver, usando essas fatias de bolo de morango.”

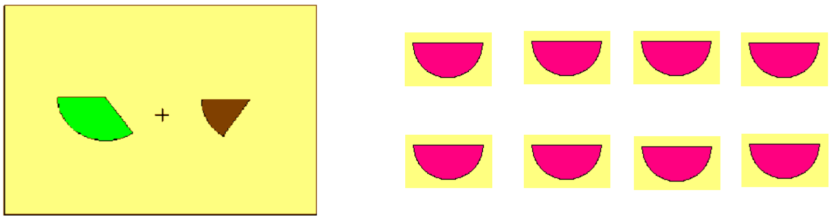

Figura 3. Exemplo da operação $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ na Tarefa 1 (*metade*).

Iguais procedimento e instrução eram apresentados em relação a cada um dos demais itens nesta tarefa em que a criança tinha que resolver cada adição utilizando apenas recortes de papelão na cor rosa, que representavam fatias do bolo de morango seccionadas em $\frac{1}{2}$, o que a levava a usar o referencial de *metade* como âncora em suas composições.

Tarefa 2 (outros referenciais)

Nesta tarefa, as operações apresentadas, o material disponibilizado e o procedimento adotado eram semelhantes à Tarefa 1, com a diferença que os recortes de papelão representando as fatias de bolos entregues para compor as adições eram ou do bolo de baunilha ($\frac{1}{4}$) ou do bolo de limão ($\frac{1}{3}$) ou do bolo de chocolate ($\frac{1}{6}$) (ver Figura 2). Isso levava a criança a usar referenciais diferentes do referencial de metade na Tarefa 1. Exemplo de um item na Tarefa 2 é ilustrado na Figura 4.

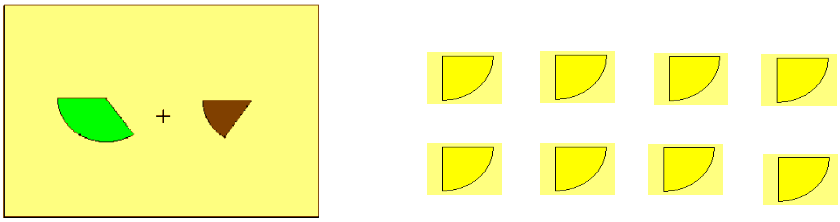

Figura 3. Exemplo da operação $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ na Tarefa 2 (*outros referenciais*).

A ordem de apresentação dos itens tanto na Tarefa de Sondagem como nas demais tarefas foi aleatória, decidida por sorteio com cada participante. Tanto na Tarefa 1 como na Tarefa 2, justificativas eram solicitadas a cada item, sendo as respostas gravadas e posteriormente transcritas para análise. As justificativas associadas às ações das crianças foram analisadas de forma conjunta, permitindo identificar as estratégias de resolução adotadas, sendo essas estratégias descritas e exemplificadas adiante.

Na Tabela 1, constam as operações apresentadas em cada tarefa e as respostas consideradas corretas.

Tabela 1. *Itens e respostas corretas em cada tarefa.*

Itens	**Respostas corretas**	
	Tarefa 1 (referencial de metade)	**Tarefa 2 (outros referenciais)**
¼ + ¼	½	1/6 + 1/6 + 1/6
1/3 + 1/6	½	¼ + ¼
1/6 + 1/6 + 1/6	½	¼ + ¼
1/3 + 1/6 + ¼ + ¼	½ + ½	1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6
1/3 + 1/3 + 1/3	½ + ½	¼ + ¼ + ¼ + ¼
¼ + ¼ + ¼ + ¼	½ + ½	1/3 + 1/3 + 1/3

Material

Em ambas as tarefas, o material utilizado pode ser assim descrito:

(i) Quatro círculos de cartolina de diferentes cores, representando bolos de diferentes sabores: marrom (chocolate), amarelo (baunilha), rosa (morango) e verde (limão). Os bolos estavam seccionados de diferentes modos: o bolo de morango dividido em duas partes iguais, o de limão em três partes iguais, o de baunilha em quatro partes iguais e o de chocolate em seis partes iguais.

(ii) Cartelas com recortes representando frações que eram fatias de bolo que correspondiam às parcelas de cada operação.

(iii) Cartelas com triângulos representando frações que eram fatias de bolo que eram as unidades fracionárias utilizadas como referencial.

RESULTADOS

Os dados foram analisados em função do número de acertos e das estratégias de resolução identificadas a partir das justificativas e ações das crianças quando da resolução de cada item em ambas as tarefas. A predição era que o desempenho na Tarefa 1 (metade) fosse melhor do que na Tarefa 2 (outros referenciais), porque o uso do referencial de *metade* como âncora facilitaria a resolução das adições por estimativa. Como mencionado, esta hipótese se apoiou em resultados de estudos anteriores com outros conceitos relacionais (proporção, probabilidade).

O número de acertos

No geral, como mostra a Tabela 2 e confirmado pelo Teste Wilcoxon ($Z = -4.8982$, $p = .0000$), o percentual de acertos na Tarefa 1 (referencial de metade: 83.3%) foi significativamente mais alto do que na Tarefa 2 (outros referenciais: 42.6%). Este mesmo padrão de resultados foi encontrado em relação às crianças do 3º ano ($Z = -3.2900$, $p = .0010$) e em relação às do 4º ano ($Z = -3.6214$, $p = .0003$). Este resultado indica que o uso do referencial de *metade* facilitou a resolução das operações mais do que os outros referenciais disponibilizados tanto para as crianças do 3º ano como para as do 4º ano.

Tabela 2. *Número de acertos (percentual em parênteses) em cada ano escolar*

Ano escolar	Tarefa 1 (metade)	Tarefa 2 (outros referenciais)
3º	94 (74.6%)	54 (42.8%)
4º	116 (92%)	66 (52.4%)
Total	210 (83.3%)	120 (47.6%)

O Teste de Wilcoxon, aplicado separadamente aos dados em cada tarefa, detectou diferenças significativas entre os anos escolares apenas em relação à Tarefa 1 ($Z = -1.9505$, $p = .05$) em que o percentual de acertos no 3º ano era mais baixo do que no 4º ano (74.6% e 92%, respectivamente). Na Tarefa 2 (outros referenciais) o percentual de acertos era igualmente baixo no 3º ano (42.8%) e no 4º ano (52.4%). Estes dados indicam que tanto no geral como em cada ano escolar, as crianças apresentavam um melhor desempenho quando dispunham do referencial de *metade* para resolver as adições de frações.

As estratégias

A partir das justificativas dadas e das ações realizadas pelas crianças, foi possível identificar cinco tipos de estratégias que são descritos e exemplificados nas tabelas que se seguem[2]:

Estratégia I (comparação de tamanho das fatias): A criança compara as fatias do bolo de origem[3] com a fatia de referência disponibilizada (metade ou outras unidades fracionárias), justapondo as fatias, constatando que uma fatia do bolo de origem é maior/menor do que a fatia de referência. Há tentativas de compensar os tamanhos para, então, decidir quantas fatias de referência são necessárias para compor o bolo a ser formado (ver Tabela 3).

[2] Constam em parênteses a fala da criança, gestos e as explicações sobre o que ocorria durante a entrevista.
[3] Denomina-se bolo de origem a adição apresentada em cada item.

Tabela 3. *Exemplos da Estratégia I.*

Item	Tarefa 1 (referencial de metade)	Tarefa 2 (outros referenciais)
1/6 + 1/6 + 1/6 (bolo de chocolate)	Referencial ½ (morango) Um tá bom. (E: Por quê?) Porque o pedaço do bolo de morango é muito maior do que o pedaço do bolo de baunilha.	Referencial ¼ (baunilha) (Coloca ¼ sobre 1/6) Duas. (E: Por quê?) Porque o de chocolate é menor que o de baunilha.
¼ + ¼ + ¼ + ¼ (bolo de baunilha)	Referencial ½ (morango) Um (morango). (E: Por quê?) Porque tem quatro fatias do bolo de baunilha, e uma fatia do bolo de morango já é maior que a de baunilha. (Você acha que vai ficar igual?) Fica.	Referencial 1/3 (limão) (Coloca 1/3 sobre ¼) Quatro. (E: Por quê?) Porque o de baunilha é menor que o bolo de limão.
1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão)	Referencial ½ (morango) Uma de morango é maior aí ia sobrar um pedaço aí pegava desse...(coloca ½ sobre 1/3) Duas.	Referencial ¼ (baunilha) (Coloca ¼ + ¼ sobre 1/3) Seis. (E: Por quê?) Porque o de baunilha é pequeno e o de limão é menor que o de baunilha.

Estratégia II (quantidade absoluta de fatias): A criança raciocina em termos absolutos, fazendo com que o bolo a ser composto tenha o mesmo número de as fatias que o bolo de origem (ver Tabela 4).

Tabela 4. *Exemplos da Estratégia II*

Item	Tarefa 1	Tarefa 2
Item 1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (bolos de diversos sabores)	Referencial ½ (morango) Quatro (E: Por quê?) Porque aqui (aponta para a operação) tem quatro. (E: Se juntar quatro fatias dessa (1/2) e juntar essas quatro fatias (apontando para as quatro fatias da operação) vai dar o mesmo tanto de bolo)? Vai.	Referencial 1/6 (chocolate) Quatro. (E: Por quê?) Porque aqui (aponta as fatias da operação) tem quatro fatias. (E: Se juntar quatro fatias do bolo de chocolate vai ficar a mesma quantidade dessas juntas (aponta para as quatro fatias da operação)? Vai.
Item ¼ + ¼ + ¼ + ¼ (bolo de baunilha)	Referencial ½ (morango) Quatro. (E: Por quê?) Porque aqui tem quatro (aponta para as fatias de referência). Aí ia ficar o mesmo tanto.	Referencial 1/3 (limão) Quatro. (E: Por quê?). Porque dá igual ao do irmão dele. (E vai dar o mesmo tanto?) Vai. Dá quatro.
1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão)	Referencial ½ (morango) Três. (E: Por quê?) Porque ele comeu três aqui (aponta para as fatias da operação) e agora três aqui (1/2 + 1/2 + 1/2). (E: Vai dar o mesmo tanto de bolo?). Vai.	Referencial ¼ (baunilha) Três. (E: Por quê?) Porque aqui (aponta para as fatias da operação) tem três.

Estratégia III (tentativas inadequadas de composição e decomposição): A criança tenta estabelecer a equivalência fazendo justaposições entre as fatias do bolo de origem e a fatia de referência. Observa-se a tentativa de fazer composições e decomposições a partir de compensações entre os tamanhos das fatias do bolo de origem e as fatias de referência. Algumas vezes, durante o processo de resolução, a criança é capaz de fazer composições e decomposições apropriadas, porém confunde-se nas demais tentativas e não consegue estabelecer todas as equivalências necessárias (ver Tabela 5).

Tabela 5.*Exemplos da Estratégia III.*

Item	Tarefa 1	Tarefa 2
1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (bolos de diversos sabores)	Referencial ½ (morango) (Coloca ½ sobre 1/3; ½ sobre 1/6; ½ sobre ¼ + ¼) Três. (E: Como você descobriu?) Um desse (unidade de referência: ½) nesse (1/3). Metade desse (refere-se à metade da unidade de referência ½) nesse (1/6). E esse (refere-se à outra unidade de referência ½) para esses dois (¼ + ¼).	Referencial 1/6 (chocolate) Cinco. (E: Por quê?) Porque eu imaginei. Tem que botar dois aqui (coloca duas fatias de 1/6 sobre 1/3). Um aqui (refere-se a uma fatia de 1/6 sobre 1/6). Um aqui (refere-se a uma fatia de 1/6 sobre 1/4). E um aqui (refere-se a uma fatia de 1/6 sobre 1/4).
Item 1/6 + 1/6 + 1/6 (bolo de chocolate)	Referencial ½ (morango) Dois (coloca ½ sobre 2/6). (E: Por quê?) Porque o bolo de morango é maior que o de chocolate.	Referencial 1/4 (baunilha) Duas. (E: Por quê?). Juntando esse (1/6) com esse (1/6) fica uma dessa (unidade de referência 1/4) e tem a outra (refere-se ao outro 1/6)que para ficar equivalente precisa de mais uma fatia de baunilha (¼).
¼ + ¼ + ¼ + ¼ (bolo de baunilha)	Referencial ½ (morango) Duas (coloca ½ sobre 2/4 e outra ½ sobre 2/4). (E: Por quê?) Porque o de morango é maior que o de baunilha.	Referencial 1/3 (limão) (Junta sobre a mesa 1/3 + 1/3). Só de duas. Porque esse (1/3) dá esse (¼ + ¼) e esse (refere-se à outra fatia de 1/3) dá esse (¼ + ¼).

Estratégia IV (global): A criança, de imediato, procura determinar se as fatias do bolo de origem formam um inteiro ou se formam uma metade. Uma vez constatado isso, a criança usa a fatia de referência para compor um bolo inteiro ou para compor metade de um bolo. No caso em que as fatias do item apresentado formam metade, a criança procura formar metade de um bolo com as fatias de referência, no caso em que formam um inteiro, a criança procura formar um bolo inteiro com as fatias de referência. Esta é uma estratégia global que não envolve composições e decomposições (ver Tabela 6).

Tabela 6. *Exemplos da Estratégia IV.*

Item	Tarefa 1	Tarefa 2
1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão)	Referencial ½ (morango) Se ele comeu o bolo todo desse daqui (refere-se ao bolo de limão) ele vai comer o bolo todo desse daqui (refere-se ao bolo de morango). Então, duas partes (1/2 + ½).	Referencial ¼ (baunilha) (Junta quatro fatias do bolo de baunilha) Ele precisaria comer quatro pedaços de bolo de baunilha. (E: Por quê) Porque três pedaços do bolo de limão formamum bolo inteiro.
1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (bolos de diversos sabores)	Referencial ½ (morango) Dava um inteiro (referindo-se às fatias de bolos diversos). Seriam duas fatias de morango.	Referencial 1/6 (chocolate) Formava um bolo inteiro (junta seis fatias do bolo de chocolate). Ele teria que comer seis fatias do bolo de chocolate. Aliás, o bolo inteiro de chocolate.
1/3 + 1/6 (fatias de bolos de limão e chocolate, respectivamente)	Referencial ½ (morango) (Olha para os bolos sobre a mesa) Uma fatia (pega uma fatia de ½ sobre a mesa e explica) Porque se cortar aqui (faz uma divisão da fatia de morango com um dedo) fica um pedaço desse (1/6) e um pedaço desse (1/3).	Referencial 1/6 (chocolate) Duas. (E: Por quê?) Por causa que esse daqui (refere-se à fatia do bolo de limão: 1/3) com esse (refere-se à fatia do bolo de chocolate: 1/6) dá metade e duas dessa daqui (refere-se às fatias do bolo de baunilha: ¼ + ¼) também (junta ¼ + ¼).

Estratégia V (composição e decomposição adequadas): A criança estabelece todas as equivalências necessárias, realizando composições e decomposições apropriadas, podendo fazer justaposições das fatias de referência sobre as fatias presentes no bolo de origem (ver Tabela 7).

Tabela 7. *Exemplos de Estratégia V.*

Item	Tarefa 1	Tarefa 2
1/3 + 1/3 + 1/3 (bolo de limão)	Referencial ½ (morango) Dois (morango). (E: Por quê?) Porque os dois pedaços de bolo de morango são duas metades e duas metades do bolo de morango formam um bolo inteiro.	Referencial ¼ (baunilha) (Junta 4/4) Quatro. (E: Por quê?) Porque juntando essas quatro dá um bolo inteiro.
1/3 + 1/6 + ¼ + ¼ (bolos de diversos sabores)	Referencial ½ (morango) Comeu um bolo todo de morango (junta duas fatias do bolo de morango: ½ + ½). (E: Quantas fatias do bolo de morango?) Duas. (E: Por quê?) Porque essa (refere-se à fatia do bolo de morango: ½) fica para essa mais essa (refere-se às fatias dos bolos de limão e de chocolate: 1/3 +1/6) e essa metade (refere-se ã outra fatia do bolo de	Referencial 1/6 (chocolate) (A criança vai fazendo as equivalências) Um desse (fatia de 1/6) já é desse (mostra 1/6 da cartela). Dois desse (coloca duas fatias do bolo de chocolate sobre 1/3 da cartela)... (coloca 1/6 em cada ¼ da cartela, mede as sobras dos quartos com os dedos)... seis fatias.

	morango: ½) fica para esses dois (refere-se às duas fatias do bolo de baunilha: ¼ + ¼). •	
1/3 + 1/6 (fatias de bolos de limão e chocolate, respectivamente)	Referencial ½ (morango) (Coloca uma fatia da unidade de referência (½) sobre a fatia do bolo de limão da cartela (1/3). Em seguida, compara a mesma fatia da unidade de referência (1/2) com a fatia do bolo de chocolate (1/6). Uma dessa aqui (refere-se à uma fatia da unidade fracionária de referência: ½). (E: Como você sabe?) Esse (unidade de referência: ½) fica com esse (refere-se à fatia do bolo de limão (1/3)) e esse pedaço (refere-se à parte que sobrou da unidade de referência (1/2) quando comparada à fatia do bolo de limão (1/3)) fica com esse (refere-se à fatia do bolo de chocolate: 1/6).	Referencial ¼ (bolo de baunilha) Três. Porque essa daqui (refere-se à fatia do bolo de chocolate: 1/6) já dá uma (refere-se a uma fatia da unidade de referência: ½). E essa outra (refere-se à fatia do bolo de limão: 1/3) precisa de duas.

As estratégias foram analisadas por dois juízes independentes, cujo percentual de concordância entre eles foi de 88.7%. Os casos de desacordo foram analisados e discutidos pelos dois juízes, chegando-se a um consenso quanto à classificação da estratégia em um dos cinco tipos acima apresentados. Essas estratégias foram consideradas como constituindo um sistema hierárquico com níveis de sofisticação crescente da Estratégia I para a Estratégia V. Na Tabela 8 consta a distribuição das estratégias por cada ano escolar.

Tabela 8. *Número (percentual em parênteses) de estratégias por grupo.*

Estratégias	3º ano	4ºano
I (n=51)	26 (51%)	25 (49%)
II (n=50)	50 (100%)	0
III (n=108)	51 (47.2%)	57 (52.8%)
IV (n=117)	49 (42%)	68 (58%)
V (n=178)	76 (42.7%)	102 (57.3%)

Nota. Estratégia I: comparação de tamanho; Estratégia II: quantidade absoluta de fatias; Estratégia III: tentativas de composição e decomposição inadequadas; Estratégia IV: global; Estratégia V: composição e decomposição adequadas.

De acordo com o Teste Kolmogorov-Smirnov, diferenças significativas entre os anos escolares foram encontradas apenas em relação ao uso da Estratégia II ($Z = 1.697$, $p = .006$) que nunca era adotada pelas crianças do 4º ano.

O Teste de Wilcoxon revelou haver diferenças significativas entre as tarefas em relação às Estratégias III ($Z = -4.7821$, $p = .0000$), Estratégia IV ($Z = -3.0239$, $p = .0025$) e Estratégia V ($Z = -4.2231$, $p = .0000$). Estas diferenças, como mostra a Tabela 9, ocorreram porque a Estratégia III era mais frequente na Tarefa 2 (89.8%) do que na Tarefa 1 (10.2%), observando-se o oposto em relação à Estratégia IV e à Estratégia V que eram mais frequentes na Tarefa 1 (65% e 70.8%, respectivamente) do que na Tarefa 2 (35% e 29.2%, respectivamente).

Tabela 9. *Número (percentual em parênteses) das estratégias das crianças em função do referencial oferecido.*

Estratégias	Tarefa 1 (metade)	Tarefa 2 (outros referenciais)
I (n=51)	20 (39.2%)	31 (60.8%)
II (n=50)	19 (38%)	31 (62%)
III (n=108)	11 (10.2%)	97 (89.8%)
IV (n=117)	76 (65%)	41 (35%)
V (n=178)	126 (70.8%)	52 (29.2%)

Nota. Estratégia I: comparação de tamanho; Estratégia II: quantidade absoluta de fatias; Estratégia III: tentativas de composição e decomposição inadequadas; Estratégia IV: global; Estratégia V: composição e decomposição adequadas.

Esses resultados indicam que quando *metade* era fornecida como unidade fracionária de referência (Tarefa 1), as crianças tendiam a adotar estratégias mais elaboradas, fossem elas globais (Estratégia IV) ou por composição/decomposição adequadas (Estratégia V). Essas estratégias permitiam o estabelecimento de equivalências entre o bolo de origem e o bolo a ser composto pela criança como resultado da adição das fatias no bolo de origem.

Importante comentar que estratégias IV e V eram aquelas que levavam a um maior percentual de repostas corretas, enquanto que as Estratégias II e III eram mais adotadas em itens respondidos de forma incorreta como pode ser visto na Tabela 10.

Tabela 10. *Número de acertos e erros (percentual em parênteses) em função do tipo de estratégia.*

Estratégias	Resposta correta	Resposta incorreta
I (n=51)	29 (56,9%)	22 (43,1%)
II (n=50)	3 (6%)	47 (94%)
III (n=108)	20 (18,5%)	88 (81,5%)
IV (n=117)	105 (89,7%)	12 (10,3%)
V (n=178)	173 (97,2%)	5 (2,8%)

Nota. Estratégia I: comparação de tamanho; Estratégia II: quantidade absoluta de fatias; Estratégia III: tentativas de composição e decomposição inadequadas; Estratégia IV: global; Estratégia V: composição e decomposição adequadas.

O que se observa é que as estratégias mais elaboradas estavam associadas a itens que eram respondidos de forma correta e as estratégias menos elaboradas estavam associadas a respostas incorretas, sendo isso confirmado pelo Teste de Wilcoxon.

DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Neste estudo examinou-se o papel desempenhado pelo referencial de *metade* na resolução de adição de frações por estimativas, comparando-o com o uso de outros referenciais ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$). Os resultados mostraram que o referencial de metade desempenha um papel facilitador na resolução de adição de frações, servindo de apoio para a composição de equivalências de forma bem mais expressiva do que outros referenciais. Isso foi observado, sobretudo, em relação às crianças do 4º ano. De modo geral, os dados apontam para as possibilidades da criança, mesmo antes da instrução formal sobre a adição de frações, resolver adição de frações quando o referencial de *metade* é oferecido como âncora durante o processo de resolução. Importante comentar que o referencial de *metade*, diferentemente de outros referenciais, propicia o estabelecimento de equivalências. Por exemplo, as estratégias mais sofisticadas realizadas pelas crianças nesta pesquisa (Estratégia IV e V) expressavam a capacidade de compor e decompor, o que permitia que compreendessem que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{1}{2}$. Sem dúvida, este é uma compreensão inicial acerca da adição de fração na qual o referencial de *metade* tem papel importante mais do que outros referenciais.

Os resultados derivados desta investigação corroboram com resultados obtidos em estudos anteriores como aqueles realizados por Spinillo e Bryant (1991; 1999) que verificaram que este referencial pode favorecer o sucesso das crianças desde os seis anos na resolução de tarefas de proporção envolvendo tanto quantidades discretas como quantidades contínuas e corroboram com os resultados obtidos por Spinillo (2002) acerca da probabilidade (estimar chance). Ao que parece, o uso de *metade* como ponto de referência auxilia a compreensão inicial acerca de conceitos matemáticos complexos como a proporção, a probabilidade e a adição de frações.

Os resultados do presente estudo têm implicações educacionais para o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental no que se refere ao conceito de fração. Um primeiro aspecto a comentar é que, ao trabalhar a adição inserida numa situação-problema como aquela apresentada nesta investigação, a criança pode conceber, com certa facilidade, que a fração é um número ou uma quantidade que pode ser adicionada a outras quantidades (uma parcela em uma adição, por exemplo), e não apenas uma parte de algo (de um retângulo, de uma pizza, de um bolo etc.). Este tipo de atividade expande os significados que podem ser atribuídos à fração.

Outro aspecto que merece ser mencionado é a natureza do material oferecido à criança. As unidades fracionárias materialmente representadas por um recorte de papelão que correspondiam à $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ de bolos de mesmas dimensões parece ser um suporte de representação importante na resolução de problemas com fração, uma vez que sua manipulação permite que sejam realizadas comparações entre as fatias (como por exemplo, justapor as fatias de bolos), o que auxiliava na composição e decomposição das quantidades presentes em cada operação apresentada. Esta flexibilidade do material concreto associada ao uso do referencial de metade como âncora do raciocínio parece ter contribuído para a resolução apropriada das situações-problema apresentadas.

E por fim, torna-se relevante destacar a importância da estimativa no raciocínio matemático das crianças. Por diversas vezes foram identificadas nas estratégias de resolução a tentativa da criança em fazer aproximações, como pode ser verificado em passagens em que se identificou o uso de expressões como: *"$\frac{1}{3}$ é quase metade"* e *"$\frac{1}{4}$ é um pouquinho mais que $\frac{1}{6}$".* Conforme referido por Streefland (1984, 1985), as estimativas podem ser um instrumento didático poderoso que serve de ponte entre as ideias intuitivas das crianças e os conceitos ensinados na escola. No caso da adição de frações, a estimativa associada a pontos de referência como a *metade* pode se transformar em uma oportunidade de promover uma compreensão mais apropriada de situações matemáticas complexas como é o caso das operações com frações.

Pesquisas futuras poderiam examinar o papel desempenhado pelos referenciais de *metade* e de *inteiro* na resolução de adição de frações por meio de estimativas. Semelhante ao que foi proposto nesta presente investigação, as crianças poderiam ser solicitadas a resolver adições de fração por estimativas ora usando o referencial de *metade*, ora usando o referencial de *inteiro*. Os resultados poderiam esclarecer se o referencial de *metade* seria mais facilitador do que o referencial de *inteiro* ou se ambos seriam igualmente importantes em auxiliar a criança a operar com frações (pesquisa em andamento).

AGRADECIMENTOS

As autoras agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e tecnológico (CNPq) que financiou a pesquisa de mestrado da segunda autora, da qual se derivou este artigo, bem como às crianças que dela participaram.

REFERÊNCIAS

Aguiar, M. C. (1980). *A formação de conceitos de frações e de proporcionalidade e as operações concretas e formais.* Dissertação de mestrado não-publicada, Mestrado em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.

Baturo, A. R., & Cooper, T. J. (1999). Fractions, reunitisation and the number-line representation. Em *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 25-30 July, 1999, Haifa.

Biddlecomb, B. D. (2002). Numerical knowledge as enabling and constraining fraction knowledge: an example of the reorganization hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*, 167-190.

Brizuela, B. M. (2005).Young children's notations for fractions. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 281–305.

Bryant, P. E. (1974). *Perception and understanding in young children: an experimental approach*. London: Methuen.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Correa, J., Spinillo, A., Brito, M., & Moro, M. (1998). O desenvolvimento de conceitos matemáticos: temas de interesse para a educação matemática. Em M. L. S. de Moura; J. Correa & A. G. Spinillo (Eds.), *Pesquisas brasileiras em psicologia do desenvolvimento* (pp. 71-110) . Rio de Janeiro: EDUERJ.

Cruz, M. S., & Spinillo, A. G. (2004). Resolvendo adição de fração através do simbolismo matemático e através de âncoras. *Quadrante*: *Revista de Investigação em Educação Matemática*, *13*(2), 3-29.

Empson, S. B., Junk, D., Dominguez, H., & Turner, E. (2005). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: a cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics, 63*, 1-28.

Gelman, R., & Meck, B. (1992).Early principles aid initial but not later conceptions of number. Em J. Bideaud; C. Meljac; & J. P. Fischer (Eds.), *Pathways to number: children's developing numerical abilities* (pp. 171-190). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: children's strategies and errors: a report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Windsor: NFER-Nelson.

Koyama, M. (1997).Students' representations of fractions in a regular elementary school mathematics classroom. Em E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *3*, (pp.160-167). Lahti: PME.

Lamon, J. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content and instructional strategies for children*. Mahwah, NJ.: Lawrence Erlbaum.

Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 422-441.

Mix, K. S., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (1999). Early fraction calculation ability. *Developmental Psychology*, *35*(5), 164-174.

Nunes, T. (2003). Criança pode aprender frações. E gosta!. Em E. P. Grossi (Ed.), *Por que ainda há quem não aprende? A teoria* (pp.119-148). Rio de Janeiro: Vozes.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pearn, C., & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help to develop fraction concepts. Em J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education .2*, (pp. 601-610). Australasia: PME.

Piaget, J., & Szeminska, A. (1960).*Child's conception of geometry*. London: Routledge and Kegan Paul.

Pitkethly, A., & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 5-38.

Singer-Freeman, K. E., & Goswami, U. (2001). Does half a pizza equal half a box of chocolates? Proportional matching in an analogy task. *Cognitive Development*, *16*, 811-829.

Sophian, C., Garyants, D., & Chang, C. (1997). When three is less than two: early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, *33*(5), 731-744.

Sowder, J. (1995). A compreensão de número na escola de primeiro grau. *Anais da I Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: Copiadora Caxangá.

Spinillo, A. G. (1992). A importância do referencial de 'metade' e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*, *8* (3), 305-317.

Spinillo, A. G. (2002). Children's use of part-part comparisons to estimate probability. *Mathematical Behavior*, 21, 357-369.

Spinillo, A. G. (1996). La comprensión infantil de la proporción y la razón en la escuela primaria. *UNO: Revista de Didática de las Matemáticas*, 9, 59-64.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1991). Children´s proportional judgments: the importance of "half". *Child Development*, *62*, 427-440.

Spinillo, A. G., & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: part-part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*(2), 181-197.

Streefland, L. (1984). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long-term learning process (towards… a Theory). Part 1: reflections on a teaching experiment. *Educational Studies in Mathematics, 15*, 327-348.

Streefland, L. (1985). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long-term learning process (Towards… A Theory).Parte 2: the outline of the long-term learning process. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 75-94.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Streefland, L. (1997). Charming fractions being charmed?. Em T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 347-371). Hove: Psychology Press.

Zeman, M. (1991).The part-whole schema in the conceptualization of fractions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *10*(3), 251-259.

Submetido: setembro de 2013

Aceito: junho de 2014