

# Modelamiento de Superficies en Coordenadas Esféricas a Través de GeoGebra

## Surface Modeling in Spherical Coordinates Through GeoGebra

Alejandro I. Flores Osorio<sup>\*a</sup>; Nielce M. Lobo da Costa<sup>b</sup>; Dennis A. Espejo Peña<sup>c</sup>; Lenin R. Cabracancha Montesinos<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Universidad Científica del Sur, Departamento de Ciencias Básicas, Perú.

<sup>b</sup>Universidade Anhanguera de São Paulo, Programa de Posgrado en Educación Matemática. SP, Brasil.

<sup>c</sup>Universidad Nacional del Callao, Departamento de Ciencias Básicas, Perú

<sup>d</sup>Universidad Tecnológica del Perú, Departamento de Ciencias Básicas, Perú.

\*E-mail: alexflores277@gmail.com

---

### Resumen

Este artículo tiene como objetivo presentar una herramienta que permita ayudar la enseñanza y el aprendizaje de graficar y describir superficies en coordenadas esféricas, a través del software libre GeoGebra, para lo cual se va representar superficies convencionales y no convencionales, así como sólidos que están limitados por un número finito de superficies por medio de parametrizaciones basadas en coordenadas esféricas y luego presentarlas en la vista gráfica 3D de GeoGebra usando el comando Superficie, de esta forma se tiene una inmejorable visualización, percepción, manipulación y comprensión del esbozo de superficies en el espacio en un ambiente dinámico y amigable. Finalizamos con un caso de aplicación de modelado del planetario más grande del mundo aplicando superficies paramétricas basadas en las coordenadas esféricas.

**Palabras-clave:** Modelamiento. Superficies. Parametrización. Coordenadas Esféricas. GeoGebra.

### Abstract

*This article aims to present a tool that aids the teaching and learning of graphing and describing surfaces in spherical coordinates, through the free GeoGebra software, for which specific and non-specific surfaces will be represented, as well as solids that are limited by a finite number of surfaces by means of parameterizations based on spherical coordinates and then present them in the GeoGebra 3D graphic view using the Surface command, in this way you have an unbeatable visualization, perception, manipulation and understanding of the outline of surfaces in the space in a dynamic and friendly environment. We conclude with a case of modeling application of the largest planetarium in the world applying parametric surfaces based on spherical coordinates*

**Keywords:** Modeling. Surfaces. Parameterization. Spherical Coordinates. GeoGebra.

---

## 1 Introducción

En matemática existen distintas formas de representar la localización de un punto en el espacio, una de ellas es el sistema coordenadas esféricas, que es una generalización de las coordenadas polares en el plano.

Las coordenadas esféricas tienen una gran importancia en distintas áreas como en la geografía, dada su evidente similitud a las coordenadas geográficas donde representan todos los puntos con latitud y longitud y sobre todo en el sistema de ubicación GPS, en la Astronomía, para la ubicación de estrellas en el firmamento y en la matemática, específicamente en el cálculo de varias variables donde es necesario trazar superficies convencionales y no convencionales en o esbozar sólidos que son acotados por un número finito de superficies. Para los estudiantes del curso de cálculo de varias variables, bosquejar dichos sólidos representa uno de los mayores retos del curso, puesto que ello demanda de una gran capacidad de abstracción y proyección, e indudablemente una gran destreza para dibujar.

Según Larson y Edwards (2010) y también Stewart (2012) una superficie en el espacio es representada

mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas y que se describe en una función vectorial, la sintaxis del comando Superficie del GeoGebra enlaza esta definición matemática con su representación gráfica en la vista gráfica 3D del GeoGebra. En esta investigación presentamos el esbozo de superficies convencionales y no convencionales usando definiciones matemáticas del cálculo vectorial, nos centramos específicamente en realizar parametrización de superficies basándonos en las coordenadas esféricas y de esta forma presentamos el modelo matemático a escala Museo de Ciencias de la ciudad de Nagoya.

Del Pino (2013), destaca el uso de GeoGebra por ser un software libre y de código abierto además de su sencillez, siendo un excelente referente de la geometría dinámica. GeoGebra ofrece un entorno ambiente amigable y de fácil uso donde interactuar con los comandos es de forma directa, a través de la barra de entrada, y permite visualizar la gráfica de superficies no acotadas las cuales se pueden visualizar de diferentes ángulos. Este entorno tecnológico puede ser una herramienta para el aprendizaje de Geometría, por auxiliar el estudiante en la visualización y en la representación de

conceptos. Por lo tanto, en este artículo presentamos la posibilidad de usar el software Geogebra 3D para el estudio de superficies esféricas.

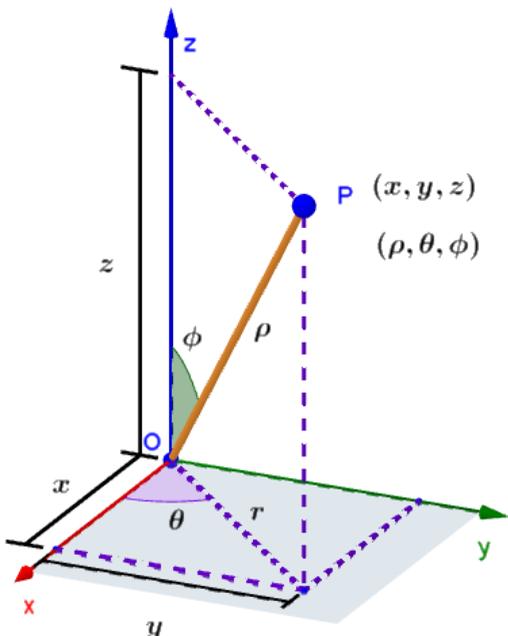
Para las superficies acotadas es necesario parametrizar y expresarlo mediante el comando Superficie de GeoGebra.

## 2 Nociones Básicas

### 2.1 Coordenadas Esféricas

Para representar gráficamente objetos en el espacio se utilizan sistemas coordenados, entre ellos: de coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas, etc. Esta investigación se enfoca en el sistema de coordenadas esféricas. Considerando que, en el sistema de coordenadas esféricas, un punto en el espacio es representado por la terna ordenada, como se muestra en la Figura 1, a partir del enfoque presentado por Larson; Edwards (2010) y Stewart (2012).

Figura 1 - Coordenadas del punto en coordenadas esféricas



Fuente: Elaboración propia

Para la conversión de coordenadas, de rectangulares a esféricas y viceversa, se usa la siguiente relación.

De coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \\ \tan\theta &= \frac{y}{x} \quad x \neq 0 \wedge z \neq 0 \\ \tan\phi &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{aligned} \quad (1)$$

De esféricas a rectangulares:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \sin\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \wedge 0 \leq \phi \leq \pi \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.2 Superficies Paramétricas

Según Larson, sean las funciones  $x$  y  $y$  de variables  $u$  y  $v$ ,

continuas en un dominio del plano. Se denomina superficie paramétrica al conjunto de puntos dado por:

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (3)$$

Donde las ecuaciones

$$\begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned} \quad (4)$$

Son las ecuaciones paramétricas de la superficie.

### 2.3 Graficando Superficies en GeoGebra

GeoGebra nos permite visualizar una superficie en su vista gráfica 3D. Para establecer el nexo entre la ecuación matemática de una superficie y el entorno de GeoGebra vamos a usar en este caso el comando Superficie y cuya sintaxis está establecida de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} &\text{Superficie}(\langle \text{Expresión} \rangle \langle \text{Expresión} \rangle \langle \text{Expresión} \rangle \\ &\quad \langle \text{Parámetro1} \rangle \langle \text{Valor Inicial1} \rangle \langle \text{Valor Inicial1} \rangle \\ &\quad \langle \text{Parámetro2} \rangle \langle \text{Valor Inicial2} \rangle \langle \text{Valor Inicial2} \rangle) \end{aligned}$$

Basándonos en el trabajo realizado por Flores; Moncada (2019), ahora se va a esbozar la gráfica de un sólido que se encuentra acotado superiormente por la esfera  $S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 6z$  e inferiormente por el semicono  $S_2: z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

La gráfica de ambas superficies va a ser acotadas hasta la curva de intersección de dichas superficies, al unir ambos gráficos va a generar el esbozo de un sólido que difiere a las figuras tridimensionales conocidas.

Considerando las ecuaciones (1) y (2) vamos a representar  $S_1$  en coordenadas esféricas, en donde se obtiene:

$$\begin{aligned} S_1: x^2 + y^2 + z^2 &= 6z \\ S_1: \rho &= 6\cos\phi \end{aligned} \quad (5)$$

De la misma forma, realizamos el cambio de coordenadas para  $S_2$

$$\begin{aligned} S_2: z &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ S_2: \phi &= \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (6)$$

Al reemplazar el valor de  $\phi = \pi/4$ , en  $S_1$  se obtiene  $\rho = 3\sqrt{2}$ , estos valores nos indican la variación de  $\rho$  y  $\phi$ .

De acuerdo a lo obtenido en (5) se realiza la parametrización de la superficie, usando coordenadas esféricas y acotándola de la siguiente manera:

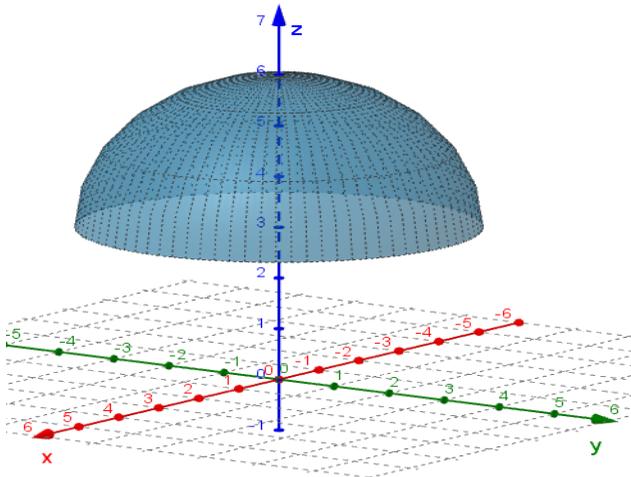
$$S_1: \begin{cases} x = 6 \cos^2\phi \cos\theta \\ y = 6 \cos\phi \sin\theta \sin\phi, \quad \theta \in [0, 2\pi] \wedge \phi \in [0, \pi] \\ z = 6 \cos^2\phi \end{cases} \quad (7)$$

Usando el comando Superficie de GeoGebra con la parametrización establecida, se tiene la sintaxis siguiente para la Superficie  $S_1$

$$\text{Superficie}(6 \cos^2 \phi \cos \theta, 6 \cos \phi \sin \theta \sin \phi, 6 \cos^2 \phi, \theta, 0, 2\pi, \phi, 0, \pi) \quad (8)$$

Que permite visualizar el gráfico de la superficie como se presenta en la Figura 2.

Figura 2 - Superficie  $S_1$  parametrizada



Fuente: Elaboración propia

Para el caso de la superficie  $S_2$  y usando el resultado obtenido en (6) se obtiene la siguiente parametrización usando coordenadas esféricas:

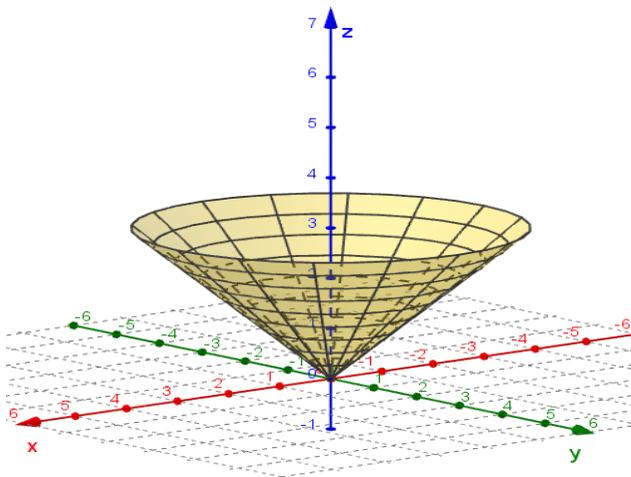
$$S_2: \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \theta \\ y = \rho \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \theta, \theta \in [0, 2\pi] \wedge \rho \in [0, 3\sqrt{2}] \\ z = \rho \cos \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (9)$$

Usando el comando Superficie de GeoGebra con la parametrización establecida, se tiene la sintaxis siguiente para la Superficie  $S_2$

$$\text{Superficie}(\rho \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \frac{\pi}{4}, \theta, 0, 2\pi, \rho, 0, 3\sqrt{2}) \quad (10)$$

Que permite visualizar el gráfico de la superficie como se presenta en la Figura 3.

Figura 3 - Superficie  $S_2$  parametrizada

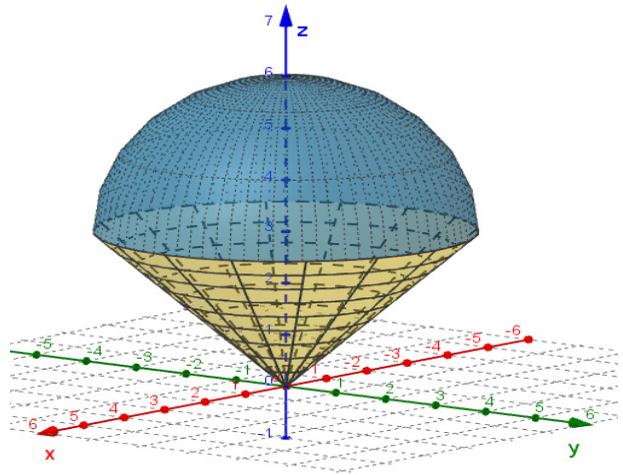


Fuente: Elaboración propia

Plasmando ambas superficies parametrizadas y acotados; se visualiza en la Figura 4.

La figura que se genera es un sólido no convencional que se genera al ser acotado por superficies.

Figura 4 - Sólido no convencional acotado por las superficies  $S_1$  y  $S_2$



Fuente: Elaboración propia.

### 3 Caso Aplicativo: el Planetario Más Grande del Mundo

En la Figura 5 se observa la imagen del museo de Ciencias de la ciudad de Nagoya en Japón, esta estructura esférica se encuentra entre dos edificios que da la sensación de estar flotando, dicha esfera es el planetario más grande del mundo el cual fue inaugurado en el 2011, cuando el museo fue renovado en su totalidad, convirtiéndose en su principal atracción y símbolo del museo.

La estructura esférica se encuentra a 10 metros de altura y posee 35 metros de diámetro, además está compuesta por 700 paneles que están perfectamente unidos, generando una superficie, en el interior hay 350 asientos reclinables y ubicados en círculos concéntricos alrededor de un proyector.

Figura 5 - Museo de Ciencias de la ciudad de Nagoya. Japón



Fuente: [www.Ruta-33.Blogspot.com](http://www.Ruta-33.Blogspot.com)

Con los datos de la estructura esférica y desarrollando a escala, se va establecer la ecuación matemática de la siguiente forma.

$$x^2 + y^2 + (z - 2.75)^2 = 1.75^2 \tag{11}$$

Desarrollando (11) se tiene la ecuación siguiente:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 5.5z + 4.49 = 0 \tag{12}$$

Se realiza el cambio de coordenadas rectangulares a esféricas de (12) usando la relación de (1) y (2) y se obtiene:

$$\rho^2 - 5.5 \cos \phi \rho + 4.49 = 0 \tag{13}$$

Desarrollando la ecuación cuadrática, en donde la incógnita es  $\rho$ , se obtiene:

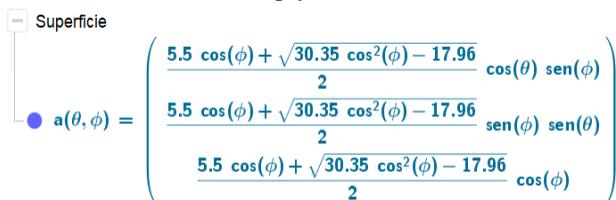
$$\rho = \frac{5.5 \cos \phi + \sqrt{30.25 \cos^2 \phi - 17.96}}{2} \tag{14}$$

Ahora, establecemos la parametrización de (11) basándonos en las coordenadas esféricas y en la relación obtenida en (14).

$$S_2: \begin{cases} x = \frac{5.5 \cos \phi + \sqrt{30.25 \cos^2 \phi - 17.96}}{2} \text{sen } \phi \cos \theta \\ y = \frac{5.5 \cos \phi + \sqrt{30.25 \cos^2 \phi - 17.96}}{2} \text{sen } \phi \text{sen } \theta, \theta \in [0, 2\pi] \wedge \phi \in [0, \pi] \\ z = \frac{5.5 \cos \phi + \sqrt{30.25 \cos^2 \phi - 17.96}}{2} \cos \phi \end{cases} \tag{15}$$

Digitando en la barra de entrada del GeoGebra la parametrización obtenida en (15) visualizamos la superficie que describe la estructura esférica del Museo de Ciencias de la ciudad de Nagoya (Figura 5).

**Figura 6** - Bosquejo de la estructura esférica del Museo de Ciencias de la ciudad de Nagoya



$$\mathbf{a}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \frac{5.5 \cos(\phi) + \sqrt{30.35 \cos^2(\phi) - 17.96}}{2} \cos(\theta) \text{sen}(\phi) \\ \frac{5.5 \cos(\phi) + \sqrt{30.35 \cos^2(\phi) - 17.96}}{2} \text{sen}(\phi) \text{sen}(\theta) \\ \frac{5.5 \cos(\phi) + \sqrt{30.35 \cos^2(\phi) - 17.96}}{2} \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Fuente: Elaboración propia.

#### 4 Conclusion

En la actualidad el uso de la tecnología en la educación matemática nos permite explicar y visualizar definiciones,

conceptos, teoremas, esbozo de gráficas, etc. que han sido en su momento, difícil de ser entendidos y comprendidos por los estudiantes. En el caso particular de nuestra investigación, se valora el enlace que existe entre la definición matemática de superficies paramétricas con el comando Superficie del GeoGebra, se ha establecido que para representar una superficie en el espacio se debe de realizar una parametrización que describe la ecuación de la superficie como una función vectorial en dos variables, esta representación matemática se traslada a la sintaxis del comando Superficie del GeoGebra el cual nos permite visualizar en forma interactiva y dinámica superficies en el espacio.

El uso de GeoGebra es de mucha utilidad cuando se deben esbozar superficies convencionales y no convencionales, en especial cuando se requiere usar superficies paramétricas basadas en coordenadas esféricas.

Las coordenadas esféricas poseen una variedad de aplicaciones en distintas áreas y es por ello que se debe incentivar no solo a realizar cálculos sino también a intentar buscar aplicaciones en la vida real y poder modelarlas.

#### Referencias

Del Pino, J. (2013). *El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión*. España: Universidad de Jaén.

Flores, A. y Moncada, C. (2019). *Superficies acotadas y sólidos no convencionales en GeoGebra*. VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação (CBIE 2019). Anais dos Workshops do VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação (WCBIE 2019). doi: 10.5753/cbie.wcbie.2019.568

La ruta 33 Blog (2016). *El planetario del Museo de Ciencias de la ciudad de Nagoya | Japón*. Recuperado de: <http://ruta-33.blogspot.com/2016/04/el-planetario-del-museo-de-ciencia-de-la-ciudad-de-nagoya--japon.html>

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 2 de varias variables*. México: McGraw Hill, p. 825, 1102.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables trascendentes tempranas*. México: Cengage Learning.