A NOÇÃO DE DIVISÃO PARA QUEM NÃO APRENDEU A DIVISÃO

Aparecido dos Santos[1]
Universidade Nove de Julho
Vera Merlini[2]
Universidade Estadual de Santa Cruz
Sandra Magina[3]
Universidade Estadual de Santa Cruz/ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Eurivalda Santana[4]
Universidade Estadual de Santa Cruz

RESUMO

Este artigo discute as estratégias usadas por estudantes dos 1º e 2º anos do Ensino Fundamental e seus desempenhos na resolução de situações problema envolvendo a divisão, com objetivo de investigar a maturidade cognitiva dos alunos que ainda não foram expostos formalmente a esse conceito, para lidarem com situações envolvendo essa operação. O estudo ancorou-se na Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1983, 1988, 1994) e nos modelos intuitivos de Fischbein et al. (1985). A pesquisa consistiu da aplicação de um teste diagnóstico, composto por 13 questões, a 166 estudantes (80 do 1º ano e 86 do 2º ano) de uma Escola Pública da cidade de São Paulo. A aplicação ocorreu simultaneamente nos dois anos. Para efeito desse artigo, analisaremos três dessas questões, sendo uma envolvendo a ideia de partição e as outras duas envolvendo a ideia de quotição. Considerando o sucesso dos estudantes como indicador de aprendizagem, os resultados indicam que houve ganhos significativos quando comparamos o desempenho dos estudantes do 2º com os do 1º ano nas três situações analisadas. Os resultados apontam ainda que o desempenho dos estudantes não sofreu diferença significativa nas situações de cota quando comparados com a situação de partição. Do ponto de vista qualitativo, foi possível identificar quatro níveis de estratégias empregadas pelos alunos: (a) nível I -

[1] cido10@uol.com.br
[2] vera.merlini@gmail.com
[3] sandramagina@gmail.com
[4] Eurivalda@hotmail.com

incompreensível; (b) estratégia de pensamento aditivo; (c) estratégia de transição; e (d) estratégia de pensamento multiplicativo. O estudo conclui que os estudantes desses anos demonstram já estar cognitivamente preparados para trabalhar com situações das estruturas multiplicativas, apoiados em estratégias baseadas na representação pictórica.

Palavras-Chave: Estrutura Multiplicativa, Divisão, Ensino Fundamental, Estudo diagnóstico.

ABSTRACT

This article discusses the strategies used by students from 1st and 2nd year of elementary school and their performance in problem solving situations involving division. The objective is to investigate the cognitive maturity of students, who have not been formally exposed to this concept, to deal with situations involving this operation. The study has been anchored in the Conceptual Fields Theory (Vergnaud, 1983, 1988, 1994) and the intuitive models proposed by Fischbein et al. (1985). The research study consisted of administering a diagnostic test consisting of 13 questions, to 166 students (80 first year and 86 second year) from a Public School in São Paulo City. This diagnostics was simultaneously applied in both school years. For purposes of this paper, we analyze three out of the 13 questions, one involving the idea of partition and the other two involving the idea of quotation. Considering the success of students as an indicator of learning, the results indicate that there were significant gains when we compare the performance of 2nd year students to the 1st year in all three situations. Results also indicate that there was no significant difference between students' performance in quota situations and partition situation. From a qualitative point of view, it was identified four levels of strategies used by students: (a) Level I - incomprehensible; (b) additive strategy thinking; (c) transition strategy; and (d) multiplicative thinking strategy. The study concludes that students from these scholar years seem to be cognitively prepared to work with situations of multiplicative structures, supported by strategies based on pictorial representation.

Keywords: Multiplicative Structure, Division, Elementary School, Diagnostic Study.

INTRODUÇÃO

Muito se tem falado a respeito do pífio desempenho dos estudantes brasileiros da Educação Básica nas macro-avaliações, sejam elas no âmbito internacional ou no âmbito Nacional.

No âmbito internacional, dados dos dois últimos PISA[5] (2013), que avalia, entre outros aspectos, a proficiência dos estudantes em Matemática, revela que o Brasil, apesar de apresentar uma ligeira melhora em Matemática, ela ainda é pouco expressiva. O Brasil saiu de 386 pontos, registrados em 2009, para 391 pontos em 2013. Comparativamente à média da Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) que é de 494 pontos, o Brasil está estacionado na 58ª posição dentre os 65 países participantes. Já em nível nacional, o panorama não é muito diferente, pois os resultados das últimas edições do SAEB[6] (2011) continuam denunciando que o nível de proficiência dos estudantes do Ensino Fundamental em Matemática está aquém do esperado. Apenas 42,8% dos alunos que concluem o Ensino Fundamental têm as habilidades em Matemática esperadas para essa etapa de escolaridade.

Tal panorama geral do desempenho dos estudantes coloca no centro do debate questões recorrentes a respeito do ensino e da aprendizagem matemática em todos os níveis de escolaridade. Contudo, não é o foco deste artigo discutir todas as questões relativas ao ensino da Matemática, tampouco se ater à análise dos resultados do desempenho dos estudantes nas macro-avaliações. O nosso interesse é focar no desempenho apresentado pelos estudantes dos dois primeiros anos do Ensino Fundamental em situações do Campo Conceitual das estruturas multiplicativas, mais especificamente aquelas envolvendo o conceito da divisão.

Nessa perspectiva, examinaremos duas situações de divisão abordadas no SARESP[7] (2008, pp. 35 e 45):

[5] Programme for International Student Assessment (Programa Internacional de Avaliação de Estudantes).
[6] SAEB é a sigla utilizada para significar Sistema de Avaliação da Educação Básica.
[7] SARESP é a sigla utilizada para significar Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

Situação 1: *Um carro percorre 192 quilômetros em 3 horas. Em uma hora o carro percorre quantos quilômetros?*

Situação 2: *Dividindo 369 por 3 obtemos:*

A Situação 1 envolve a ideia de proporcionalidade, e requer a operação de divisão para a sua resolução. Na categorização adotada pelo SARESP (2008), a situação é classificada no nível 225, o que significa que a resolução correta se configura como indicativo de que os estudantes estão no nível considerado adequado. No entanto, o percentual de acerto para essa questão na 4ª série (atual 5º ano do Ensino Fundamental) foi de 45%, o que significa que menos da metade dos estudantes não tem sucesso na resolução desse tipo de situação.

Já a Situação 2 requer que o estudante saiba aplicar corretamente os procedimentos do algoritmo da divisão. Trata-se de uma situação simples, classificada pela matriz de referência do SARESP (2008) como uma situação de nível básico. O percentual de acerto para essa situação foi de 65%.

Nas duas situações, os valores numéricos são baixos e o algoritmo requerido não apresenta grandes dificuldades para a sua execução. Por se tratar de duas situações simples, era de se esperar que o desempenho apresentado por esses estudantes fosse superior ao alcançado.

Com relação a esse último aspecto, o que se pode observar é uma diferença de 20 pontos percentuais em favor da segunda situação. Tal diferença pode estar ligada à dificuldade dos estudantes em identificar a divisão como a operação adequada para a resolução do problema na primeira situação, uma vez que o enunciado não traz, de forma explícita, qualquer palavra-chave indicativa da operação da divisão, tais como distribuir, repartir, dividir, entre outras, estratégia muito utilizada para o ensino das operações elementares da Matemática.

Corrobora essa reflexão outra situação contemplada no SARESP (2010). Trata-se de uma situação envolvendo a ideia de divisão por cota. Observe:

Situação 3: *Angélica faz bombons para vender. Ela arruma os bombons em caixinhas com 6 bombons cada. Quantas caixinhas ela precisará para arrumar 120 bombons?*

Segundo o relatório do SARESP (2010, p. 80), menos da metade dos alunos (47,9%) mostrou ter compreendido este significado da divisão, sugerindo que alunos não compreenderam o enunciado do problema ou não tinham domínio, de fato, da divisão.

Em que pesem todas as considerações, resguardadas as proporções metodológicas empregadas por essas avaliações de larga escala, temos consciência de que os dados apresentados contribuem para a tessitura da problemática inicial, ao mesmo tempo em que desvelam a ponta do *iceberg* constituído por uma complexidade de aspectos multifacetados que demandam diversos olhares críticos.

Nesse contexto, o presente artigo tem por finalidade investigar a capacidade dos alunos que ainda não foram expostos formalmente ao conceito divisão para lidar com situações envolvendo essa operação.

O CONCEITO DE DIVISÃO NA PERSPECTIVA DA TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

A Teoria dos Campos Conceituais, formulada por Vergnaud (1990, 1994), visa possibilitar uma estrutura consistente às pesquisas sobre atividades cognitivas, em especial, com referência à aprendizagem da Matemática. Permite, ainda, situar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos, na perspectiva de seu conteúdo conceitual, isto é, estudar as teias de relação existentes entre os conceitos matemáticos, no sentido proposto por Kieren (1988). Em outras palavras, trata-se de uma teoria cognitivista que oferece um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas.

Essa teoria possibilita duas análises importantes: a primeira refere-se à relação existente entre os conceitos, como conhecimentos explícitos, e os invariantes operatórios, como implícitos nos comportamentos dos sujeitos frente a uma determinada situação; a segunda sustenta um aprofundamento das relações existentes entre a situação (significado) e a representação (significante).

Assim, a teoria *vergnaudiana* postula que os conceitos matemáticos traçam seus sentidos com base em uma variedade de situações e, normalmente, cada situação não pode ser analisada com a ajuda de apenas um conceito. Em outras palavras, uma situação, por mais simples que seja, envolve mais de um conceito e, por outro lado, um conceito não pode ser apropriado a partir da vivência de uma única situação.

Dessa forma, podemos nos referir a um Campo Conceitual como sendo um conjunto de problemas ou situações cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros.

O autor destaca a importância da aprendizagem de dois Campos Conceituais para alicerçar todos os demais conceitos matemáticos: os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, ou simplesmente estruturas aditivas e estruturas multiplicativas. A primeira se caracteriza como um conjunto de situações que requer, para a sua resolução, uma operação de adição ou subtração ou as duas combinadas. Já a segunda se caracteriza como um conjunto de situações que requer, para a sua resolução, uma operação de multiplicação ou divisão ou a combinação de ambas. É sobre as estruturas multiplicativas que passaremos a discorrer na sequência.

A ESTRUTURA MULTIPLICATIVA

Este Campo Conceitual envolve vários conceitos, dentre eles podemos destacar: as funções lineares e n-linear, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, a razão, a proporção, o produto de medidas, a multiplicação e a divisão.

A partir das ideias teóricas de Vergnaud (1988, 1994) sobre o Campo Conceitual Multiplicativo, elaboramos um esquema com o objetivo de sintetizar as ideias centrais desse campo, apresentado na Figura 1.

O esquema é constituído por duas relações: quaternárias e ternárias. A primeira relação, por sua vez, é composta por dois eixos de situações: proporção simples e proporções múltiplas e a segunda também é formada por dois eixos de situações; a comparação multiplicativa e produto de medidas. Os dois eixos pertencentes às relações quaternárias possuem duas classes: correspondência um para muitos e correspondência muitos para muitos, podendo estas trabalhar com dois tipos de quantidades: discreta e contínua.

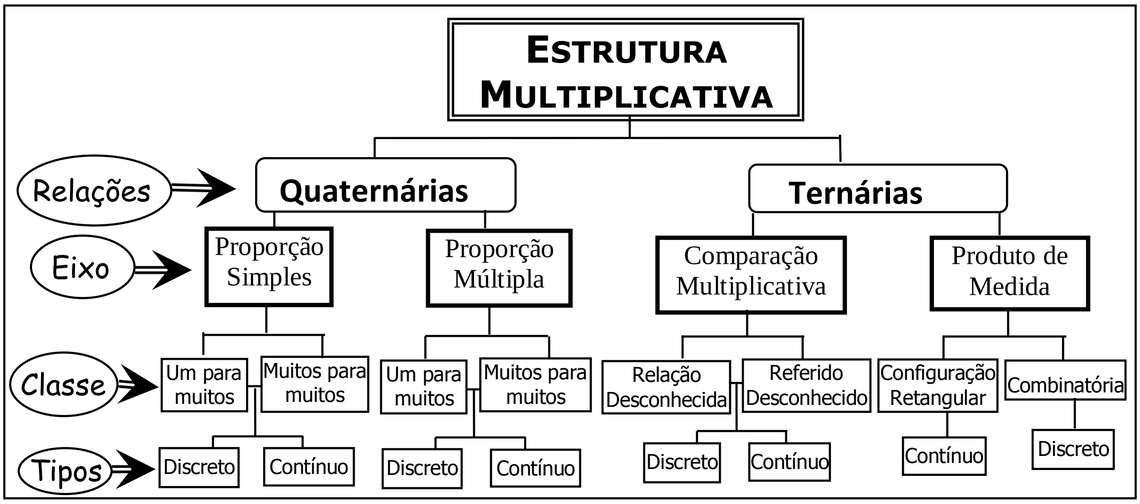


Figura 1: Esquema das Estruturas Multiplicativas elaborado por Magina, Santos e Merlini, em 2010 e ajustado em 2012.

Já os dois eixos pertencentes às relações ternárias possuem classes distintas. O eixo comparação multiplicativa é constituído pelas classes referido desconhecido e relação desconhecida, podendo essas também trabalhar com os tipos de quantidades discretas e contínuas. Por fim, o eixo produto de medida tem como classes configuração retangular e combinatória. Devemos salientar que as duas classes desses eixos só trabalham com um tipo de quantidade: contínua para a configuração retangular e discreta para a combinatória.

Para fazer uma breve distinção entre as relações ternárias e quaternárias, vamos discutir a seguinte situação:

Um pacote de bombom custa R$ 4,00. Quanto pagarei na compra de três pacotes de bombons?

Esse tipo de situação é considerado o protótipo da multiplicação cuja resolução, comumente, se apoia em uma relação ternária: $a \times b = c (4 \times 3 = 12)$. Contudo, o que está implícito nessa situação é uma relação quaternária entre duas quantidades de naturezas distintas, que esquematicamente pode ser representada como na Figura 2.

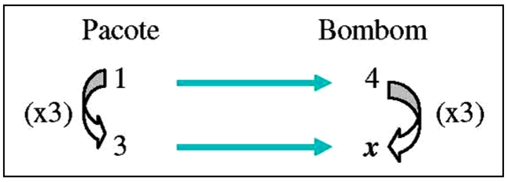


Figura 2: Esquema de uma relação quaternária

Apesar de a situação ser típica das relações quaternárias, dificilmente ela é trabalhada como tal na escola. Pelo contrário, ela é tratada, do ponto de vista didático, como uma relação ternária em que se estimula o estudante a identificar os dois números do problema que são maiores do que um para que, ao multiplicá-los, possa encontrar a sua resposta.

Contudo, o entendimento das relações quaternárias possibilita aos estudantes compreender o porquê de se multiplicar o preço pela quantidade de um objeto (reais por pacotes de bombons) obtendo o resultado em reais, e não em pacotes de bombons. Além disso, amplia os procedimentos de resolução, podendo pensar no fator escalar como estratégia ou ainda no fator funcional (conhecimento de base que é central para o trabalho com as funções nos anos mais avançados de escolaridade).

Mas qual seria a outra vantagem dessa abordagem, além dos argumentos apresentados acima? A situação a seguir ajuda a esclarecer:

Paguei por 5 bolas R$ 60,00. Quanto pagaria se quisesse comprar 7 bolas?

Essa situação mantém a mesma estrutura daquela discutida anteriormente, contudo não faz sentido pensar no produto direto entre as duas quantidades (preço x bolas), mas sim na relação quaternária multiplicativa que existe entre elas.

Diferentemente das relações quaternárias, as ternárias são tratadas como uma relação entre dois elementos de mesma natureza que se compõem para formar um terceiro elemento. Por exemplo, multiplica-se comprimento (medida linear) por largura (medida linear) e obtêm-se área (medida de superfície) ou, ainda, meninos dançarinos x meninas dançarinas produzindo pares de dançarinos. Em outras palavras, os dois elementos (quantidade de meninos e meninas) estão ligados por uma relação multiplicativa que resultará o número total de pares possíveis, isto é, o produto entre o conjunto de meninos (formado por três meninos) e o conjunto de meninas (formado por quatro meninas) resulta no conjunto de possíveis pares. No plano numérico temos: $x = 3 \times 4$ e no plano dimensional *x pares = 3 meninos* x *4 meninas.* Todos esses argumentos justificam a necessidade, do ponto vista didático, de se fazer uma clara distinção entre as duas relações: a quaternária e ternária.

Passaremos a descrever, sucintamente, cada uma das classes que compõe as relações ternárias e quaternárias.

Eixo 1 – Proporção simples: Trata-se de uma relação quaternária. Como o próprio nome diz, envolve uma relação entre quatro quantidades, sendo duas de um tipo e as outras duas de outro tipo ou, então, uma simples proporção direta entre duas quantidades, como por exemplo: pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância, entre outras. Esse eixo pode ser divido em duas classes de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos.

Exemplo 1: Correspondência um para muitos - *Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas têm cinco carros*?

Exemplo 2: Correspondência muitos para muitos – *A cada cinco bombons comprados, a loja Boa Compra dá três caramelos de brinde. Se Ana comprar 15 bombons quantos caramelos ela ganhará?*

Eixo 2 – Proporções múltiplas: Trata-se de relação quaternária, envolvendo mais de duas quantidades relacionadas duas a duas (pessoas, açúcar, dias). Esse eixo pode ser divido em duas classes de situações: a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos.

Exemplo 3: Correspondência um para muitos: *Uma pessoa deveria beber em média cinco litros de água em dois dias. Qual é o consumo mensal (30 dias) de uma família com 5 pessoas?*

Exemplo 4: Correspondência muitos para muitos – *Um grupo com 50 pessoas vai passar 28 dias em férias no campo. Elas precisam comprar uma quantidade de açúcar suficiente. Elas sabem que a média de consumo por semana para 10 pessoas é de 3,5kg. Quantos quilos de açúcar elas precisam comprar?*

Nesse eixo, optaremos por discutir apenas o Exemplo 2 (correspondência muito para muitos, com quantidade contínua), tendo em vista que não há variações relevantes nas estratégias de resolução que justifiquem tal detalhamento.

Sendo assim, a situação retratada no Exemplo 2, é uma relação quaternária envolvendo mais de duas quantidades relacionadas duas as duas, isto é: a quantidade de “dias” está relacionada proporcionalmente com a quantidade de “consumo”, e esta, por sua vez, está relacionada proporcionalmente com a quantidade de “pessoas”.

Nessa situação, não há uma relação de proporcionalidade entre as quantidades “dias” e “pessoas”, fato que implica, do ponto de vista didático, tratar separadamente as quantidades “dias e consumo” e “pessoas e consumo”. Contudo, não devemos perder de vista que a quantidade total do consumo de açúcar não é dada em função das quantidades “dias” e “pessoas”, separadamente, mas sim é obtida em função da relação que existe entre elas. Observe, na Figura 3, um esquema contendo a estratégia de resolução que utiliza o operador escalar:

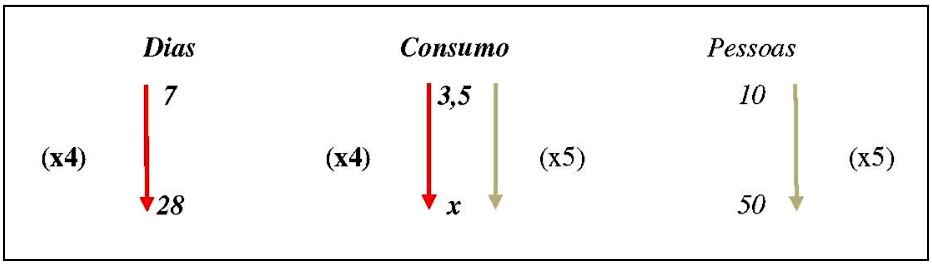


Figura 3: Esquema da proporção múltipla – parte A (operador escalar)

Na relação das quantidades “dias” e “consumo”, é possível obter o consumo de açúcar nos 28 dias por dez pessoas multiplicando o consumo semanal (3,5 – valor da cota por semana para um grupo com dez pessoas) pelo escalar (4), obtendo como resultado a quantidade de consumo igual a 14 kg. Entretanto, essa quantidade não representa a quantidade de açúcar necessária para o grupo com 50 pessoas. O que demanda tratar agora da outra relação, qual seja: “pessoas” e “consumo” (Figura 4).

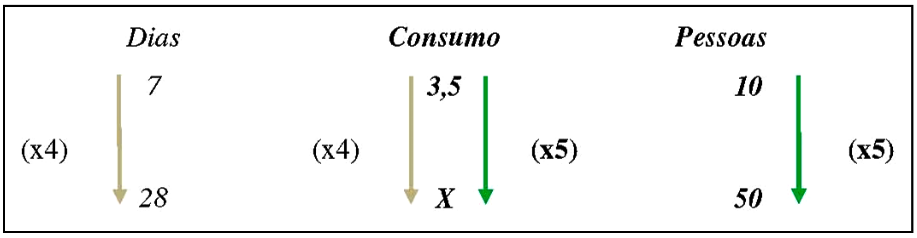


Figura 4: Esquema da proporção múltipla – parte B (operador escalar)

Na relação quantidades “pessoas” e “consumo”, é possível obter-se o consumo de açúcar para 50 pessoas multiplicando o consumo semanal (3,5 – valor da cota por semana para um grupo com dez pessoas) pelo escalar (5), obtendo como resultado a quantidade de consumo igual a 17,5 kg. Todavia, essa quantidade não representa ainda a quantidade de açúcar necessária para o grupo com 50 pessoas em 28 dias. Esse fato demanda compreender que a quantidade total (açúcar para 50 pessoas em 28 dias) é dada pelo produto entre os dois operadores escalares e a quantidade de consumo semanal de açúcar para dez pessoas ($4 \times 5 \times 3{,}5 = 70$), conforme se observa na Figura 5.

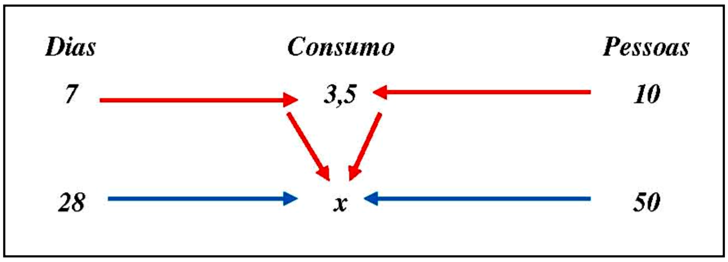


Figura 5: Esquema da proporção múltipla (operador funcional)

Do ponto de vista funcional, trata-se de uma função bilinear (Vergnaud, 1988), isto é, no caso do exemplo anterior, a quantidade "consumo" depende da relação de proporcionalidade existente entre as quantidades "dias e consumo" e "pessoas e consumo". Numericamente teríamos: $f(5 \times 10,\ 4 \times 7) = 5 \times 4 \times f(10, 7)$; em termos gerais teríamos: $f(n_1 x_1;\ n_2 x_2) = n_2 f(x_1, x_2)$.

Posto de outra maneira, poder-se-ia compreender que o "consumo" é diretamente proporcional a outras duas quantidades ("pessoas" e "dias"). Sendo $\frac{3{,}5}{7} = 0{,}5$. O número 0,5 (coeficiente de proporcionalidade) significa o consumo de açúcar de 10 pessoas por dia. Sendo assim, deve-se multiplicar 0,5 por 28 dias, obtendo, dessa maneira, o consumo de açúcar para 10 pessoas por 28 dias. Na sequência, como temos um grupo com 50 pessoas, devemos multiplicar o resultado ($0{,}5 \times 28 = 14$) por 5 grupos com dez pessoas ($14 \times 5 = 70$ kg de açúcar).

Eixo 3 – Comparação multiplicativa: as situações que fazem parte desse eixo envolvem a comparação entre duas quantidades de mesma natureza. Já no início da escolarização, situações envolvendo a relação de dobro e de metade são exploradas e se configuram como protótipo desse eixo, como por exemplo:

João tem a metade da quantia de Maria. Se João tem R$ 10,00, qual é a quantia de Maria? A seguir destacamos um exemplo de cada uma das classes desse eixo:

Exemplo 5: Relação desconhecida – *Comprei uma boneca por R$21,00 e uma bola por R$ 3,00. Quantas vezes a boneca foi mais cara que a bola**?***

Exemplo 6: Referido desconhecido – *A idade de Paulo é 5 vezes maior que a idade do seu filho. Paulo tem 30 anos. Qual é a idade do seu filho?*

Eixo 4 – Produto de medidas: Esse eixo é constituído por duas classes: (a) situações envolvendo a ideia de configuração retangular em quantidades contínuas, (b) situações envolvendo a ideia de combinatória em quantidades discretas.

Exemplo7: Configuração retangular – *Qual a área de um terreno que possui 16m de comprimento e 10m de largura?*

Exemplo 8: Combinatória – *Numa festa há quatro meninas e três meninos. Cada menino quer dançar com cada uma das meninas, e cada menina também quer dançar com cada um dos meninos. Quantos pares diferentes de menino-menina são possíveis de serem formados?*

Apresentamos um breve panorama dos eixos e suas respectivas classes de situações que compõem as estruturas multiplicativas, considerando, em sua maioria, o conjunto dos números inteiros. Cabe explicitar que em todas as classes é possível pensar em situações com a mesma estrutura, as quais podem requerer uma operação de multiplicação ou divisão e/ou ainda uma combinação das duas operações para a sua resolução.

Temos consciência que um trabalho consistente com todos os eixos desse campo deve ser desenvolvido ao longo de todo o Ensino Fundamental. Considerando o público alvo desse estudo (estudantes dos 1º e 2º anos), limitaremos a investigar as estratégias de ação nas situações envolvendo a proporção simples na correspondência um para muitos em quantidades discretas. Esse recorte refere-se ao grupo de problemas menos complexos da estrutura multiplicativa. Portanto, o foco desse artigo não é esgotar e nem discutir todas as possibilidades de formulação de situações que envolvem esse campo, mas sim de explorar as situações que requerem a operação de divisão como estratégia mais adequada para a sua resolução.

Fischbein et al. (1985) sugerem dois modelos intuitivos de divisão. Um associado ao ato de repartir (situações que envolvem a ideia de partição) e outro relacionado com medida (situações que envolvem a ideia de divisão por quota). O primeiro modelo está relacionado ao ato de dividir quantidades de naturezas diferentes (ex. figurinhas por crianças) e o segundo modelo está associado ao ato de dividir o total de figurinhas (30 figurinhas) pela cota (cinco figurinhas por amigo) o que resulta em seis amigos.

Organizamos, em forma de esquema, os dois modelos propostos por Fischbein et al. (1985). Esses esquemas estão expostos a seguir (Figuras 6 e 7) e para facilitar a compreensão deles, cada um será precedido por um exemplo.

Exemplo 9: *João tem 30* ***figurinhas*** *e quer distribui-las igualmente para seus 6* ***amigos****. Quantas figurinhas cada um dos seus amigos vai receber*?

Informação1 **(conhecida)**	Informação 2 **(conhecida)**	Resultado (**partição desconhecida**)
Variável 1 (V1) **Quantidade: 30 figurinhas**	Variável 2 (V2) **Quantidade: 6 amigos**	Relação entre V1 e V2 **Desconhecida (?)**

Figura 6: Esquema para divisão por partição.

Exemplo 10: João quer distribuir 30 figurinhas para seus amigos. Ele dará 5 figurinhas para cada um deles. Quantos amigos de João ganharão figurinhas?

Informação1 **(conhecida)**	Informação 2 **(desconhecida)**	Resultado **(quota conhecida)**
Variável 1 (V1) **Quantidade: 30 figurinhas**	Variável 2 (V2) **Quantidade: amigos (?)**	Relação entre V1 e V2 **Conhecida: 5**

Figura 7: Esquema para divisão por quota.

Gitirana et al. (no prelo) realizaram um estudo diagnóstico a partir da aplicação de um instrumento, contendo 15 situações-problema do campo das estruturas Multiplicativas, aplicado a 1014 estudantes da 1ª à 8ª série[8], cuja análise se deu à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Esses pesquisadores constataram que, do ponto de vista cognitivo, há diferença significativa no desempenho dos estudantes na resolução de problemas envolvendo a operação de multiplicação, com coleção e não coleção, em favor dos primeiros. Constataram também que, para resolver os problemas que envolviam a multiplicação em situação de coleção, a estratégia mais comum utilizada pelos estudantes, principalmente aqueles mais jovens, era baseada na adição de parcelas repetidas.

Baseados no modelo proposto por Fischbein et al. (1985) que classifica as situações de divisão por partição e por quota, no estudo de Magina, Santos e Merlini

[8] Nomenclatura utilizada na época em que esse estudo foi realizado.

(2010), que amplia essa categorização para inserir duas subcategorias: coleção e não coleção e, ainda, na pesquisa de Chagas (2010), que avançou no que diz respeito às situações de coleção e não coleção, trazendo para a situação de partição a ideia de coleção envolvendo divisão, a Figura 8 apresenta esquematicamente a classificação das categorias das situações envolvendo a operação da divisão.

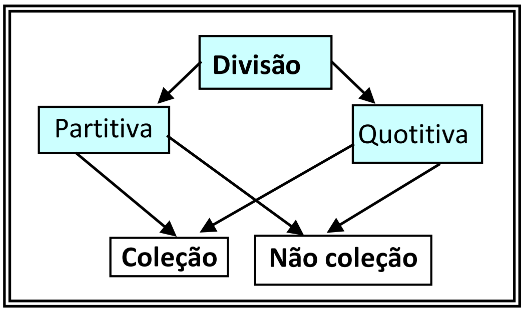


Figura 8: Categorias de classificação da operação de divisão

A ideia de coleção e não coleção não é definida pelos procedimentos matemáticos, mas sim pelos processos psicológicos. O que está em jogo é o significado que as quantidades têm para o indivíduo. Para esclarecer essa ideia, vamos analisar duas situações explorando a ideia de divisão de figurinhas: (a) dividir figurinhas por pacotes (divisão por cotas); (b) dividir figurinhas por crianças (divisão por partição). Na primeira situação, será necessário um grupo de figurinhas (cota) para formar um pacote – *Ganhei 12 figurinhas que estavam em pacotes. Cada pacote continha 3 figurinhas. Quantos pacotes eu recebi?* Já na segunda, as crianças existem, independentemente, da quantidade de figurinhas que irá receber – *Tenho 12 figurinhas para dar aos meus amigos. Quero dar 3 figurinhas para cada amigo. Quantos receberão figurinhas?*

Em síntese, o pacote de figurinhas do primeiro caso só existe a partir da coleção de figurinhas, enquanto que as crianças existem independentemente de se formar ou não a coleção de figurinhas (segunda situação).

Tendo apresentado as estruturas multiplicativas, juntamente com nossas posições teóricas, passaremos, na sequência, a explicitar os caminhos metodológicos que nortearam a presente pesquisa.

METODOLOGIA

O estudo apoiou-se nos princípios da pesquisa descritiva. Trata-se de um estudo em que o pesquisador tem por objetivo conhecer e interpretar determinados fenômenos ligados à realidade sem nela interferir para modificá-la (Rudio, 2001). Dessa forma, o presente estudo busca apresentar e discutir não só o desempenho dos estudantes dos 1º e 2º anos do Ensino Fundamental na resolução de situações envolvendo a operação divisão, como também tem por finalidade categorizar e descrever as estratégias empregadas por eles.

Para tanto, foi aplicado um teste a 166 estudantes de uma mesma Escola Pública Estadual, localizada em um bairro classe média da cidade de São Paulo, assim distribuídos: 80 estudantes do 1º e 86 do 2º ano. O teste foi composto de 13 questões que contemplavam situações do Campo Conceitual Multiplicativo, aplicado coletivamente aos estudantes que responderam individualmente. A aplicação foi conduzida pela professora de cada turma com a supervisão de três pesquisadores. O teste apoiou-se no instrumento construído por Gitirana et al. (no prelo), tendo, inclusive, questões similares.

Para efeito desse artigo, foram analisados o desempenho e as estratégias empregadas pelos estudantes em três situações que envolviam a operação de divisão, sendo que uma delas contemplava a ideia de partição e as outras duas a ideia de quota. Uma dessas situações foi classificada como coleção e a outra como não coleção. A Figura 9 a seguir apresenta as três questões que discutiremos.

Questão 1 (Q1) Ideia de quota – coleção	**Questão 2 (Q2)** Ideia de quota – não coleção	**Questão 3 (Q3)** Ideia de partição não coleção
Em uma caixa de chicletes vêm 2 unidades. João precisa de 18 chicletes. Quantas caixas de chicletes ele vai ter que comprar?	*João tem 24 bolas de gude para dar de presente aos seus amigos. Cada amigo vai ganhar 3 bolinhas. Quantos amigos de João ganharão bolinhas de gude?*	A *professora tem 18 pirulitos para distribuir igualmente com seus 6 alunos. Quantos pirulitos cada aluno vai ganhar?*

Figura 9: Apresentação das questões tratadas neste artigo

De posse dos resultados, a análise foi estruturada em duas partes: uma quantitativa e outra qualitativa. A análise quantitativa refere-se ao desempenho dos estudantes e perfaz um total de 498 itens[9] de análise (240 itens para o 1º ano – 80 estudantes vezes 3 questões – e 258 para o 2º ano). É importante salientar que do

[9] O número 498 é o resultado do produto entre as três situações e os 166 estudantes.

total dos 498 itens, 20 foram desconsiderados da análise por estarem em branco (15 do 1º ano e 5 do 2º). Isto significa que analisamos 225 estratégias advindas do 1º ano e 253 dos estudantes do 2º ano.

Essa análise foi realizada comparativamente entre os desempenhos dos estudantes nas três questões dentro dos anos e entre os anos, levando em consideração três variáveis: (a) análise global do desempenho, (b) divisão por partição versus divisão por quota em situação de não coleção e (c) divisão por quota em situação de coleção versus divisão por quota em situação de não coleção.

A análise qualitativa, por sua vez, foi realizada com base na categorização das estratégias empregadas pelos estudantes na resolução das três situações anteriormente apresentadas. A próxima seção será destinada para apresentação e discussão dos resultados.

APRESENTAÇÃO E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nessa seção serão apresentados os resultados dos desempenhos dos estudantes, e discutiremos os dados sob dois enfoques; o quantitativo e o qualitativo. Salientamos que, na análise quantitativa, foi utilizado o aplicativo *Statistical Package for the Social Sciences* (SPSS) com base em análise estatística não paramétrica. Já a análise qualitativa foi realizada a partir da categorização das estratégias de ação empregadas pelos estudantes em suas resoluções, tanto aquelas que levaram ao acerto, quanto as que induziram ao erro.

Análise Quantitativa

Apresentaremos nossa análise a partir de três perspectivas. A primeira diz respeito ao desempenho geral dos estudantes dos dois anos nas três questões de divisão, que denominaremos de Q1, Q2 e Q3, expostas na Figura 10.

Os dados apontam que os estudantes do 1º ano tiveram baixo desempenho nos três problemas (percentual de acerto abaixo de 20%). Os estudantes do 2º ano apresentam desempenhos superiores aos do 1º ano, partindo de 37% e alcançando patamar de 51%. O teste t-Student apontou haver diferença estatisticamente significativa entre os dois anos, no que tange ao total de acertos nas três questões ($t(164) = -5{,}396;\ 0{,}000$).

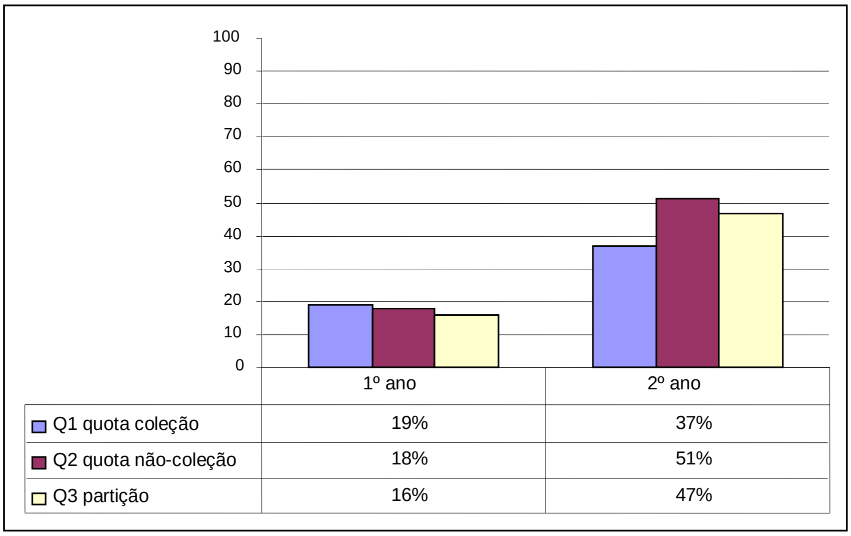


Figura 10: Desempenho, em percentual, dos estudantes dos dois anos, nas três questões.

Tabela 1: média de respostas corretas de estudantes por ano

Ano	Nº	Média	DP
1º	80	0,540	0,795
2º	86	1,350	0,125

Podemos inferir que houve avanço expressivo dos estudantes do 2º ano em relação aos do 1º. Esta análise é válida para os desempenhos dos dois anos, tanto considerando as três questões, quanto considerando cada uma das questões isoladamente, segundo os resultados obtidos no teste t-Student (Q1 [$t(164) = -2{,}491;\ 0{,}014$]; para Q2 [$t(164) = -4{,}876;\ 0{,}000$]; para Q3 [$t(164) = -4{,}438;\ 0{,}000$]).

A segunda perspectiva de análise diz respeito à comparação do desempenho dos estudantes dos dois anos, entre a questão que envolvia a ideia de quota (em situação de não coleção – Q2) e a questão que envolvia a ideia de partição (Q3). Salientamos que os números 0 e 1, utilizados nas tabelas a seguir, significa erro e acerto para cada questão, respectivamente. Para tanto, foram aplicados os testes estatísticos McNemar e Qui-quadrado, utilizando os resultados da Tabela 2:

Tabela 2: Número de respostas incorretas (pontuação= zero) e de respostas corretas (pontuação = um) em Q2 X Q3

		Q3	
	Q2	0	1
1º ano	0	58	8
	1	9	5
2º ano	0	30	12
	1	16	28

A Tabela 2 nos permite inferir que os estudantes do 1º ano tiveram dificuldade tanto nas questões de divisão por quota como de partição. Já o resultado do desempenho do 2º ano mostra que o número de estudantes que acerta as duas questões é praticamente igual ao que erra. Tanto no 1º como no 2º ano os estudantes tiveram maior sucesso na resolução da questão de divisão por quota (Q2) do que por partição (Q3) e esta diferença não se apresentou significativa.

Com relação à terceira perspectiva de análise, esta abordou o percentual de acertos dos estudantes, comparando a divisão por quota em situação de coleção versus a divisão por quota em situação de não coleção. Nessa análise, utilizamos os mesmos testes estatísticos (McNemar e Qui-quadrado) que na perspectiva anterior. Porém, as questões aqui investigadas foram as Q1 e Q2, respectivamente. Os dados estão descritos na Tabela 3:

Tabela 3: Número de respostas incorretas (pontuação= zero) e de respostas corretas (pontuação = um) em Q1 X Q2

		Q2	
	Q1	0	1
1º ano	0	54	10
	1	12	4
2º ano	0	35	19
	1	7	25

De acordo com os dados, observamos que, para os estudantes do 1º ano, a variável coleção não foi facilitadora, já que essas crianças tiveram insucesso nas duas questões igualmente. Já para os estudantes do 2º ano, a divisão por quota envolvendo situação de não coleção foi significativamente mais fácil que a que envolveu coleção $[\chi_1^2 = 14{,}827; p = 0{,}000]$

Por fim, no que tange ao efeito da situação ser de coleção, ou não, sobre o percentual de acerto dos estudantes, observamos que não houve efeito em nosso universo pesquisado; ao contrário, os estudantes do 2º ano se saíram melhor quando a situação envolvia a ideia de não coleção. Esses resultados diferem dos encontrados por Gitirana et al. (no prelo), embora elas tenham discutido esse efeito apenas em problemas de multiplicação. Para entendermos a razão de tal comportamento de nossos estudantes, é necessário que examinemos atentamente as estratégias de ação utilizadas por eles, o que acontecerá na próxima subseção.

Análise qualitativa

Após proceder com a análise quantitativa dos dados, deter-nos-emos na qualidade das estratégias de ação utilizadas pelos estudantes ao resolver as questões propostas. Optamos por analisar todas as estratégias identificadas, independentemente de estarem corretas ou não. Essas estratégias foram agrupadas de forma a permitir que as categorias de análise fossem relacionadas aos níveis de complexidade dos raciocínios utilizados pelos estudantes.

Foram identificados quatro níveis de estratégia, alguns dos quais (nomeadamente os 3º e 4º níveis) contendo sub-níveis. A seguir, apresentamos cada um desses níveis, descrevendo-os e observando sua incidência, segundo as representações “numérica” e/ou “pictórica”.

Salientamos que a análise qualitativa foi realizada a partir de uma visão holística dos dados coletados. Assim, apresentaremos cada um dos níveis, já acompanhados de comentários e buscando estabelecer relações entre as estratégias utilizadas, os tipos de representação (pictórica ou numérica), as questões (Q1 – ideia de cota e coleção – Q2 – ideia de cota e não coleção – e Q3 – ideia de partição) e o sucesso alcançado nessas questões por ano de escolarização.

Nível 1 – Estratégia incompreensível

Estão classificadas como estratégia incompreensível (Nível 1) aquelas respostas em que o estudante não explicita a operação realizada por ele para resolver o problema. Ele pode fazer um desenho sem significado para a resolução do problema, pode repetir um dos dados do problema ou, ainda, pode escolher outro número sem que se consiga entender a razão para tal. Nesse nível, as respostas dos estudantes estão invariavelmente erradas.

Na Tabela 4 encontram-se descritas a incidência das estratégias identificadas nesse nível.

Tabela 4: Número de respostas na estratégia de Nível 1

Estratégia de Nível 1		1º ano	2º ano
Incompreensível	Pictórico	73	45
	Numérico	94	31

Apresentamos a seguir dois exemplos que ilustram tais estratégias classificadas no Nível 1 – Incompreensível.

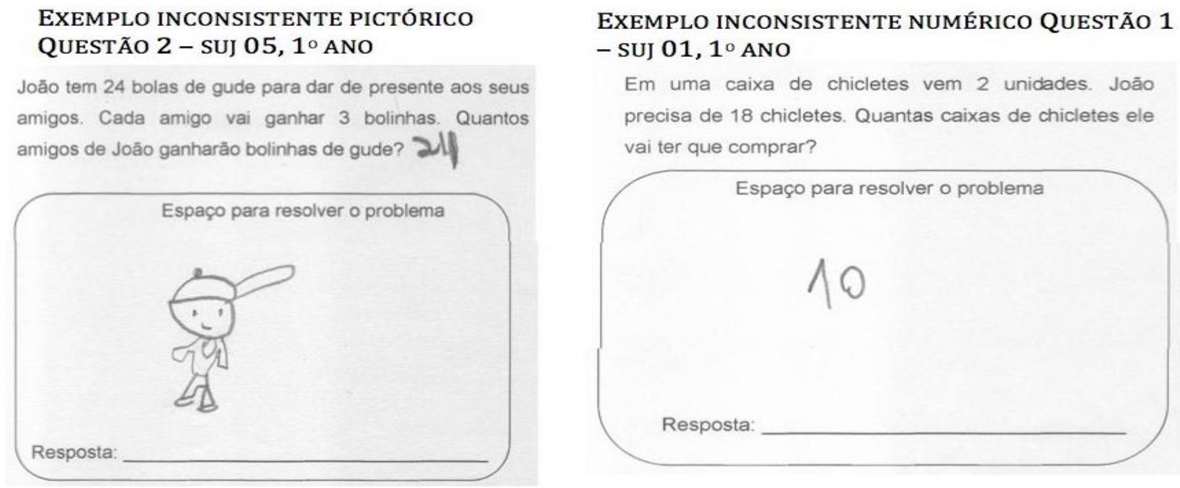


Figura 11: Extratos de protocolos com exemplos de estratégia do Nível 1

Os dados apresentados na Tabela 4 nos permitem observar que a estratégia desse nível foi bem mais utilizada por estudantes do 1º ano. Tal fato pode ser um indicativo de que os estudantes do 1º ano encontram-se mais distantes da apropriação da estrutura multiplicativa do que os estudantes do 2º ano. Essa hipótese ganha alguma força se considerarmos que nenhum desses estudantes dos dois grupos analisados teve contato formal com a operação de divisão. Portanto, podemos considerar que o eventual sucesso desses estudantes na resolução dos problemas provavelmente advém das suas experiências informais e conhecimento espontâneo.

Nível 2 – Estratégia de pensamento aditivo

Na estratégia de pensamento aditivo (Nível 2), o estudante faz uma adição ou subtração usando os dados do problema em forma numérica ou pictórica. Não se trata de fazer adições ou subtrações sucessivas de uma mesma quantidade, mas sim de operar com dois valores distintos. Como no Nível 1, neste também as estratégias de ação que o estudante lança mão para encontrar a solução do problema ainda não o levam ao insucesso.

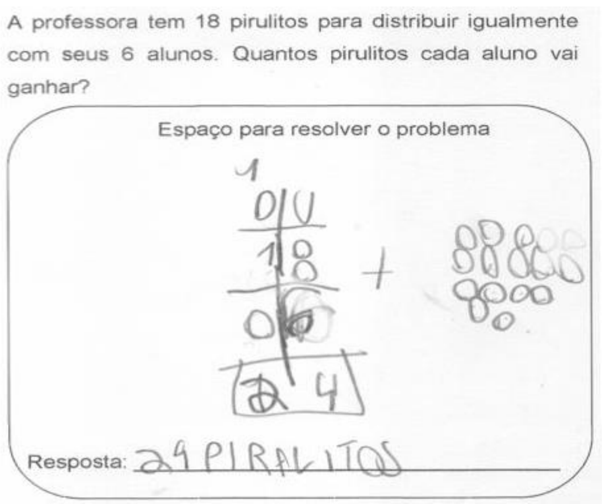
Na Tabela 5 encontra-se a quantidade de vezes que os estudantes lançaram mão de tal estratégia.

Tabela 5: número de respostas na estratégia de nível 2

Estratégia de Nível 2		1º ano	2º ano
Pensamento aditivo	Pictórico	4	28
	Numérico	20	20

Na sequência (Figura 12), apresentamos dois protocolos que ilustram estratégias de ação utilizadas pelos estudantes, as quais foram classificadas nesse Nível 2.

Exemplo de estratégia de pensamento aditivo numérico - Questão 3: suj 124, 2º ano



Exemplo de estratégia de pensamento aditivo pictórico – Questão 3: suj 134, 1º ano

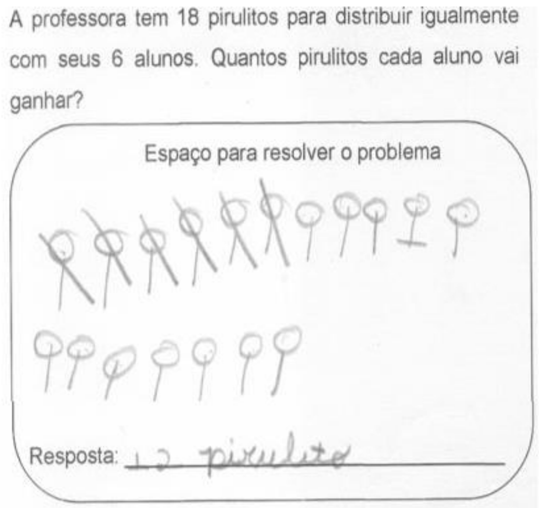


Figura 12: Extratos de protocolos com exemplos de estratégia do Nível 2

A incidência de estratégia do Nível 2 é bem menor do que do Nível 1, principalmente entre os estudantes do 1º ano. Olhando para os grupos internamente, notamos que o 2º ano novamente utilizou-se mais da representação pictórica do que da numérica, fato que não ocorreu com os estudantes do 1º ano que preferiram utilizar a representação numérica à pictórica. Sabemos que as estratégias dos Níveis 1 e 2 levaram ao erro, portanto, lançar mão da representação pictórica parece não ter ajudado o estudante obter sucesso nas questões. Cabe nos indagar se esse perfil se mantém quando os estudantes utilizam estratégias mais complexas (Níveis 3 e 4).

Nível 3 – estratégia de transição

Na estratégia de transição (Nível 3), as ações dos estudantes mostram-se mais sofisticadas, ou seja, o estudante agrupa as cotas, pictórica ou numericamente, até chegar na quantidade total informada no problema. Esta estratégia pode levar tanto ao erro quanto ao acerto, a depender da ação de agrupamento (algumas vezes confusas) ou da interpretação dada pelo estudante para a resolução do problema.

A Tabela 6 apresenta o número de vezes em que as estratégias de ação dos estudantes foram classificadas nesse nível. Ela também considera o tipo de representação (pictórica ou numérica) utilizada pelos estudantes.

Tabela 6: número de respostas na estratégia de Nível 3

Estratégia de Nível 3			**1º ano**	**2º ano**
Transição	**Correto**	Pictórico	23	99
		Numérico	–	2
	Incorreto	Pictórico	7	18
		Numérico	–	–

A Figura 13 ilustra duas dessas estratégias adotadas pelos estudantes, que foram classificadas no Nível 3, sendo uma correta e outra incorreta.

Exemplos de estratégias de pensamento do tipo **transitivo**, nível **3**, com resoluções pictórica, sendo uma correta e outra incorreta

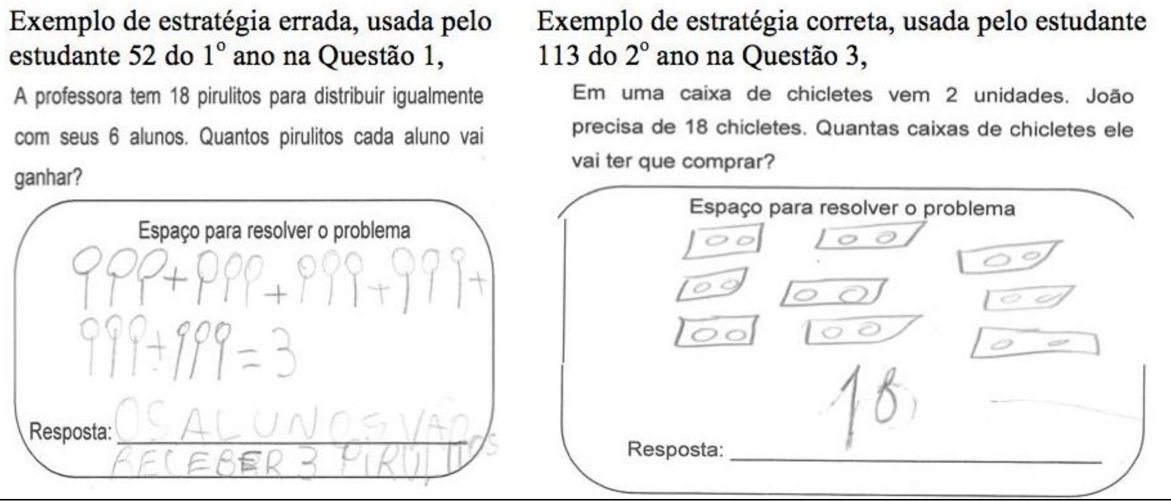


Figura 13: Extratos de protocolos com exemplos de estratégia do Nível 3

A Tabela 6 evidencia que essa foi a estratégia de ação mais utilizada pelos estudantes do 2º ano para resolver as questões. Considerando apenas o Nível 3, é possível notar que a opção pela representação pictórica foi, de longe, a mais utilizada pelos estudantes dos dois anos. A utilização da representação pictórica levou muito mais ao acerto do que ao erro. Tal fato nos leva a refletir sobre a contribuição, do ponto de vista didático, que o uso da representação pictórica traz para a aprendizagem da estrutura multiplicativa.

Ainda do ponto de vista didático, a representação pictórica parece permitir, ao estudante que ainda não se apropriou formalmente da estrutura multiplicativa, uma visão da situação a ser resolvida. Por meio da formação de grupos repetidos de tracinhos, bolinhas ou quadradinhos, o estudante consegue distribuir igualmente a quantidade oferecida na questão (ver os protocolos da Figura 13). Trata-se, portanto, de uma ferramenta poderosa a ser utilizada pela escola no processo de ensino dessa estrutura. Tal inferência nos encoraja a dar um passo à frente e afirmar que essa representação pictórica também pode ser uma ferramenta didática para os estudantes do 1º ano, isso porque das 30 estratégias que eles utilizaram, 23 levaram ao sucesso.

Nível 4 – estratégia de pensamento multiplicativo

Neste nível, o estudante já utiliza estratégias bastante eficientes e claramente multiplicativas. Notemos, contudo, que nenhum estudante utilizou como estratégia de resolução o algoritmo formal da divisão; para lidar com tal situação, o estudante do Nível 4 usava a multiplicação como complementar (ou inversa).

A Tabela 7 apresenta a incidência das estratégias de ação dos estudantes que foram classificadas neste nível. Da mesma forma que no Nível 3, consideraremos o tipo de representação (pictórica e numérica) por eles empregadas.

Tabela 7: número de respostas na estratégia de nível 4

Estratégia de Nível 4		**1º ano**	**2º ano**
Correto	Pictórico	3	4
	Numérico	–	3
Incorreto	Pictórico	1	3

A Figura 14, constituída a partir de protocolos de estudantes do 2º ano, ilustra as estratégias de ação que foram classificadas como Nível 4, sendo que uma leva ao acerto e a outra ao erro.

Pudemos observar que, por se tratar de um nível mais sofisticado de resolução, tivemos um número reduzido de estudantes que se utilizaram dessa estratégia, principalmente entre aqueles do 1º ano. Porém, é importante salientar que, dentro desse universo pequeno de estratégia, elas levaram mais ao sucesso na resolução da questão do que ao erro, e isso é válido para os dois anos. Notamos, por fim, que os estudantes dos dois anos apoiaram-se majoritariamente na representação pictórica.

Exemplos de estratégias de pensamento do nível 4, com resoluções correta e outra incorreta

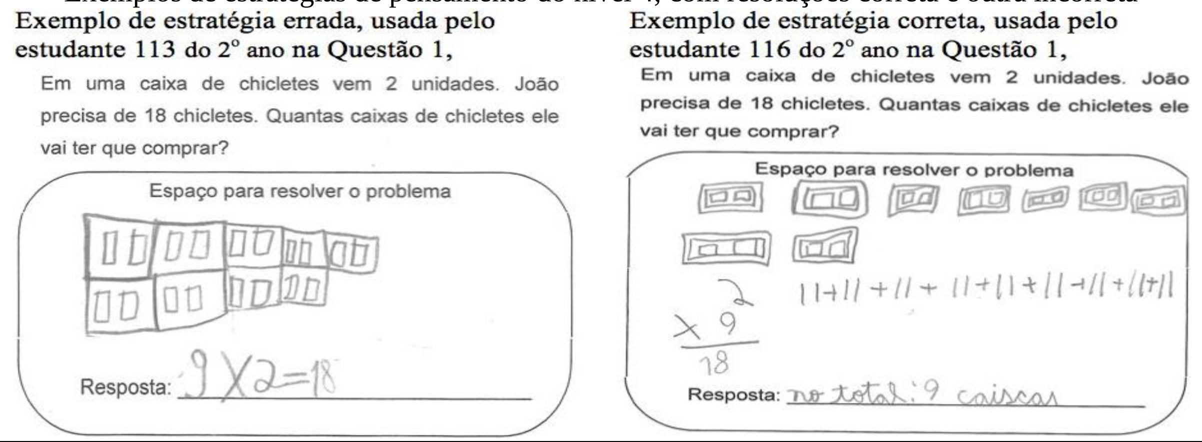


Figura 14: Extratos de protocolos com exemplos de estratégia do Nível 4

Após a apresentação analítica dos quatro níveis, observamos que, de um modo geral, a representação pictórica foi a mais utilizada entre os estudantes do 2º ano (196 estratégias de ação realizadas no âmbito dessa representação versus 56 da representação numérica) e teve destaque equivalente à representação numérica entre os estudantes do 1º ano. O que mais chama a atenção é que foi por meio da representação pictórica que os estudantes desses dois anos escolares conseguiram obter maior sucesso em suas estratégias de ação. Isto se torna mais evidente nos Níveis 3 e 4, aqueles cujas estratégias são mais sofisticadas e nos quais os estudantes tiveram algum êxito.

Tal resultado indica que o uso da representação pictórica mostrou-se uma ferramenta eficiente para auxiliar o estudante a chegar ao resultado correto. Assim, a análise das estratégias nos permite supor que os estudantes dos dois anos, principalmente os do 2º ano, tiveram na representação pictórica um importante apoio para atingir a solução adequada dos problemas de divisão.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo do presente artigo foi o de investigar a capacidade dos alunos que ainda não foram expostos formalmente ao conceito de divisão para lidar com situações envolvendo essa operação. A análise dos resultados nos permite fazer duas considerações: uma do ponto de vista quantitativo e outra do ponto de vista qualitativo.

No que concerne ao ponto de vista quantitativo, se considerarmos o sucesso dos estudantes como indicador de aprendizagem, os resultados indicam que houve ganhos significativos quando comparamos o desempenho dos estudantes do 2º com os do 1º ano nas três situações. Esse resultado nos leva a sugerir aos professores que atuam nos anos iniciais que investiguem as competências de seus estudantes para lidar com situações de divisão, de tal forma a não permitir que esse eventual conhecimento seja desperdiçado.

Conforme defende Vergnaud (1996), a apropriação de um campo conceitual demanda um longo período de tempo. Sendo assim, cabe à escola desenvolver um trabalho consistente que contribua para a apropriação do campo conceitual multiplicativo já a partir do 2º ano do Ensino Fundamental. Inicialmente, a escola poderia abordar a estrutura multiplicativa explorando situações elementares, preferencialmente aquelas relacionadas à proporção simples, na classe um para muitos, utilizando apenas quantidades discretas.

O estudo aponta que o desempenho dos estudantes não sofre diferença significativa nas situações de quota comparativamente com a situação de partição. De fato, parece que não é o tipo de situação (quota ou partição) que leva o estudante a ter êxito, mas sim o ano escolar em que este se encontra e a representação (pictórica ou numérica) utilizada. Entretanto, dentro da situação de quota, a ideia de coleção e não coleção influenciou significativamente o desempenho dos estudantes do 2º ano.

No que diz respeito ao ponto de vista qualitativo, optamos por analisar todas as estratégias utilizadas pelos estudantes, tanto as que resultaram em sucesso, quanto as que levaram a uma resolução inadequada. Dessa análise, identificamos quatro níveis de estratégia, desenvolvidos por meio das representações numérica ou pictórica.

Constatamos que a representação pictórica foi bastante utilizada, principalmente pelos estudantes do 2º ano. E, mais importante que isso, por meio dela, os estudantes tiveram muito mais sucesso do que quando lançavam mão da representação numérica. Este fato indica o efeito poderoso que a representação pictórica tem sobre o sucesso dos estudantes, pelo menos no que tange aos anos iniciais. Tal constatação nos leva a propor, enfaticamente, o seu uso no processo de ensino do conceito da divisão, iniciando já a partir dos dois primeiros anos do Ensino Fundamental. Consideramos a representação pictórica como eficiente ferramenta didática para a apropriação e expansão do campo conceitual multiplicativo.

Assim, concluímos que estudantes que ainda não aprenderam formalmente a operação de divisão demonstram possuir noções matemáticas que permitem lidar com situações das estruturas multiplicativas, apoiados pelo recurso pictórico.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento (CNPq) pelo apoio financeiro para a realização de nosso estudo

REFERÊNCIAS

Brasil. (2011). *Relatório SAEB - Matemática.* Sistema de Avaliação do Ensino Básico. Brasília: INEP, MEC.

Chagas, F. A. (2010). *Compreendendo as estratégias utilizadas por crianças para resolver problemas de multiplicação e divisão, envolvendo coleção e não-coleção.* Monografia - Especialização em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco, Faculdade de Psicologia, Recife.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M., & Marino, M. (1995). The rule of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal of Research in Mathematics Education*, pp. 3-17.

Gitirana, V., Campos, T. M., Spinillo, A., & Magina, S. (no prelo). *Repensando Multiplicação e Divisão: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.* São Paulo, SP, Brasil: PROEM.

Kieren, T. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: its intuitive and formal development. Em J. Hiebert, & M. Behr, *Number Concepts and Operations in teh Middle Grades* (pp. 80-162). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Magina, S., Santos, A., & Merlini, V. (2010). Quando e Como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do Ensino Fundamental? Contribuição para o debate. *Revista EMTEIA, 1*(1).

Relatório OECD (Organização para a Cooperação e o Desenvolvimento Econômico. (2013). *The Programme For Internationa Student Assessment.* Acesso em 5 de maio de 2013, disponível em http://www.pisa.oecd.org/dataoecd/15/13/39725224.pdf

Rudio, F. V. (2001). *Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica* (32a ed.). Petrópolis, RJ, Brasil: Vozes.

São Paulo. (2008). *Relatório SARESP - Matemática.* Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.

São Paulo. (2010). *Relatório SARESP - Matemática.* Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structures. Em R. Lesh, & M. Landau, *Acquisitions of mathematics concepts and procedures* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. Em H. Hiebert, & M. Behr, *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*, pp. 133-170.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? Em H. Guershon, & J. Confrey, *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: State University of New York Press.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. Em J. Brun, *Didáctica das Matemáticas* (M. J. Figueiredo, Trad., pp. 155-191). Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.

Submetido: setembro de 2013

Aceito: junho de 2014