

RELAÇÕES ENTRE A ESTRUTURA DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DO NÚMERO: A PALAVRA E A ESCRITA ARÁBICA¹

Celia Finck Brandt²

Universidade Estadual de Ponta Grossa

Méricles Thadeu Moretti³

Universidade Federal de Santa Catarina

RESUMO

O estudo apresenta uma investigação a respeito das relações entre a estrutura do sistema de numeração decimal e os registros de representação semiótica do número, visando identificar o modo como a estrutura do sistema de numeração decimal posicional (SNDP) manifesta-se em tais registros. Para tal, identificamos as características das operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, que podem ser realizadas com os registros buscando articulá-los com a organização da palavra e do número arábico. Este trabalho volta-se, principalmente, para o processo de ensino e a organização da prática educativa, buscando apontar aspectos significativos para a aprendizagem da estrutura do SNDP. A compreensão da estrutura do SNDP e a sua identificação nos registros de representação são relevantes particularmente para a palavra e o número arábico e para romper com a ideia da lexização direta, um nome a cada número. A sua importância baseia-se no fato de que o número é, entre outras, a expressão da medida de um conjunto, e seu registro torna possível a comunicação das observações do mundo real por meio de representações matemáticas.

Palavras-chave: Registros de representação semiótica; Valor posicional; Padrão de organização da palavra e do número arábico; Compreensão da estrutura do SNDP.

¹ Apoios Capes e CNPq

² brandt@bighost.com.br

³ mthmoretti@gmail.com

ABSTRACT

This study presents an investigation of the relations between the decimal numeral system's structure and the records of number's semiotic representations. Our goal is to identify the way the positional decimal numeral system manifests itself in each record. To achieve our purpose, we identified the characteristics of cognitive operations of production, treatment and conversion, which can be performed by the records in a way that it's become possible to articulate them with the organization of words and Arabic numbers. This work is mainly based on the teaching process and its organization, in order to point out significant processes that facilitate the acquisition of the positional decimal numeral system. Comprehending the structure of the positional decimal numeral system and identifying it in the records of representations are particularly relevant for words and Arabic numbers, because it dismantles the idea of direct lexicon – a word for every number. Its importance is related to the fact that the number is, among other things, the expression of measuring a set; the same way, the process of recording it enable us to communicate our observations of the real world through mathematical representations.

Keywords: registers of semiotic representation; decimal numbering system; positional value; organization patterns of the word and the Arabic numeral; understanding of the structure of the PDNS.

INTRODUÇÃO

Um sistema de numeração não é universal e nem único. O que o caracteriza é ser resultado da produção humana. Sendo inventado, é necessário entender a sua estrutura, a qual pode apresentar base e/ou valor posicional, expressos ou explicitados diferentemente e com maior ou menor transparência nos diferentes registros de representação do número – dentre os quais, se destaca o numeral arábico e os nomes atribuídos aos números. O sistema de numeração que se tornou hegemônico foi criado pelos hindus e divulgado pelos árabes, sendo, por isso, denominado indo-arábico. Esse sistema possui uma estrutura composta pela base dez e pelo valor posicional, cuja aprendizagem não se resume nem se reduz a uma simples transmissão, apesar da natureza arbitrária de seus elementos constituintes – isto é, a base e o valor posicional –, visto que esses elementos são articulados por meio de operações matemáticas, gerando um novo objeto matemático a ser ensinado/aprendido.

Diversas pesquisas – Kamii (1990, 1992, 1995, 1996); Teixeira (1996); Lerner e Sadovski (1996); Fayol (1996); Brizuela (1998); Fuson e Kwon (1991); Brandt (2002) – apresentam resultados que indicam dificuldades para a aprendizagem da estrutura do Sistema de Numeração Decimal Posicional (SNDP), observadas em procedimentos de escrita ou interpretação de numerais arábicos, ou também na realização de operações matemáticas de adição, subtração, multiplicação e divisão com a utilização de algoritmos – caracterizadas por mera reprodução de passos ou de instruções apresentadas pelo professor.

Alguns desses resultados mostram que as crianças realizam essas operações com a utilização dos algoritmos, mas não sabem justificar por que “vai um”; por que se “afasta uma casa” na multiplicação por dois algarismos; por que ao “emprestar um” para um algarismo da direita este se torna maior em dez unidades; por que o algarismo posicionado à esquerda é dez vezes maior que o algarismo localizado imediatamente à direita no numeral arábico; entre outras questões. Na escrita de numerais arábicos, são cometidos erros de natureza sintática – como, por exemplo, escrever 2000300401 para representar o número 2341 –, ou de natureza léxica – como, por exemplo,

escrever 13 para representar o número 31 (erro de pilha, isto é, 13 pertence ao intervalo de 11 a 19 e 31 ao intervalo de 30 a 39), entre outros.

Pelas razões acima expostas, escolhemos, na presente investigação, a estrutura do SNDP como objeto de investigação, em relação ao qual se levanta a seguinte problemática: como possibilitar a compreensão dos conteúdos de registros de representação do número (palavra e numeral arábico) e a identificação da estrutura do SNDP presente em tais registros?

Buscamos, também, responder às seguintes indagações: quais são as questões inerentes às operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, de registros de representação semiótica do número, específicas para possibilitar a identificação da estrutura do SNDP na palavra e no numeral arábico? Como levar em conta essas questões no processo de ensino que objetiva a aprendizagem do SNDP?

Pretende-se, com a presente investigação: 1) apresentar as questões relevantes referentes ao par conceitualização/representação, de modo a subsidiar ações voltadas à superação das dificuldades dos alunos e à ressignificação dos registros de representação de quantidades; 2) identificar, por meio de análise e estudo, os padrões de organização do numeral arábico e da palavra que expressa o número, com o objetivo de apontar de que forma a estrutura do SNDP está neles explicitada, tornando mais ou menos facilitada a sua aprendizagem, a sua compreensão e a sua consequente atribuição de significado por sujeitos aprendentes; e 3) apontar a forma como se deve levar em conta esses padrões e essas explicitações nas operações cognitivas de produção, tratamento e conversão de registros de representação semiótica do número (em especial a palavra e o numeral arábico) presentes em dado momento da aprendizagem, durante o processo de ensino.

Os subsídios teóricos que sustentam e fundamentam nossas análises foram angariados em teorias de representação semiótica, em especial nas ideias de Raymond Duval, autor que destaca a importância do par *noesis/semiose* para a conceitualização dos objetos matemáticos e das operações cognitivas de formação, tratamento e conversão realizadas com registros de representação semiótica.

Organizamos a apresentação dos resultados dos estudos realizados na presente investigação em quatro partes: a primeira contém pesquisas que apresentam

os padrões de organização da palavra e do numeral arábico; a segunda expõe o papel de uma teoria de representações para a conceitualização da estrutura do SNDP; a terceira explicita os procedimentos metodológicos a serem adotados para contemplar as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão com registros de representação semiótica do número - a palavra e o numeral arábico - no processo de ensino, voltados à aprendizagem da estrutura do SNDP; a quarta apresenta as considerações finais e contempla os resultados encontrados, servindo, dessa forma, para apresentar respostas às questões levantadas, de modo a enfrentar a referida problemática.

RESULTADOS DE ESTUDOS SOBRE PADRÕES DE ORGANIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DO NÚMERO: A PALAVRA E O NUMERAL ARÁBICO

Concorda-se com Fayol (1996), que afirma ser necessária a criação de um sistema de denominação numérica para estabelecer o valor cardinal de uma coleção de natureza discreta, por enumeração, desde que o mesmo exprima a numerosidade subjacente da coleção. Este problema poderia ser resolvido de uma forma fácil, bastando, segundo o autor, uma lexicalização direta, isto é, um nome para cada número, que se tornaria limitado por razões de economia de tratamento. Essa limitação só pode ser superada a partir da criação de um sistema de numeração para a constituição de registros de números que expressam a medida de conjuntos. Torna-se necessário, então, a partir disto, conhecer e entender os padrões de organização de sistemas de numeração criados para representar quantidades, expressos em registros de representação, quer sejam palavras ou numerais arábicos.

Um estudo de Fuson e Kwon (1991) contribui com essa questão ao apresentar uma comparação entre as palavras-números criadas pelos europeus, as quais utilizam o SNDP e são irregulares até cem, e as criadas pelos asiáticos, também utilizando o SNDP, mas que são, ao contrário, totalmente regulares. Os autores indicaram, em ambos os casos, a maneira como as palavras são ligadas aos números.

Após uma análise dos resultados apresentados pelos autores, pode-se afirmar que, até a quantidade dez, não há diferença entre os europeus (franceses) e os asiáticos, no sentido de ser necessário memorizar os nomes das palavras criadas para representar os números que expressam as quantificações, a serem recitados numa sequência pré-estabelecida (isto é válido também para os ingleses até a quantidade doze). Porém, a partir destas quantificações, percebe-se uma regularidade nas palavras utilizadas pelos asiáticos para as quantificações de um outro intervalo numérico: do onze ao dezenove. Para estes números, os asiáticos utilizam as mesmas palavras já criadas: elas são repetidas de forma combinada para nomear os números até o dezenove.

Para a organização das palavras que expressam os números de 11 a 19, basta a utilização da palavra dez (à esquerda) seguida de uma das palavras representativas dos valores de 1 a 9 (à direita). O número representado é obtido através da soma dos valores numéricos expressos por essas palavras.

1	2	3	4	5	...	10	12	14	...
一	二	三	四	五	...	十	十 二	十 四	...
yi	er	son	si	wu	...	shi	shi er	shi si	...

Figura 1: Organização das palavras no sistema asiático.

A mesma lógica é utilizada para a organização do numeral arábico que expressa o número: um dos algarismos criados para representar os números de 1 a 9 é colocado, na vertical, abaixo do algarismo criado para representar o dez, de modo a se obter os números de 11 a 19.

No entanto, este não é o caso para as palavras criadas por franceses e ingleses. Para os franceses, existem palavras específicas para nomear os números de onze a quinze, compostas de prefixos e sufixos ligados entre si por uma adição dos valores numéricos por eles representados. Esses prefixos e sufixos, por sua vez, são deformações das palavras criadas para os números de um a nove. Assim “douze” é uma palavra composta pelo prefixo “*dou*” (que constitui uma deformação da palavra criada para representar o dois, “*deux*”) e pelo sufixo “*ze*” (que constitui uma deformação da palavra criada para representar o dez, “*dix*”).

Pode-se exemplificar essa lógica com algumas palavras da língua portuguesa, que, nesse intervalo, seguem a mesma regra: para os prefixos, há a utilização das sílabas “on”, “do”, “ter”, “quator”, “quin”; e para o sufixo, a utilização da sílaba “ze” – deformações, respectivamente, das palavras criadas para um, dois, três, quatro, cinco e dez. Nessa organização, o prefixo e o sufixo são ligados por uma adição dos valores numéricos por eles representados. Do dezesseis até o dezenove, a ordem inverte-se: o prefixo representa dez e os sufixos representam os números de seis a nove, sem deformações. Os prefixos e sufixos também são ligados por uma adição dos valores numéricos por eles representados.

onze = um mais dez $\rightarrow 11 = 10 + 1$ até *quinze*

dezesseis = dez mais seis $\rightarrow 16 = 10 + 6$... até *dezenove*

A mesma estrutura está presente no sistema inglês, mas a partir do treze até o dezenove. Esse padrão de organização pode ser igualmente comparado com o numeral arábico, e permite explicitar a irregularidade oriunda tanto da deformação dos prefixos como da ordem em que se apresentam na palavra, que é diferente da ordem em que se apresentam os mesmos valores no numeral arábico. Essas irregularidades acabam por ocultar a numerosidade subjacente, impedindo o reconhecimento da estrutura do SNDP na palavra e no numeral arábico. Por isso, é preciso levar em conta, nas operações cognitivas de produção, o tratamento e a conversão com registros de representação semiótica do número essas irregularidades e obscuridades.

Para as demais palavras, diferentemente dos asiáticos, utiliza-se também o princípio multiplicativo, mas não de forma tão explicitada. Como exemplo, o Quadro 1 apresenta alguns valores comparativos entre 10 e 90.

Tabela 1 - Comparação entre registros de representação do número com a utilização do numeral arábico e da palavra.

Chinês - japonês			Francês
+	shi 1 palavra 1 símbolo	10	dix 1 sílaba 2 algarismos
四 +	si shi 2 palavras 2 símbolos	40	quarante sufixo e prefixo 3 sílabas 2 algarismos

Para os asiáticos, as mesmas dez palavras voltam a ser utilizadas para a designação das palavras que representam dezenas exatas, com utilização, agora, da operação de multiplicação: “er shi” significará dois dez e estará representando 20 unidades. O numeral arábico acompanha esta formação incorporando uma nova regra para a sua própria formação: se o algarismo de menor valor estiver acima do dez, ele o multiplicará; se estiver abaixo dele, será somado. A palavra segue a mesma regra de formação, colocando-se os algarismos à direita e à esquerda do dez. Exemplificando: “er shi” é vinte e “shi er” é doze. Na numeração arábica tem-se:

$$\begin{array}{c} \text{二} \\ + \\ \text{十} \end{array} \text{ dois dez ou duas vezes dez, vinte} \qquad \begin{array}{c} \text{十} \\ + \\ \text{二} \end{array} \text{ dez mais dois, doze}$$

Na nossa língua, essas regras de formação não estão explicitadas nas palavras que designam os números de 11 a 19 e as dezenas – não da mesma forma como estão na organização das palavras-números de origem asiática. A palavra doze, por exemplo, dissílaba, não deixa explicitada que as duas sílabas correspondem às dezenas e às unidades do número 12: “do” para 2 e “ze” para 10. Já não é o caso das palavras designadas para representar os números compreendidos no intervalo de 16 a 19.

No entanto, em se tratando das dezenas exatas, os padrões de organização das palavras voltam a encobrir a numerosidade, haja vista a deformação dos prefixos e sufixos. Por exemplo: vinte e trinta são palavras que utilizam os prefixos “vin” e “trin”, que são deformações das palavras “dois” e “três”, respectivamente; enquanto os sufixos “te” e “ta” são novas deformações do dez. Para as demais palavras, representativas das dezenas exatas, existe uma regularidade maior, mas que não explicita as operações envolvidas, de modo que continuam a esconder a numerosidade, especialmente em virtude das deformações sofridas pelos prefixos: “quar” (deformação do quatro), “cinqu” (deformação do cinco), “sess” (deformação do seis), “set” (deformação do sete), “oit” (deformação do oito) e “nov” (deformação do nove). Também ocorre a deformação do dez para compor o sufixo “enta”, que é ligado ao prefixo por uma operação de multiplicação não explicitada. Segundo Fayol (1996), a adição de sílabas breves e as mudanças nas sílabas obscurecem o sentido

quantitativo e dificultam a identificação da estrutura do SNDP nas palavras-números e na ligação com os números arábicos.

Em relação à escrita arábica, pode-se recorrer a registros históricos para compreender sua origem. Os hindus, a princípio, expressavam os números por extenso, utilizando nove nomes criados para expressar os nove primeiros números inteiros, seguidos de uma palavra utilizada para expressar uma dezena ou uma de suas potências (“dasa” para 10, “sata” para 100, “sahasra” para 1000, “ayuta” para 10000, entre outros)⁴. Esse procedimento esteve na base da estrutura do sistema de numeração de quantidades por algarismos. Com o decorrer do tempo, essas palavras foram suprimidas e a posição do algarismo no numeral passou a indicar por qual potência de dez ele seria multiplicado. Como exemplo, cita-se: 3425. Ele seria expresso, no começo, por “cinco dois dasa quatro sata e três sahara”; posteriormente, por “cinco. dois. quatro. três”. Foi desta forma que, “ao operar tal simplificação, os sábios hindus tinham elaborado uma verdadeira numeração oral de posição, recebendo desse modo os nomes, em sânscrito, das nove unidades simples um valor variável dependente de sua posição na enunciação do número” (IFRAH, 1989, p. 269).

Nesta investigação, levar-se-á em conta os resultados dos estudos apresentados, que se referem aos padrões de organização da escrita arábica e da palavra que expressa o número, em se tratando das operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, as quais, segundo Duval (1995), estão relacionadas ao par conceituação/representação.

Por esta razão, apresentaremos, a seguir, as ideias defendidas por Raymond Duval a respeito da conceitualização de objetos matemáticos.

O PAPEL DAS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA CONCEITUALIZAÇÃO DO SNDP

De acordo com Duval (1995), a distinção entre um objeto matemático e a sua representação é de extrema relevância no funcionamento cognitivo. Por isso, faz-se

⁴ Informações extraídas de Ifrah (1989, p. 268).

necessário, no ambiente de ensino e aprendizagem, levar em conta esta diferenciação, de modo a investigar se a compreensão explicitada pelos sujeitos aprendentes se refere aos objetos matemáticos ou às suas representações.

Para o autor, a questão mais difícil a ser enfrentada é verificar se os sujeitos, em fase de aprendizagem, confundem os objetos matemáticos com suas representações, visto que eles só podem lidar com as representações semióticas para realizar uma atividade sobre os objetos matemáticos. É o caso, por exemplo, das confusões entre a recitação da sequência numérica e a escrita de numerais, entendidas como conhecimento do número, e a estrutura do sistema de numeração, presente nos registros de representação do número.

Essa distinção exige considerar, no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos, duas operações cognitivas, ligadas ora à representação desses objetos ora à sua conceitualização. Uma delas, segundo Duval (1993), é a *semiose*, que diz respeito à produção e à apreensão de uma representação dos objetos matemáticos; a outra é a *noesis*, que se refere à apreensão conceitual desses objetos.

A produção de uma representação, por sua vez, dependerá, segundo o autor, de um sistema semiótico que não pode ser de qualquer natureza, pois deve permitir a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação é realizada na língua materna, por meio de desenhos, figuras ou fórmulas com signos próprios de uma ciência. Há que se considerar, no entanto, que esta não acontece independente do conteúdo a representar, e nem deve deixar de respeitar as regras.

O tratamento é uma operação cognitiva que compreende uma transformação da representação no interior do mesmo sistema semiótico, mobilizando apenas um só registro de representação. Exemplo: $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$. Neste caso, foi efetuado um tratamento no numeral representativo de um número, expressando-o por meio de uma fração, de uma forma decimal ou de uma forma percentual. O sistema semiótico é o mesmo, independentemente de estarem sendo colocadas em jogo certas especificidades de cada uma das formas do número.

A conversão é também uma operação cognitiva, porém de outra natureza. Ela compreende a transformação de uma dada representação em outra, só que agora

pertencente a um outro sistema semiótico, de modo a conservar a totalidade ou parte da representação inicial. É preciso que seja efetuada pelo sujeito aprendente, sem caracterizar uma tradução ou decodificação. Essa operação não é uma operação trivial e nem cognitivamente neutra, segundo alerta Duval (1995). Exemplo: “um número positivo” (língua materna) e “ $x > 0$ ” (linguagem algébrica).

De acordo com o autor, se o processo de ensino privilegiar somente o tratamento, estar-se-á atribuindo demasiada importância à forma – como se ela, por ser responsável pela descrição de uma informação, permitisse a conceitualização. É na conversão das representações de um sistema semiótico a outro, diz o autor, que haverá uma operação cognitiva capaz de ser descrita como uma *mudança de forma*, a qual possibilitará a conceitualização dos objetos matemáticos pelos sujeitos aprendentes.

Isto não significa, nos alerta Duval (1995) relativizar a importância da forma, já que ela é responsável por possibilitar a diversidade (diferentes registros de representação para um mesmo objeto matemático, pertencentes a diferentes sistemas semióticos de representação), o que, por sua vez, apresenta vantagens: a economia (que é dependente do tipo de registro utilizado numa operação cognitiva de tratamento), que permite a superação dos limites de uma representação e a rapidez na representação das relações entre objetos; a complementaridade de registros, compreendendo os elementos informativos ou comunicacionais que a representação torna possível; e a conceitualização, que implica a coordenação dos registros de representação.

No tocante à conceitualização, Duval (1993) nos apresenta uma estrutura por meio da qual o funcionamento da representação semiótica é compreendido. Essa estrutura está ilustrada na Figura 2.

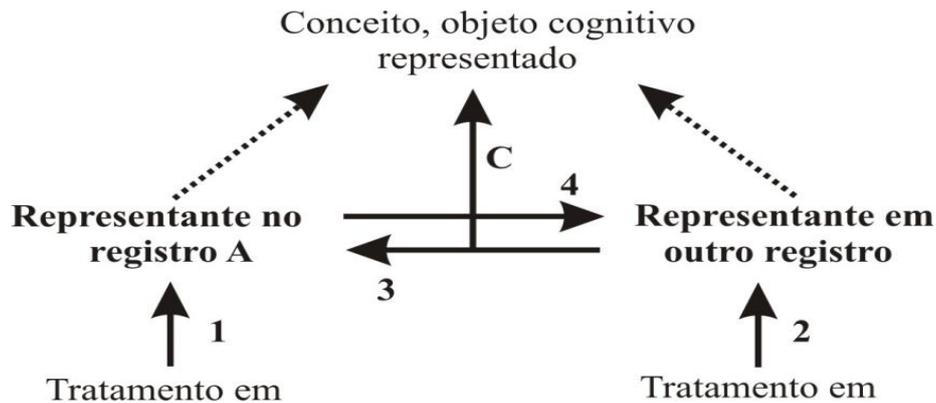


Figura 2: Estrutura de representação em função da conceitualização.
Fonte: DUVAL (1993, p. 51).

Essa estrutura, segundo o autor, baseia-se na crença de que a compreensão conceitual exige a coordenação de, ao menos, dois registros de representação, oportunizada pela operação cognitiva de conversão. Nessa estrutura, as flechas significam as transformações internas oriundas da operação de tratamento, e as externas as oriundas da operação de conversão, fazendo-nos lembrar que elas não são naturais ou espontâneas: terão de ser provocadas, levando à distinção entre o representante e o representado e impedindo o “enclausuramento” de um único registro de representação.

Segundo Duval (1995), a conversão, que é necessária para a conceitualização, enfrenta, por sua vez, o fenômeno de congruência ou de não-congruência entre as representações semióticas de sistemas diferentes de um mesmo objeto. É esse fenômeno que pode explicar os sucessos ou os insucessos dos alunos frente às questões que implicam uma mudança de sistema semiótico de representação, dependendo da congruência ou da não congruência.

Segundo Duval (1995) existem três condições a serem satisfeitas para que dois sistemas semióticos de representação sejam congruentes: correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; mesma ordem possível de apreensão destas unidades nas duas representações; e conversão de uma unidade significativa da representação de partida a uma só unidade significativa na representação de chegada.

Duval (1995) analisa alguns problemas de estrutura aditiva de Vergnaud, de modo a explicitar esse fenômeno. No problema “ganha três, ganha três, então ganha seis”, o fenômeno da não congruência não se manifesta, pois as três condições acima apontadas estariam sendo satisfeitas:

Ganha 3 (+3), ganha 3 (+3), ganha 6 (+6).

Já no caso do problema “ganhou algumas, ganhou 3, no total ficou com 8”, existe a necessidade de mudança de ordem das unidades significantes para expressar os procedimentos de solução em linguagem algébrica, quer seja um procedimento de diferença ou de complemento.

Se esse problema for resolvido por um procedimento da diferença, a ordem tem que ser invertida, e não há nenhuma informação semântica no enunciado em língua natural que indique a subtração exigida para o mesmo:

(ganhou) 8 ? (ganhou) 3 = ...

Se o problema for resolvido pelo procedimento do complemento a ordem tem que ser invertida, pois a comutatividade é uma exigência:

(ganhou) 3 + (ganhou) ... = (ganhou) 8.

Cabe ressaltar, de acordo com Duval (1995), uma questão importante em relação ao fenômeno da não congruência ou da não congruência: dois sistemas semióticos podem ser congruentes num sentido e não o ser no sentido inverso.

No caso de problemas, há que se considerar o fato de que a sentença matemática em linguagem algébrica será um registro da solução ou dos procedimentos e estratégias utilizados para encontrar a solução. Neste caso, poderá ou não haver congruência: isto dependerá das heurísticas de resolução. A busca da solução, por sua vez, colocará em jogo outras propriedades ou relações, como por exemplo: “tenho algumas, ganho 3 e fico com 8”. Neste caso, é necessário a reversibilidade, para se aceitar o caminho de volta, ou a comutatividade, no caso da utilização de um procedimento de complemento, pois deve-se aceitar que $x + 3$ é igual a $3 + x$.

Há que se considerar ainda, segundo o autor, as estruturas diádicas e triádicas presentes nas relações que se estabelecem entre os objetos e seus registros de

representação. Essas estruturas são consideradas tendo em vista a dimensão linguística, que analisa as representações em relação às suas funções de expressão, tratamento e objetivação. Em se tratando da função de expressão, vale ressaltar que, entre os diversos significantes de um determinado significado, existe uma significação por parte do sujeito em relação a um conceito que tem por referência um objeto matemático. Neste caso, a relação é triádica.

Segundo Duval (1995) ela pode ser diádica quando se tratar de signos constituídos por uma referência instituída (tais como vetores e operadores) e que não possuem significação. Nas estruturas triádica e diádica da significância de um signo, as relações podem ser de representação ou de referência entre os elementos constitutivos dessa significância (significante, significado, objeto). Na estrutura diádica, elas são de representação dos objetos; enquanto na triádica elas serão de referência ao objeto para os signos aos quais serão atribuídos uma significação determinada, através do sistema da língua, ao se relacionar o significante e o significado. A relação ao objeto, neste caso, é apenas assegurada no plano do discurso. A Figura 3 explicita essas relações e as estruturas diádicas e triádicas da significância.

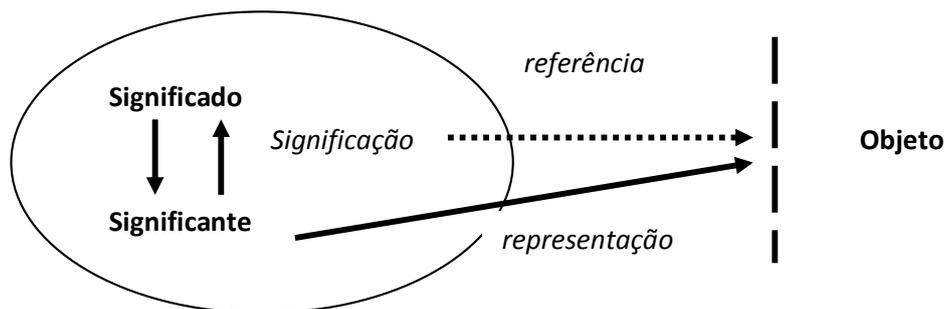


Figura 3: Estrutura diádica e triádica da significância
Fonte: Duval (1995, p. 63)

Podemos exemplificar essa estrutura com a palavra *razão*: essa palavra é um significante que pode estar relacionado a um objeto matemático ou a um objeto de conhecimento pertencente a outra área de conhecimento. Para o matemático, *razão* pode ser uma palavra associada a um quociente entre duas grandezas da mesma natureza, enquanto para um não matemático a palavra *razão* pode estar associada a

“estar correto” ou à “racionalidade”. De acordo com a significação para o sujeito, o significante estará relacionado com um significado, que por sua vez tem por referência um determinado objeto.

Segundo o autor a questão das relações de representação ou de referência é fundamental quando se trata das operações de tratamento e de conversão. Isto porque as transformações inter e intraregistros, compreendidas nessas operações, vão ter que ser efetuadas tendo por referência o mesmo objeto matemático: isto é, tanto o registro de representação A como a sua substituição, após transformação, por um outro registro de representação B. Porém, essa substituição não ocorre sem um determinado custo cognitivo, o qual é causado pelos problemas da congruência semântica. A substituição pode se chocar com dificuldades em virtude da diferença semântica. Por exemplo: posso substituir o numeral arábico 13 pela palavra “treze”, mas esses registros são pertencentes a redes semânticas diferentes, organizados segundo padrões diferentes, de naturezas diferentes (monofuncional e plurifuncional, respectivamente), admitindo, portanto, tratamentos diferentes (algoritmizáveis e não algoritmizáveis). Substituir o numeral arábico pela palavra pode significar um salto entre duas redes semânticas, de tal forma que o indivíduo talvez não o perceba, nem mesmo se lhe for indicado. Como na matemática a mudança de registro semiótico é frequente, a substitutividade desempenha papel essencial em relação ao custo cognitivo. A substitutividade – tanto inter-registro como intraregistro – tem por base a invariabilidade da referência.

A partir do exposto, pode-se inferir que ser referencialmente equivalente não significa ser congruente. Assim, entre duas representações será importante considerar não só a relação de equivalência referencial, mas também a relação de congruência semântica (DUVAL, 2012, p. 110).

Duas apresentações podem ser ditas *mais* ou *menos* congruentes, segundo o número de transformações necessárias. Vejamos no caso do SNDP:

a) Os particulares de 11 a 15

$$\text{Onze} = 1 + 10$$

$$11 = 10 + 1$$

Há que se inverter a ordem de um deles e ainda analisar o sentido do prefixo “on” como uma deformação do “um”, e do sufixo “ze”, como uma deformação do “dez”. Torna-se necessário, por essa razão, atribuir sentido ao “1” da esquerda como sendo “10”, visto que esta quantidade não é explicitada no algarismo 1, de acordo com a posição por ele ocupada no numeral.

b) Valores entre 16 e 19

Dezesseis = 10 + 6

16 = 10 + 6

Nesse caso, deverá haver a decodificação dos algarismos “1” do “16” como sendo 1 dezena, em virtude da posição ocupada na representação arábica. Logo, o algarismo “1” do “16” não explicita a dezena da mesma forma que o prefixo “dez” da palavra dezesseis. Na palavra, o prefixo “dez” faz referência a dez unidades elementares, e não a um grupo de dez.

c) numerais maiores que 20

vinte e um
↓ ↓ ↓
 $21 = 2 \times 10 + 1$

As unidades de significado dos dois registros estão na mesma ordem, porém não explicitam as quantidades de forma clara e igual. Na escrita arábica, há necessidade do reconhecimento do algarismo 2 como representativo de duas dezenas, em virtude de sua posição. Na palavra, é necessário o reconhecimento de que o prefixo “vin” é uma deformação da palavra “dois”, e de que o sufixo “te” é uma deformação da palavra “dez” – além de ambos estarem articulados através de uma multiplicação. Ainda há o fato de que o registro que representa o número envolve três palavras, enquanto a representação arábica envolve dois algarismos – não havendo, portanto, univocidade terminal. Uma das palavras explicita uma das operações que articula as palavras entre si: o conectivo “e” em “vinte e um” representa uma adição. Essa operação não é explicitada na escrita arábica.

Nos dois registros de representação, percebem-se variações de traços semânticos e de forma.

Tabela 2: Variações de traços semânticos e forma.

	Escrita	Numeral arábico
Traços semânticos	Prefixos e sufixos	Posição dos algarismos
Forma	Palavras	Algarismos

Fonte: autores

“O problema da congruência ou não congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é, portanto, o de distância cognitiva entre estas duas representações, sejam elas pertencentes ou não ao mesmo registro” (DUVAL, 2012, p. 105). Quanto maior a distância cognitiva, o custo de passagem de uma apresentação a outra pode aumentar. É possível, também, que essa passagem não seja efetuada ou entendida.

A substituição por equivalência referencial, afirma DUVAL (1995) cumpre uma função de tratamento e de transformação da informação, desde que se introduzam condições semânticas. Neste contexto, os problemas colocados pela congruência semântica se tornam primordiais na aprendizagem sempre que a atividade cognitiva requeira um mínimo de tratamento.

Após analisar os padrões de organização de registros de representação do número – em especial a escrita arábica e a palavra, e também a forma como a estrutura do SNDP fica mais ou menos explicitada, além das relações, operações cognitivas e fenômenos para a conceitualização de objetos matemáticos na ótica de uma teoria de representações –, passaremos a mobilizar e articular esses elementos. O objetivo dessa estratégia é buscar a resposta para a problemática que levantamos sobre nosso objeto de investigação, a qual está voltada para a compreensão da estrutura do SNDP no numeral arábico e na palavra.

Para tanto, esclareceremos os procedimentos metodológicos voltados para as operações cognitivas de formação, tratamento e conversão com a estrutura do SNDP da escrita arábica e da palavra.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Duval (2003) lista alguns procedimentos voltados para o funcionamento cognitivo de modo a permitir que o aluno, em situação de ensino, possa compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que a ele são propostos, visto a complexidade do funcionamento cognitivo subjacente à atividade matemática e sua especificidade. Esses procedimentos sugeridos, e as orientações necessárias, foram levados em conta ao serem organizadas e analisadas as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão para a aprendizagem da estrutura do sistema de numeração e para a identificação dessa estrutura em registros de representação do número: a palavra e o numeral arábico.

Após análises e reflexões, apontar-se-ão questões que farão referências às exigências a serem levadas em consideração na organização da prática educativa. Explicitaremos, também, as relações existentes entre o par representação/conceitualização da estrutura do SNDP. Igualmente, as orientações relativas sobre o que observar nas produções dos alunos, indagando sobre um modelo pertinente para analisar e interpretar as observações e os dados da experiência, que são constituídos dos desempenhos ou procedimentos adotados por crianças para lidar com a estrutura do SNDP, os quais apontam a não identificação dessa estrutura nos diferentes registros de representação.

Face ao exposto, alguns passos sugeridos nesses procedimentos foram adotados para o presente estudo: a) identificação da distinção sobre o que sobressai numa operação cognitiva de tratamento de um registro (palavra ou numeral arábico) e aquilo que sobressai em uma operação cognitiva de conversão de um registro de representação em outro (palavra em numeral arábico e vice-versa); b) análise das formas de utilização da conversão como instrumento de análise: variáveis cognitivas próprias de cada registro de representação (a palavra e a escrita arábica); e c) identificação da congruência ou da não congruência semântica entre as palavras e os numerais arábigos que expressam os números.

Para contemplar as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão, é necessário, primeiramente, discriminar as unidades cognitivas pertinentes ao conteúdo de uma representação. Por esta razão, apresentar-se-ão as duas condições a serem satisfeitas para a identificação de tais unidades, segundo Duval (1999):

- Submeter um registro de representação a todas as variações possíveis, sendo que as representações formadas, após as variações, devem ainda ter sentido;
- Tomar dois registros de representação associados entre si, e submeter um deles às variações que provoquem mudanças no outro.

Neste estudo, deveremos identificar as variáveis cognitivas do numeral arábico e da palavra que expressa o número. As variações serão cognitivamente pertinentes quando uma variação X num registro D provocar uma variação Y no registro associado D1, tendo como referência objetos diferentes. Exemplo: no numeral arábico, há o valor relativo e absoluto dos algarismos. Ambos constituem as variáveis cognitivas desse tipo de registro de representação. Se um dos algarismos do **12** (registro D) for alterado, obter-se-á um novo numeral, **13** (registro D2 que sofreu variação), que representa um outro número e, conseqüentemente a palavra a ele associada – **doze** (registro D1) – também sofrerá alteração: **treze** (registro D3 que sofreu variação). O mesmo acontecerá se mudarmos o algarismo de posição: (registro D) 21 → 12 (registro D2, alterado). As palavras “vinte e um” e “doze” constituem os registros D1 e D3 associados, respectivamente, aos registros D e D2. É este princípio de variação que está na base da atividade de conversão. Uma variação cognitiva sempre consistirá numa mudança de sentido. Duval (1999) afirma que a compreensão do sentido provoca automaticamente a compreensão do objeto.

Deve-se, no entanto, considerar o que nos alerta o autor ao afirmar que um dos maiores problemas da aprendizagem é a discriminação das unidades que são cognitivamente pertinentes. Isto exigirá que façamos as variações estruturais, objetivando verificar qual delas provoca variações cognitivas e qual não provoca – desenvolvendo-se, desta maneira, a capacidade de efetuar esta discriminação.

A seguir, demonstraremos as unidades que são cognitivamente pertinentes nos dois registros de representação do número – a palavra e o numeral arábico –, para que se possam propor variações cognitivas a serem coordenadas pelos sujeitos aprendentes numa operação cognitiva de conversão, contribuindo assim para provocar a compreensão do objeto matemático.

A identificação das unidades cognitivamente pertinentes destes dois tipos de registro de representação tem que ser feita em separado, já que as regras de formação da palavra e do numeral arábico são diferentes. Após essa identificação,

submeter-se-á um dos registros a variações e verificar-se-á se elas produzem registros que têm como referência outros objetos matemáticos. Se isto acontecer, estará sendo identificada uma unidade cognitivamente pertinente, que estará, por sua vez, evidenciando a estrutura do SNDP nos dois registros de representação. Se houver uma variação num dos tipos de registro que não provoque uma referência a outro objeto matemático, então ter-se-á um tratamento no interior do próprio registro – apesar de este, igualmente, envolver as unidades cognitivamente pertinentes, obedecendo a regras específicas e próprias do registro de representação, de acordo com sua natureza. Exemplo: transformar o numeral 12 em $10 + 2$.

As variações provocadas nos dois tipos de registros de representação do número para a identificação das unidades cognitivamente pertinentes compreenderão, num primeiro momento, os seguintes intervalos numéricos: os particulares de 11 a 15 (11, 12, 13, 14, 15); os valores compreendidos no intervalo 16 a 19; as dezenas exatas; os valores que compreendem os pares dezena/unidade (por exemplo, 53), centena/unidade (por exemplo, 102), centena/dezena (por exemplo, 120), centena/particular (112), centenas exatas (por exemplo, 200); e os valores que compreendem o trio centena/dezena/unidade (por exemplo, 153) .

Apresentar-se-á, primeiramente, um quadro com as variações provocadas para, em seguida, elaborarmos as interpretações que indicam o fenômeno da congruência ou da não congruência.

- Variações provocadas no numeral arábico e verificação da variação provocada no seu registro associado pertencente a outro sistema semiótico (a palavra), envolvendo alguns números do tipo: particulares (de 11 a 19), dezenas exatas, itens do tipo D/U.

Tabela 3: Identificação da unidade cognitiva em cada registro de representação

Numeral arábico	Palavra
11 Variação do algarismo da direita de 12 (referência a outro objeto). Variação do algarismo da esquerda de 21 (referência a outro objeto).	Onze Doze (variação do algarismo na casa das unidades) Vinte e um (variação do algarismo na casa das dezenas)
12 21- Inversão da posição dos algarismos (referência a outro objeto). O mesmo irá acontecer para 13, 14, 15 e dos itens do tipo dez/unidade compreendidos no intervalo [16; 99]	Doze (o dois é unidade) Vinte e um (o dois agora é dezena)

Fonte: autores

Interpretação da Tabela 3: a escrita arábica admite variações na posição dos algarismos do numeral (valor relativo) e no valor absoluto dos algarismos. A variação de posição provoca a referência a outro objeto (outro número), que pode ou não pertencer à mesma pilha, (20 pertencente ao intervalo 20 a 29 e 02 pertencente ao intervalo 0 a 9, ou 32 (pertencente ao intervalo 30 a 39 e 23 pertencente ao intervalo 20 a 29); a variação do valor absoluto do algarismo também provoca uma referência a outro objeto que pode ser ou não da mesma pilha (11 e 12 ambos pertencentes ao intervalo de 11 a 19) ou das dezenas (11 e 21 um pertencente ao intervalo de 11 a 19 e outro pertencente ao intervalo de 20 a 29). Isso significa que a **posição** e o **valor absoluto** dos algarismos são as unidades cognitivamente pertinentes que, caso sofram variações, passarão a ter por referência outro objeto

Já a palavra escrita que representa o número sofrerá variações nos sufixos e prefixos. Por exemplo: a variação do prefixo “on” do **onze** para “do”, “tre”, “quator” ou “quin” gerará palavras que terão como referência outro objeto, mesmo que da mesma pilha (intervalo de 11 a 19) . A partir do **dezes** **seis**, a variação é no sufixo, para que não haja mudança de pilha: **dezesete**, **dezoito**, **dezenove**. Serão necessárias deformações e inversões nos prefixos e sufixos das palavras que representam os números para que se configurem variações nas unidades cognitivas pertinentes e nos seus registros associados pertencentes a outro sistema semiótico, como é o caso da escrita arábica. Se a deformação compreender um sufixo do tipo “enta”, ocorrerá uma

variação que levará a outro objeto pertencente a outra pilha: por exemplo, quatorze (intervalo de 11 a 19) quarenta (intervalo de 40 a 49). Se a variação compreender uma deformação do sufixo “entos” ou “centos” haverá uma alteração na potência de 10.

De qualquer forma, na palavra, a alteração dos prefixos e sufixos acarretará novos objetos, que ora pertencem à mesma pilha⁵ e ora não pertencem. No entanto, a alteração dos prefixos e dos sufixos provocará não somente trocas, como na escrita arábica, mas também deformações e inversões. Logo, **sufixos** e **prefixos** são as unidades cognitivamente pertinentes na palavra que expressa o número – que, ao sofrer variações, tem por referência outro objeto matemático. Analisar-se-ão as variações dessas unidades identificadas nos dois registros, concomitantemente.

- Numerais que compreendem C/U (centenas e unidades), C/P (centena com particular), C/D (centena com dezenas exatas) e C/D/U (centenas com dezenas não exatas).

Tabela 4: Relação de numerais nos dois registros (as unidades estão sublinhadas, as dezenas sublinhadas duplamente e as centenas estão em negrito)

101 cento e <u>um</u>	107 cento e <u>sete</u> 071 <u>setenta</u> e <u>um</u>	113 cento e <u>treze</u> 131 cento e <u>trinta</u> e <u>um</u>	<u>501</u> <u>quinhentos</u> e <u>um</u>	162 cento e <u>sessenta</u> e <u>dois</u>
110 cento e <u>dez</u>	017 <u>dezesete</u>	311 <u>trezentos</u> e <u>onze</u>	105 cento e <u>cinco</u>	126 cento e <u>vinte</u> e <u>seis</u>
011 <u>onze</u>	170 cento e <u>setenta</u> 701 <u>setecentos</u> e <u>um</u>		150 cento e <u>cinquenta</u> 051 <u>cinquenta</u> e <u>um</u>	261 <u>duzentos</u> e <u>sessenta</u> e <u>um</u>
	710 <u>setecentos</u> e <u>dez</u>		510 <u>quinhentos</u> e <u>dez</u>	216 <u>duzentos</u> e <u>dezesesseis</u>
			15 <u>quinze</u>	621 <u>seiscentos</u> e <u>vinte</u> e <u>um</u>
				612 <u>seiscentos</u> e <u>doze</u>

Fonte: autores.

Interpretação da Tabela 4: todas as variações de posição dos algarismos do numeral provocam outro número, ora composto por dezenas e unidades e ora composto por centenas e dezenas (exatas ou não exatas). Esta variação pode ser

⁵ Pilha se refere a intervalos numéricos de 10 em 10. Por exemplo: pilha que corresponde ao intervalo do 11 ao 19, pilha que corresponde ao intervalo 20 a 29, e assim sucessivamente.

identificada na palavra que constitui um registro associado ao mesmo número representado pelo numeral, verificando os destaques em negrito (os grupos de cem), os destaques sublinhados duplamente (os grupos de dez) e os destaques sublinhados (as unidades). Pode-se observar que o algarismo que sofreu variação em relação à sua posição ocupada no numeral ora representa unidades simples, ora grupos de dez e ora grupos de cem.

O número de palavras em relação ao número de algarismos do numeral dependerá do tipo de número que se forma após a variação:

- C/U: 3 palavras e 3 algarismos (por exemplo 102; cento e dois).
- C/D (exata): 3 palavras (cento e vinte) e 3 algarismos (120)
- C/D (não exata): 5 palavras (cento e vinte e três) e 3 algarismos (123).
- D/U (acima de 20): 3 palavras (vinte e quatro) e 2 algarismos (24)
- D/U (de 11 a 19): 1 palavra (dezesete) e 2 algarismos (17).

Porém, mesmo que o número de palavras não seja igual ao número de algarismos, é possível identificar os grupos de dez, de cem e as unidades, ora nas palavras por inteiro, ora nas sílabas (sufixos e prefixos) que compõem uma das palavras.

Após essa análise, é possível focar as unidades cognitivamente pertinentes às atividades que vão compreender as operações de conversão e de tratamento. Em cada uma das operações, elas desempenharão desafios cognoscitivos diferentes, mas que estarão voltados para a aprendizagem da estrutura do SNDP, dos conteúdos das representações e para a diferenciação entre representante e representado.

Segundo Duval (1988) “entre duas representações de informação, há duas relações independentes a considerar: a relação de equivalência referencial e a relação de congruência semântica. Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes” (p. 8). De acordo com o autor “a conduta em matemática implica uma substitutividade tanto inter-registro como intraregistro com base numa invariabilidade de referência” (p. 8). Ao mudar de registro, é necessário respeitar certos procedimentos de codificação e enfrentar as dificuldades inerentes às diferenças entre as redes semânticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

A elaboração de atividades ou de tarefas a serem propostas no processo de ensino deve levar em conta a estrutura triádica que explica as relações entre significantes e significados, mediados por significações que têm por referência o sistema de numeração decimal e sua estrutura. Deve-se, também, levar em consideração os padrões de organização e o caráter operatório, tanto das palavras que expressam os números como da representação desses através de algarismos.

O que se deve buscar é a compreensão da estrutura do SNDP veiculada nos registros de representação do número. Por esta razão, a fundamentação deve se dar nas relações entre *semiose* e *noesis*, que envolvem as relações entre significantes e significados, além das atividades de produção, tratamento e conversão – que, por sua vez, compreendem o fenômeno da congruência e da não-congruência.

O que se configurou para o estudo que foi desenvolvido foi a necessidade de uma abordagem voltada para o trânsito entre as duas formas de registros de representação do número (a escrita e o numeral arábico), visto que eles explicitam, de modos diferenciados, a estrutura do SNDP. Tal abordagem tem de levar em conta os resultados de pesquisas que indicam as causas das dificuldades de compreensão dessa estrutura, para que se possa buscar uma forma de interpretar e enfrentar a problemática de modo substancial, além de desvendar relações entre os dados pertinentes desse campo conceitual específico – o SNDP.

Neste sentido, as proposições de Duval (1995), relativas à relação *semiose/noesis* e seu papel na construção de conhecimentos, permitiram um melhor entendimento da complexidade do processo de compreensão do SNDP. Na perspectiva adotada, a elaboração de tarefas para a situação de ensino implicar compreender vários instrumentos nocionais, e também relações e inferências pertinentes ao sistema conceitual, que são igualmente relevantes a uma teoria de representações por compreenderem sistemas semióticos e não semióticos, em relação aos quais estão subjacentes formas diferenciadas de tratamento cognitivo colocadas em ação.

Isto significa levar os alunos a transitar de um registro de representação para outro, vivenciando dois problemas: a aprendizagem do funcionamento representacional de cada um dos registros que pertencem a sistemas semióticos com especificidades e particularidades e a conversão de uma representação produzida num registro em uma representação do objeto em outro registro.

Intencionou-se mostrar que a diversidade de registros de representação, que é inerente ao funcionamento do pensamento, só torna possível o conhecimento da estrutura do SNDP se houver uma diferenciação progressiva de diferentes registros de representação do número. O número expressa a medida de um conjunto – para ser comunicado, exigirá, por questões de custo de memória e tratamento, um registro de representação e, conseqüentemente, uma estrutura para um sistema de numeração.

Podemos responder a uma das questões levantadas a respeito das operações de produção, tratamento e conversão afirmando que, na organização das tarefas de uma situação de ensino, é preciso considerar os dois aspectos compreendidos numa representação: a sua forma (língua materna, linguagem algébrica) e o seu conteúdo (maneira pela qual a representação apresenta o objeto e através da qual o objeto se torna acessível). Esta é uma questão de extrema relevância, visto que os dois registros de representação do número não têm o mesmo conteúdo. Isto significa que, além da aprendizagem do objeto de estudo em questão – isto é, da estrutura do SNDP –, há a necessidade de organização de situações que compreendam a aprendizagem da forma e do conteúdo do registro de representação.

Um dos objetivos a serem atingidos com a presente investigação diz respeito à apresentação de questões relevantes referentes ao par conceituação/representação, para que seja possível subsidiar ações voltadas para a ressignificação dos registros de representação de quantidades. Ao proceder desta forma, deu-se um passo na direção de apresentar respostas para a problemática levantada em relação ao objeto. Isto porque encontramos no aporte teórico ideias defendidas por Duval relacionando a conceitualização com a representação, o que ressalta as operações cognitivas de produção, tratamento e conversão. Além disso, o autor também levanta o fenômeno da não congruência, sua relação com os insucessos dos alunos, bem como suas

dificuldades em compreender a estrutura do SNDP e identificá-la nos diferentes registros de representação do número.

Um outro objetivo estabelecido no início da investigação voltou-se para a identificação dos padrões de organização do numeral arábico e da palavra que expressa o número. Resultados de pesquisas – Fuson e Kwon (1991) – e estudos – Fayol (1996) e Ifrah (1989) – possibilitaram a compreensão destes padrões e de suas variações necessárias para contemplar as operações cognitivas de tratamento e conversão – e, conseqüentemente, a compreensão dos conteúdos dos registros de representação do número e a identificação da estrutura do SNDP nestes registros. Os resultados obtidos com as análises efetuadas permitiram enfrentar a problemática levantada e apresentar respostas para buscar a atribuição de significados.

Um mesmo objeto pode ser representado por vários registros de representação que não possuem uma mesma forma e um mesmo conteúdo. Segundo Duval (1998, p.32) “a forma depende do registro de representação, o conteúdo depende das possibilidades de explicitação das propriedades do objeto que permite o registro de representação e o tratamento depende igualmente do registro de representação”.

As relações entre a representação e o objeto representado são compreendidas em seu modo de produção, visto que uma representação está ligada à sua utilização e que as diferentes representações desempenham papéis diferentes no desenvolvimento dos processos cognitivos. O objeto representado (no nosso caso, a estrutura do SNDP que é utilizada para representar números por meio de diferentes registros de representação) é a causa da representação, em razão de um mecanismo ou de um sistema que permitiu produzir os diferentes registros de representação.

É por esta razão que as dificuldades dos alunos, em relação à aprendizagem do SNDP, têm que ser estudadas através da produção dos registros de representação no sistema que permitem esta produção, e também em virtude de suas especificidades e de sua natureza, que tornam mais ou menos explicitado o objeto representado (no nosso caso, a base 10 e o valor posicional compreendidos na estrutura do SNDP). Esses dois aspectos compreendidos na estrutura são interligados por operações matemáticas de adição e multiplicação, e deverão estar presentes nos registros de representação, em virtude do sistema utilizado.

[...] é o sistema mobilizado para produzir uma representação que determina, de um lado, a natureza da relação entre esta representação e o objeto representado e, de outro lado, a forma da representação produzida e seu conteúdo isto é, a maneira pela qual a representação torna acessível o objeto representado, explicitado ou colocado em primeiro plano certas propriedades em detrimento de outras. (DUVAL, 1999, p. 41)

As tarefas de uma situação de ensino devem ser elaboradas levando em consideração o aspecto funcional ligado à produção de representações semióticas, que é relativo ao tipo de atividade que os signos permitem abranger. Essas atividades estão ligadas, por sua vez, às funções cognitivas fundamentais de comunicação, tratamento e objetivação, que transformam a representação semiótica em registro de representação.

Deve estar presente também a questão das duas apreensões diferentes que as representações semióticas possibilitam: uma apreensão do objeto e outra da representação. Isto significa que a representação pode direcionar a atenção sobre o objeto ou sobre ela mesma.

Segundo Duval (1996), considerando que os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de representações, e os tratamentos dependem das possibilidades dadas pelas representações, elas não podem ser consideradas secundárias em relação aos objetos matemáticos propriamente ditos.

Em relação à significância dessas representações, um outro aspecto de natureza estrutural se impõe – pois, enquanto signos, elas adquirem valores diferentes de acordo com o sistema semiótico utilizado para produzi-las, o qual determina um campo de significância, de representação ou de referência ao objeto representado.

Essa questão deve ser infundida de forma significativa na elaboração das tarefas da situação de ensino, pois as propostas devem contemplar o conteúdo da representação, o qual não deve ser confundido com o objeto representado. Isso significa, sucessivamente ou simultaneamente, que se deve lidar com a compreensão do conteúdo do registro de representação de acordo com a sua forma (escrita arábica ou palavra), de modo a explicitar o seu conteúdo (valor relativo dos algarismos na escrita arábica e análise da articulação entre sufixos e prefixos das palavras) valendo-se do objeto matemático de aprendizagem: o SNDP.

Todo o estudo procurou, enfim mostrar que as possibilidades de organização de tarefas para compor uma situação de ensino que permita aos alunos compreender o SNDP encontram sentido nos seguintes argumentos:

o problema da aprendizagem, ao nível do funcionamento cognitivo do sujeito, deve ser formulado, não em termos do funcionamento cognitivo do sujeito, mas deve ser formulado em termos de condições de compreensão [...] que não estão ligadas a um conteúdo particular, mas à natureza das atividades e dos raciocínios que se encontram exigidos por meio de diferentes conteúdos ensinados. (DUVAL, 1996, p. 377).

O estudo realizado traz derivações pedagógicas: ao proceder com uma análise funcional das atividades, das tarefas e das produções cognitivas com registros de representação, o resultado deve apontar a que a atenção do professor deve se voltar com relação a cada momento de compreensão do aprendiz, e quais deverão e poderão ser, então, os objetos de intervenção específica – e como esta deve caracterizar-se.

Toda a trajetória percorrida indica o que se deve enfrentar em relação a um processo mais amplo de construção de formas cognitivas – os quais envolvem, atualmente, aprendizagens pontuais, de caráter mecanizado, tal como acontece com o sistema de numeração decimal: numerais arábicos repetidos numa ordem correta, escritos e utilizados em algoritmos; assim como as palavras para designação de números – porém, sem significação em relação à compreensão do SNDP.

Ultrapassar esse caráter mecanizado exigirá muito esforço e aquisições difíceis, raramente superadas pelo imediatismo das intervenções didáticas. No entanto, se isso não acontecer, poderemos comprometer e limitar o processo cognitivo mais amplo dos aprendizes na escola, o que poderá se refletir em seus cotidianos, em outras situações de vida que não a realidade de sala de aula.

REFERÊNCIAS

- DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Starsbourg, n. 5, 1993.
- _____. *Sémiósis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Suisse: Peter Lang, 1995.

- _____. Quel cognitive retenir em didactique des mathématiques? Recherches em didactique des mathématiques. *La pensée Sauvage*, v. 16.3, n. 48, 1996.
- _____. *Cours PUC*. São Paulo: Février, 1999. Documento datilografado.
- _____. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. (Organizadora Sílvia Dias Alcântara Machado). Campinas: Papirus, 2003.
- _____. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. Tradução de Méricles T. Moretti. *REVEMAT*, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012.
- FAYOL, M. *A criança e o número: da contagem à resolução de problemas*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.
- FUSON, K. C.; KWON, Y. Systèmes de mots-nombres et autres outils culturels: effets sur les premiers calculs de l'enfant. In: BIDEAU, Jacqueline; MELJAC, C.; FISCHER, J. P. *Les chemins du nombre*. França: Presses Universitaires de Lille, 1991.
- IFRAH, G. *Os números: a história de uma grande invenção*. Rio de Janeiro: Globo, 1989.
- KAMII, C. *A criança e o número: implicações educacionais da teoria de Piaget junto a escolares de 4 a 6 anos*. Campinas, SP: Papirus, 1990.
- KAMII, C.; JOSEPH, L. L. *Aritmética: novas perspectivas implicações da teoria de Piaget*. São Paulo: Papirus, 1992.
- KAMII, C.; LIVINGSTON, S. J. *Desvendando a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. São Paulo: Papirus, 1995.
- KAMII, C.; DECLARK, G. *Reinventando a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. 11. ed. Campinas, SP: Papirus, 1996.
- KAMII, C.; HOUSMAN, L. B. *Crianças pequenas reinventam a aritmética: implicações da teoria de Piaget*. 2. ed Porto Alegre: Artmed. 2002.
- LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração: um problema didático. In: SAIZ, TEIXEIRA, L. *Aprendizagem inicial do valor posicional dos números: conceituação e simbolização*. In: *Psicologia na Educação: articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica*. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Psicologia, 1996.

Submetido: novembro de 2014

Aceito: dezembro de 2014