DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n1p26-34

Derivadas Parciais: um Estudo com Base na Teoria APOS

Partial Derivatives: a Study Based on the APOS Theory

Janice Rachelli*[a]; Vanilde Bisognin[b]

[a]Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Matemática. RS, Brasil.
[b]Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Ensino de Ciências e Matemática. RS, Brasil.
*E-mail: janicerachelli@gmail.com

Resumo

Neste artigo, apresentamos os resultados de um estudo que tem como objetivo investigar as construções mentais desenvolvidas pelos estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática para a compreensão do conceito de derivadas parciais, tendo a teoria APOS como referencial teórico e metodológico. Para tanto, elaboramos a decomposição genética em que foram descritas as possíveis estruturas e mecanismos mentais necessários à construção do conceito e desenvolvemos situações de ensino em sala de aula em uma disciplina que trata dos fundamentos do Cálculo, tendo o ciclo ACE como metodologia de ensino. Os resultados obtidos, por meio dos registros dos alunos e das anotações no diário de campo, indicam que os estudantes apresentam algumas dificuldades em trabalhar com problemas que requerem maior conhecimento conceitual, porém desenvolvem as construções mentais previstas na decomposição genética em atividades que possibilitam passo a passo o desenvolvimento de ações e a interiorização de processos para a encapsulação do objeto derivadas parciais, além da generalização ao tratar o esquema das derivadas parciais no contexto das equações diferenciais.

Palavras-chave: Teoria APOS. Decomposição Genética. Derivadas Parciais. Compreensão de Conceitos.

Abstract

In this article, we present the results of a study that aims to investigate the mental constructs developed by students of a master course in teaching Mathematics for understanding the concept of partial derivatives, based on the APOS theory as a theoretical and methodological reference. For that, the genetic decomposition was elaborated in which the possible mental structures and mechanisms necessary to the concept construction were described and classroom teaching situations were developed in a discipline that deals with the fundamentals of Calculus, with the ACE cycle as a teaching methodology. The results obtained through student records and field diary annotations indicate that students present some difficulties in working with problems that require greater conceptual knowledge, but they develop the mental constructions foreseen in the genetic decomposition in activities that make possible the sequence of steps, the development of actions, and the internalization of processes for the encapsulation of the partial derivative object, as well as generalization in dealing with the scheme of partial derivatives in the context of differential equations.

Keywords: *APOS Theory. Genetic Decomposition. Partial Derivatives. Understanding Concepts.*

1 Introdução

As derivadas parcias fazem parte do programa de disciplinas de cálculo de várias variáveis e são necessárias a diferentes carreiras do ensino universitário, como engenharias, física e matemática, tanto em cursos de graduação como em cursos de pós-graduação. Nisso reside o interesse e a importância em investigar os processos de ensino e aprendizagem desses conceitos no ensino do cálculo de funções de várias variáveis.

Nos últimos anos, diferentes estudos sobre o ensino e aprendizagem da derivada de função de uma variável real foram realizados, como por exemplo, as pesquisas de Bisognin e Bisognin (2011), García, Gavilán & Llinares (2012), Vega, Carrillo & Soto (2014), Pino-Fan, Godino & Font (2015), Panero, Arzarello & Sabena (2016), Rachelli (2017), dentre outros. Essas pesquisas ressaltam dificuldades que são apresentadas pelos estudantes quando do estudo da derivada referentes à formação básica, em relacionar as representações analítica e gráfica, além da compreensão do conceito e suas interpretações, e destacam o uso de diversos enfoques teóricos e metodologias como forma de sanar as dificuldades e auxiliar os alunos na compreensão dos conceitos.

No entanto, estudos sobre o ensino e a aprendizagem das derivadas parciais de funções de várias variáveis são escassos. A compreensão de conceitos do cálculo de funções de várias variáveis foi discutida nos estudos de Alves & Borges Neto (2011) e de Martinez-Planell, Trigueros & McGee (2015).

O estudo realizado por Alves & Borges Neto (2011) buscou analisar e indicar os elementos pertinentes para uma transição interna do cálculo de uma variável para o cálculo de várias variáveis. Os autores analisaram três livros texto de Cálculo utilizando como categorias de análise o uso de simbologias, regras operatórias, teoremas e contra-exemplos, definição formal e uso de metáforas. Dos resultados obtidos na análise, os autores destacam que o uso detalhado de simbologias pode atuar como um elemento de transição, na medida em que auxilia a compreensão da natureza das definições e dos objetos e que a combinação da intuição, da visualização e da formalização podem promover uma transição mais natural do cálculo de funções de uma variável para o cálculo de várias variáveis, e sugerem que o estímulo à habilidade cognitiva fundamentada na visualização e na compreensão geométrica dos conceitos deveria ser constante em livros texto de Cálculo.

Os resultados da pesquisa de Martinez-Planell, Trigueros & McGee (2015) evidenciam que os conceitos do cálculo diferencial de funções de duas variáveis são abstratos e difícies para a maioria dos alunos e que as dificuldades apresentadas com relação à representação gráfica, simbólica e tabular, precisam ser levadas em consideração para atingir o objetivo de uma maior e melhor compreensão do cálculo de várias variáveis pelos alunos. Nessa pesquisa, a teoria APOS foi utilizada como referencial teórico para estudar a compreensão quanto aos conceitos de plano tangente, diferenciais e derivada direcional. No estudo, foram desenvolvidas cinco atividades com os estudantes tendo por base a decomposição genética dos conceitos. Por meio de entrevistas, os autores buscaram identificar as construções mentais realizadas pelos alunos, bem como àquelas em que eles apresentam maiores dificuldades. Os resultados evidenciam que essas construções desempenham importante papel na compreensão dos conceitos.

Desenvolvida por Ed Dubinsky e seus colaboradores, a teoria APOS trata sobre a construção do conhecimento matemático em nível universitário. Está baseada no princípio de que o conhecimento matemático de um indivíduo é sua tendência a responder situações problemáticas de matemática, mediante a reflexão sobre os problemas e suas soluções e por meio da construção e reconstrução de ações, processos e objetos matemáticos e sua organização em esquemas para usá-los ao tratar com essas situações (Asiala et al., 1996). Segundo Moreno (2005), a teoria APOS é uma clara referência para qualquer pesquisador que deseja investigar o ensino e aprendizagem de conceitos de Cálculo no nível universitário.

Por outro lado, ao tratar do estado atual e perspectivas de pesquisas em Cálculo, Rasmussen, Marrongelle & Borba (2014) destacam que é fundamental que as pesquisas contribuam para o aperfeiçoamento da prática educativa, visando à melhoria do ensino e aprendizagem de Cálculo, e ressaltam que são necessárias mais pesquisas em áreas como o cálculo de várias variáveis e equações diferenciais.

Nesse sentido, o presente estudo, que se refere a um recorte da pesquisa de doutorado da primeira autora, tem como objetivo investigar como se dá a compreensão do conceito de derivadas parciais por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Para tanto, utilizamos o modelo cognitivo APOS para a elaboração e implementação de situações de ensino que permitem analisar se os estudantes constroem mecanismos de abstração reflexionante e estruturas mentais que favoreçam a compreensão do conceito de derivadas parciais.

2 Referencial Teórico

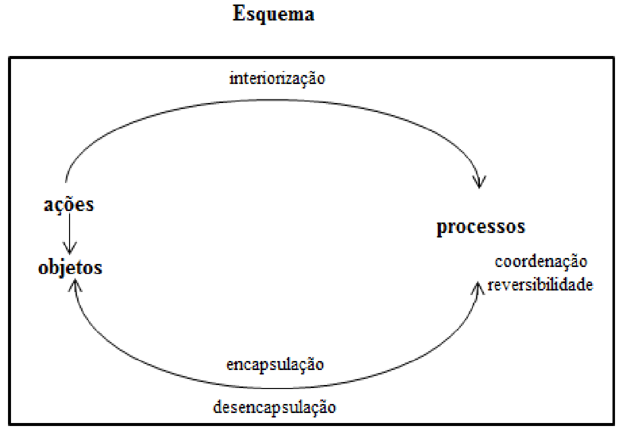
A teoria APOS busca compreender como ocorre a construção de um novo conceito matemático pelo aluno e como ele utiliza esse conhecimento para a construção de novos conceitos. Duas ideias são chaves nesse modelo teórico: a de construções mentais (ação, processo, objeto e esquema) e a de mecanismos mentais de abstração reflexionante (interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade) no qual os indivíduos realizam essas construções (Dubinsky, 1991).

A teoria APOS surgiu na tentativa de compreender o mecanismo de abstração reflexionante, introduzido por Piaget (1995), para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico nas crianças e estender essa ideia aos conceitos matemáticos mais avançados. Para Piaget (1995) a abstração reflexionante é o mecanismo mental pelo qual todas as estruturas lógico-matemáticas são desenvolvidas na mente de um indivíduo. A fim de desenvolver a noção de abstração reflexionante para o pensamento matemático avançado, Dubinsky e seus colaboradores isolaram o que parece ser as características essenciais para refletir sobre seu papel na matemática superior e reorganizar ou reconstruir de forma coerente a teoria do conhecimento matemático e sua construção. A abstração reflexionante é considerada como a construção de objetos e ações mentais sobre os objetos. Para elaborar a teoria e relacioná-la com conceitos específicos da matemática, é utilizada a noção de esquema. Um esquema é uma coleção de objetos e processos que o indivíduo utiliza para entender e organizar seu conhecimento sobre um conceito matemático.

Segundo Asiala et al. (1996), a noção de esquema é descrita como a totalidade de um conhecimento que um indivíduo associa a um tópico matemático particular. Assim, o indivíduo terá uma vasta gama de esquemas, como por exemplo, esquemas para situações que envolvem os números, as funções, as proposições, a prova por indução, e assim por diante ao longo de todo conhecimento matemático do sujeito (Dubinsky, 1991).

De acordo com Arnon et al. (2014), a compreensão de um conceito matemático começa com a manipulação de objetos mentais ou físicos para formar ações; ações são então interiorizadas para formar processos, os quais são encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados e voltar a serem processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas. Os esquemas devem ser coordenados para formar estruturas que serão utilizadas na resolução de problemas matemáticos. A generalização ocorre quando o indivíduo aplica um determinado esquema a outros contextos, e a reversibilidade, quando o indivíduo é capaz de reverter o mecanismo gerador de um objeto. As estruturas e os mecanismos mentais são apresentados de forma esquemática na Figura 1.

Figura 1 – Estruturas e mecanismos mentais



Fonte: Adaptado de Arnon et al. (2014).

Como podemos observar na Figura 1, quando o indivíduo inicia a construção de um conceito matemático, ele realiza transformações (ações e processos) sobre objetos já existentes. Uma ação é uma transformação de um objeto, resultado de um estímulo externo, e pode, em geral, ser realizada passo a passo pelo indivíduo. Quando o indivíduo pode reflexionar sobre o conceito, sem a necessidade de estímulos externos, ele começa a interiorizar estas ações em processos, que passam a fazer parte de suas estruturas mentais. Assim, por exemplo, o indivíduo poderá conhecer um resultado, sem necessariamente fazer todos os cálculos e, também, ele poderá reverter os passos de uma transformação. Os processos também podem ser resultados da coordenação de dois ou mais processos. Quando o indivíduo se torna consciente do processo como um todo, ele encapsulou o processo em um objeto cognitivo. Uma vez que processos são encapsulados em objetos mentais, eles podem ser desencapsulados, e voltar ao processo que deu origem ao objeto.

Um esquema, para um determinado conceito matemático, é a coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente do indivíduo e que permitem a resolução de um problema a partir desse conceito. Um esquema não pode ser pensado de modo estático, mas sim, como uma atividade dinâmica feita pelo sujeito. Além disso, a existência de um esquema é inseparável de sua contínua construção e reconstrução.

Para analisar a compreensão de um conceito matemático pelo indivíduo, introduz-se a ideia de decomposição genética, a qual consiste na descrição das estruturas e mecanismos mentais que um estudante precisa construir para aprender um conceito matemático específico (Arnon et al., 2014) e pode descrever os pré-requisitos necessários para a construção do conceito.

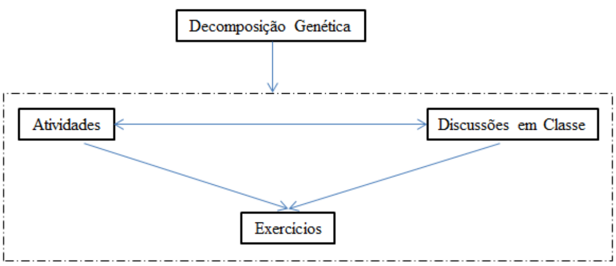
Em todo o processo de aprendizagem, é desejável que os estudantes atinjam a estrutura cognitiva de esquema, que, mediante ações, processos, objetos e outros esquemas, o estudante pode evocar para a resolução de um determinado problema. De acordo com Dubinsky (1991), a principal implicação para a educação que a teoria APOS pode proporcionar é que a preocupação deve ser com a construção de esquemas pelos alunos para que atinjam a compreensão dos conceitos. Assim, cabe ao professor motivar os alunos a fazer tais construções e ajudá-los nesse processo.

A metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS (Arnon et al., 2014) é composta por três componentes:

- Análise teórica: elaboração da decomposição genética do conceito matemático;
- Planejamento e implementação: elaboração de situações de ensino a serem desenvolvidas em sala de aula, baseadas na análise teórica e tendo como metodologia de ensino o ciclo de ensino ACE; e
- Coleta e análise dos dados: desenvolvimento das situações de ensino e análise dos dados obtidos, como forma de determinar se os alunos fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética e avaliar a compreensão do conceito pelos estudantes.

O ciclo de ensino ACE, composto por (A) Atividades, (C) Discussão em classe e (E) Exercícios se apoia em um sistema de aprendizagem colaborativo que agrupa os estudantes em equipes de trabalho e em um sistema de avaliação durante todo o curso na forma de trabalhos, exames e registros de participação e de desempenho nas atividades, entre outras estratégias. A relação entre o ciclo de ensino ACE e a decomposição genética está ilustrada na Figura 2.

Figura 2 – Relação entre o ciclo ACE e a decomposição genética



Fonte: Adaptado de Arnon et al. (2014)

De acordo com Arnon et al. (2014), a seta que vai da decomposição genética à caixa pontilhada representa que a decomposição genética afeta cada componente do ciclo de ensino ACE. A seta bidirecional entre atividades e discussão em sala de aula mostra que, por um lado, as atividades são o tema principal da discussão em classe e, por outro lado, que a discussão em sala de aula oferece uma oportunidade para os alunos refletirem sobre as atividades. As setas de atividades e de discussão em sala de aula para exercícios refletem o objetivo principal dos exercícios – reforçar as construções mentais que os alunos fazem ou iniciaram a fazer enquanto trabalham por meio das atividades e participam das discussões em sala de aula.

3 Material e Métodos

Os participantes desta pesquisa são cinco estudantes de um curso de mestrado, de um programa de pós-graduação em ensino de Matemática, de uma universidade comunitária do Rio Grande do Sul. Os alunos são licenciados em Matemática e cursaram na graduação disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral. Todos os estudantes aceitaram participar da pesquisa e assinaram o termo de Consentimento Livre e Esclarecido.

A metodologia utilizada no desenvolvimento deste estudo é de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), em que empregamos as três componentes da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS: Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise dos dados (Arnon et al., 2014).

Na Análise teórica, elaboramos a decomposição genética tendo como base a análise de livros textos (Anton, Bivens & Davis, 2007, Stewart, 2012), a compreensão matemática do conceito de derivadas parciais e a decomposição genética para a derivada de função real de uma variável real (Asiala et al. 2001, García, Gavilán & Llinares, 2012, Vega, Carrillo & Soto, 2014), a qual descrevemos no que segue.

Ao iniciar os estudos, é desejável que o aluno tenha conhecimentos sobre: o valor de uma função em um ponto no plano e no espaço; a representação gráfica de pontos, curvas e superfícies no espaço; as operações entre funções; a variação média da função; a derivada de funções de uma variável.

Para a construção do esquema da derivada parcial, consideramos as quatro componentes essenciais que podem ser identificadas nos estudantes quando da construção do conceito e os mecanismos de abstração reflexionante:

AÇÃO: Ação de substituir os valores da função em pontos específicos e calcular a variação da função e a razão das variações.

PROCESSO: Interiorização da ação de calcular a razão das variações, considerando o limite da razão da variação incremental, formando um processo, que pode ser realizado mentalmente, para obter o conceito de derivada parcial. Coordenação do processo de encontrar a razão da variação incremental e tomar o limite quando tende a zero, para obter as derivadas parciais. Coordenação de ações e processos para encontrar a derivada parcial, utilizando regras de derivação.

OBJETO: Encapsulação do processo de encontrar as derivadas parciais a partir do limite da razão da variação incremental de uma função de variáveis e , por exemplo, considerando constante e derivando em relação a para encontrar e, de modo análogo, tomando constante e derivando em relação a para obter . Generalização do conceito de derivada parcial para qualquer função). Coordenação da interpretação da derivada parcial como taxa instantânea de variação e como inclinação da curva formada pela intersecção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados. A reversibilidade do processo de calcular a derivada parcial em um ponto para, a partir do valor obtido, interpretar seu significado e indicar características da função, como crescimento e decrescimento, no ponto. Com o objeto função derivada parcial, podem ser realizadas novas ações, como o cálculo das derivadas parciais de segunda ordem.

ESQUEMA: A construção do esquema das derivadas parciais se constitui na coleção de todas as ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente do indivíduo e que permitem a resolução de um problema com a utilização do conceito de derivada parcial.

Na etapa de Planejamento e implementação, elaboramos sete atividades que envolvem o conceito de derivadas parciais, a derivada como coeficiente angular da tangente e como taxa instantânea de variação e a utilização das derivadas parciais no contexto das equações diferenciais parciais. Apresentamos as atividades que foram propostas, seguidos de uma descrição das construções mentais a serem efetivadas pelos estudantes quando da realização de cada uma das atividades.

Atividade 1

Em sua versão de 1669 para o Cálculo, Newton encontrou a inclinação da curva , utilizando e como símbolos para taxas de variação (velocidades ou fluxões) de e . Para isso, substituiu por e por na equação e, da equação assim obtida, subtraiu a equação original, dividiu por e desprezou todos os termos que ainda continham (visto que estes eram "infinitamente pequenos"). Assim, ele obteve a razão , que hoje chamamos de inclinação da reta tangente. Mais tarde, no *De Quadratura*, publicado em 1704, Newton substituiu e pelas letras "ponteadas" e e primeiro determinava a razão dos fluxos (ou) e então fazia com que o desaparecesse, para determinar assim o que ele chamou de "primeira e última razões", o que seria chamado mais tarde de "limite da razão" dos fluxos (BOYER, 1993).

Questão 1. Seguindo os passos utilizados por Newton, que expressão você obtém para a razão ?

Questão 2. Como essa razão pode ser obtida usando o cálculo de derivadas que você conhece?

A Atividade 1 tem por objetivo mostrar um dos problemas históricos resolvidos por Newton no século XVII e sua relação com as derivadas parciais. Para isso, o aluno deve realizar ações seguindo os passos estabelecidos no problema e coordenar o resultado obtido com o esquema das derivadas parciais. Aqui, torna-se necessária a utilização do mecanismo de generalização na medida em que o aluno deve coordenar o esquema das derivadas parciais no contexto de determinação de tangentes associada a uma curva dada implicitamente por uma equação e concluir que , em que .

Atividade 2

A tabela mostra valores do índice que representa a sensação térmica quando a temperatura real é (em graus Celcius) e a rapidez do vento é (em quilômetros por hora).

Temperatura (°C)	Velocidade do vento (km/h)				
	10	**20**	**30**	**40**	**50**
20	18	16	14	13	13
16	14	11	9	7	7
12	9	5	3	1	0
8	5	0	-3	-5	-6

Considerando a coluna assinalada na tabela que corresponde à velocidade do vento km/h, teremos o índice como função da variável , sendo mantida fixa a variável . Assim, a função descreve a sensação térmica quando a temperatura varia para uma velocidade do vento igual a km/h.

i) Qual é a derivada de em relação a quando °C?

ii) Obtenha uma aproximação para a derivada . A essa derivada, chamamos de derivada parcial de em relação a em e denotamos por ou . Interprete o resultado obtido.

a) Considerando agora a linha assinalada na tabela que corresponde à temperatura de 16°C, teremos o índice como função da variável , sendo mantida fixa a variável . Assim, a função descreve a sensação térmica quando a velocidade do vento varia para uma temperatura igual a °C.

i) Qual é a derivada de em relação a quando km/h?
ii) Obtenha uma aproximação para a derivada . De modo análogo, a derivada é chamada de derivada parcial de em relação a em e denotamos por ou . Interprete o resultado obtido.

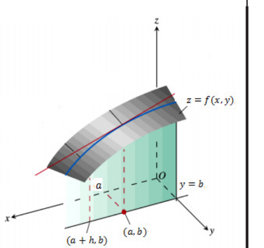
Na Atividade 2, o objetivo é que o aluno utilize os dados numéricos para determinar as taxas de variação e, por meio de aproximações, determine as derivadas parciais e e coordene os valores obtidos na interpretação das derivadas parciais como taxas instantâneas de variação da função. As aproximações podem ser obtidas, em (a) e (b), por meio da média aritmética das taxas médias de variação, e , respectivamente, tomando em cada caso, e .

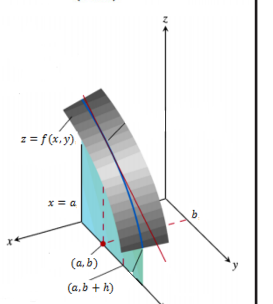
Atividade 3
Represente no espaço tridimensional:
a) os pontos , , , , e .
b) a curva com .
c) os planos , , e .
d) a superfície .
e) a curva que representa a intersecção da superfície com o plano .
f) a reta tangente ao gráfico da curva no ponto .

A Atividade 3 tem por objetivo a representação de pontos, curvas, planos e superfícies no espaço tridimensional, importantes para a compreensão da interpretação das derivadas parciais como inclinação de tangentes.

Atividade 4
Consideremos uma função , de duas variáveis e .

a) Fazendo , em que é uma constante, estamos mantendo fixo o valor de e deixando somente variar. Assim, estamos considerando uma função de uma única variável , isto é, . Se tem derivada em , chamaremos essa derivada de derivada parcial de em relação a em e denotaremos por ou . Use a derivada de em , , para obter a expressão que representa . Interprete geometricamente.
b) De modo análogo, fazendo , em que é uma constante, estamos mantendo fixo o valor de e deixando somente variar. Assim, estamos considerando uma função de uma única variável , isto é, . Se tem derivada em , chamaremos essa derivada de derivada parcial de em relação a em e denotaremos por ou . Use a derivada de em , , para obter a expressão que representa . Interprete geometricamente.

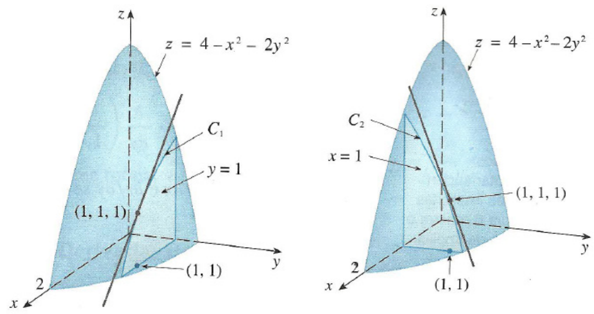




Fonte: http://www2.sorocaba.unesp.br/

O objetivo da Atividade 4 é mostrar ao aluno o processo de obtenção do conceito de derivadas de uma função de duas variáveis por meio da derivada de função de uma variável, mantendo constante para obter e, de forma análoga, mantendo constante para obter . Nessa atividade, são necessários mecanismos de interiorização e encapsulação para o objeto matemático derivada parcial, além do mecanismo de coordenação da interpretação geométrica de e .

Atividade 5
O gráfico do paraboloide elíptico e as curvas e que representam, respectivamente, a intersecção da superfície com os planos e, são mostradas nas figuras (a) e (b) (Stewart, 2012, p. 899).



(a) (b)

Questão 1. Qual é a inclinação da reta tangente à curva no ponto ?
Questão 2. Qual é a inclinação da reta tangente à curva no ponto ?

Na Atividade 5, o aluno deve coordenar a interpretação da derivada parcial como inclinação da curva formada pela intersecção da superfície com planos paralelos aos planos coordenados, determinar as derivadas, usando regras de derivação, mantendo constante para obter , e mantendo constante para obter e depois substituir no ponto a fim de obter as inclinações das retas tangentes solicitadas no exercício.

Atividade 6
Suponha que a temperatura em um ponto de uma placa de metal no plano seja dada por em °C com e em cm.
Questão 1. Qual é a variação da temperatura entre os pontos (2,1) e (3,1)?
Questão 2. Qual é a expressão que representa a variação da temperatura na direção do eixo , considerando os pontos e ?
Questão 3. Qual é a expressão que representa a variação média da temperatura na direção do eixo do ponto ao ponto ?
Questão 4. Como você obtém a taxa instantânea de variação da temperatura no ponto na direção do eixo ?
Questão 5. Qual é a taxa instantânea de variação da temperatura no ponto ? Que interpretação você dá para este resultado?
Questão 6. Como você pode obter a taxa instantânea de variação da temperatura na direção do eixo no ponto ?

A Atividade 6 dá conta da coordenação entre as construções mentais a serem realizadas pelo estudante para a obtenção de taxas de variação. Para tanto, o estudante deve realizar ações e processos que, ao serem interiorizados, auxiliam no processo de encapsulação do objeto derivada parcial de uma função em um ponto.

Atividade 7
A função é solução da equação da onda ? Justifique.

O propósito da Atividade 7 é que o aluno utilize o esquema das derivadas parciais para determinar, por meio da regra da cadeia e das derivadas das funções seno e cosseno, as derivadas parciais , , e . Além do mais, o aluno deve utilizar o mecanismo de generalização ao usar o conceito de derivadas parciais no contexto das equações diferenciais.

A implementação da pesquisa se deu por meio do desenvolvimento das atividades, em sala de aula em uma disciplina que trata dos fundamentos do Cálculo, com a responsabilidade de uma das professoras pesquisadoras, perfazendo um total de dez horas/aula, em que utilizamos o ciclo de ensino ACE, composto pelas três componentes: (A) Atividades; (C) Discussão em Classe e (E) Exercícios (Arnon et al., 2014), como metodologia de ensino. Em cada uma das aulas desenvolvidas, as atividades foram inicialmente discutidas em grupos e, na medida em que as dúvidas foram surgindo, a professora forneceu as definições e explicações, apresentando uma visão geral dos conceitos que estavam sendo discutidos.

A Coleta de dados foi feita durante o desenvolvimento das atividades em sala de aula, onde utilizamos como instrumento de coleta dos dados o registro dos alunos nas atividades propostas e o diário de campo. O registro foi feito em lápis e papel, por meio da resolução das atividades, que iam sendo entregues aos alunos, na medida em que os conceitos iam sendo apresentados e discutidos em sala de aula. Cada aluno registrou individualmente a sua resolução. O diário de campo foi utilizado para fazer o registro das observações dos fenômenos que ocorreram em sala de aula durante as atividades desenvolvidas, como as impressões observadas com relação às dificuldades, perspectivas, aos erros e acertos.

4 Resultados e Discussão

Ao iniciar as atividades sobre derivadas parciais, foram feitas discussões com os alunos com o objetivo de estender para duas variáveis o conceito de derivada de função de uma variável. Utilizamos o problema de determinação de tangentes a curvas no espaço tridimensional e o problema de determinação da variação da temperatura em uma chapa de metal na direção dos eixos coordenados para introduzir o conceito de derivada parcial.

No Quadro 1, apresentamos uma análise geral das estruturas mentais desenvolvidas por todos os estudantes nas sete atividades referentes às derivadas parciais. Para tanto, analisamos os registros de todos os alunos em cada uma dessas atividades e comparamos, por meio das respostas elaboradas, as estruturas mentais que foram desenvolvidas por eles com as que foram estabelecidas na decomposição genética para o conceito de derivadas parciais.

Quadro 1 – Análise geral das estruturas mentais desenvolvidas pelos alunos

Atividades		Ação	Processo	Objeto	Esquema
1	Questão 1	1			
	Questão 2				3
2	a)	2			
	b)	2			
3	a)	1			
	b)	1			
	c)	1			
	d)	1			
	e)	1			
	f)	1			
4	a)		3		
	b)		1		
5	Questão 1				1
	Questão 2				1
6	Questão 1	1			
	Questão 2	1			
	Questão 3	1			
	Questão 4		1		
	Questão 5			2	
	Questão 6			2	
7					1

1	Desenvolvida por 100% dos alunos
2	Desenvolvida por 60 a 80% dos alunos
3	Desenvolvida por menos de 60% dos alunos

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, por exemplo, ao indicarmos na Atividade 1/ Questão 1 o número 1 para a estrutura mental de ação, estamos dizendo que 100% dos alunos desenvolveram essa estrutura, respondendo corretamente à questão; assim como, ao indicarmos o número 3 na Atividade 4 (a), estamos dizendo que menos de 60% dos alunos responderam satisfatoriamente à questão.

Como podemos observar, a maioria das atividades envolvem a estrutura mental de ação, as quais foram desenvolvidas, na maioria das atividades, por 100% dos alunos. Nesses problemas, os alunos deveriam seguir alguns passos indicados para obter corretamente as respostas.

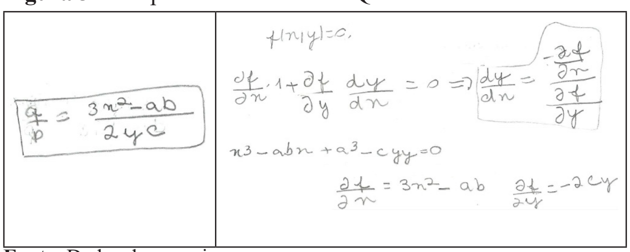
Em algumas das atividades, é preciso interiorizar ações e processos, o que, consequentemente, demanda maior capacidade de abstração, visto que o aluno deve coordenar o resultado obtido por meio dessas ações com o objeto/esquema das derivadas parciais. Isso justifica o fato de que, na Questão 2 da Atividade 1, somente dois (40%) dos cinco alunos determinaram as derivadas parciais e e observaram que as últimas razões de Newton, correspondem a , enquanto que, na Atividade 4 (a), somente um (33,33%) dos três alunos que participaram da aula, registrou em sua resolução que, quando tende a zero, o limite é o coeficiente angular da reta tangente. No entanto, as atividades 5 e 7 que envolvem a estrutura de esquema foram desenvolvidas por 100% dos alunos.

Ressaltamos que as diferenças no desenvolvimento das estruturas mentais e no desempenho dos alunos podem ser influenciadas pela falta de pré-requisitos necessários à contrução dos conceitos (Arnon et al., 2014) e dependem dos mecanismos de abstração reflexionante utilizados por eles. A resolução das atividades nos possibilita observar que construções são realizadas pelos alunos e como ocorre a interiorização e generalização de ações e processos que permitem fazer com que haja a compreensão do conceito de derivadas parciais. Além do mais, a decomposição genética permite observar o progresso da aprendizagem do aluno e pode nos indicar que outras atividades devem ser elaboradas como forma de melhorar a compreensão do conceito pelos estudantes.

A fim de exemplificar como se deu a compreensão do conceito de derivadas parciais, tendo por base o desenvolvimento das estruturas mentais previstas na decomposição genética, apresentamos, a seguir, a trajetória de aprendizagem de um dos estudantes, em que fizemos uma descrição da forma como o aluno resolveu cada uma das sete atividades propostas. Este estudante foi escolhido por apresentar em seus registros uma forma mais detalhada na resolução das atividades, o que nos permitiu analisar com maior clareza as construções mentais realizadas por ele.

Para responder à Questão 1 da Atividade 1, o estudante desenvolveu todas as ações ao seguir os passos estabelecidos para o cálculo das “primeiras e últimas razões” de Newton: substituiu por e por na equação ; da equação assim obtida, subtraiu a equação original; dividiu por e desprezou todos os termos que ainda continham . Assim, ele obteve corretamente o valor , conforme apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Resposta da Atividade 1/Questões 1 e 2

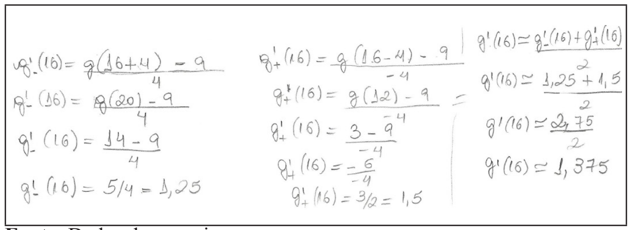


Fonte: Dados da pesquisa.

Além disso, para responder à Questão 2, o aluno utilizou as derivadas parciais para achar a derivada da função , dada implicitamente pela equação e, considerando a equação dada no problema, calculou as derivadas parciais e . Isso nos dá evidências de que o aluno encapsulou o processo de encontrar as derivadas parciais, considerando constante e derivando em relação a para encontrar e, de modo análogo, tomando constante e derivando em relação a para obter . Porém o aluno não elaborou uma justificativa correta para a Questão 2, mostrando que , ou seja, que o valor obtido por Newton para as últimas razões corresponde exatamente à derivada .

Na Atividade 2, a partir dos valores que relacionam a sensação térmica com a temperatura em graus Celcius e a velocidade do vento em quilômetros por hora, o aluno obteve as derivadas parciais de em relação a em , , e de em relação a em , , utilizando aproximações por meio da média aritmética das taxas médias de variação, , e , respectivamente, tomando e . Para obter uma aproximação para , foi considerada a velocidade do vento constante igual a 30km/h e a temperatura com variação de 16 °C para 12 °C () com sensação térmica passando de 9 para 3, e a temperatura com variação de 16 °C para 20°C (), com sensação térmica passando de 9 para 14. Na Figura 4, podem ser observados os cálculos realizados pelo aluno para a Atividade 2 (a) (ii) em que o aluno calculou a derivada , aproximadamente.

Figura 4 – Resposta da Atividade 2 (a) (ii)

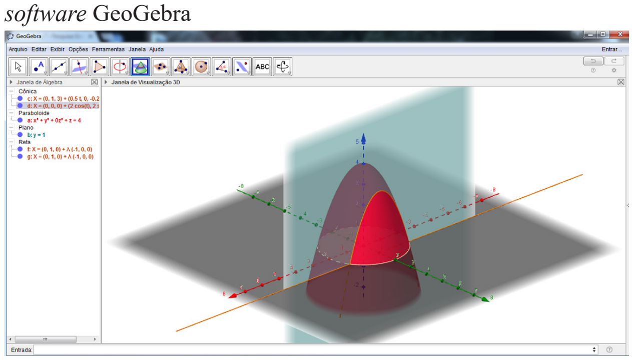


Fonte: Dados da pesquisa.

O aluno mostrou evidências em compreender os dados numéricos mostrados na tabela e em relacionar as taxas de variação médias com as taxas de variação instantânea para obter uma aproximação para as derivadas parciais; porém não registrou a interpretação dos resultados obtidos. Por exemplo, o valor obtido para indica que a sensação térmica varia em , quando a velocidade do vento é de 30 km/h e a temperatura, em °C, varia.

Na Atividade 3, o estudante representou, no espaço tridimensional, pontos, curvas, planos, superfície, intersecção de superfície e plano e reta tangente a uma curva. Essas representações geométricas são importantes para a compreensão da derivada parcial como inclinação da tangente. O *software* GeoGebra foi utilizado pelo aluno para a elaboração dos gráficos do paraboloide e do plano e para a visualização da curva (Figura 5).

Figura 5 – Gráficos do paraboloide, do plano e da curva no *software* GeoGebra



Fonte: Dados da pesquisa.

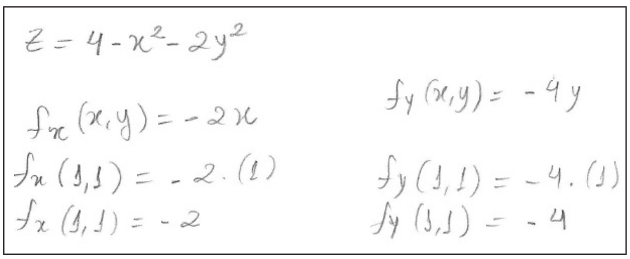
A partir da visualização, o aluno representou em lápis e papel a superfície, o plano, a curva , o ponto e a reta tangente ao gráfico da curva no ponto , o que evidencia o desenvolvimento de ações e processos quanto aos pré-requisitos estabelecidos na decomposição genética.

Na Atividade 4, o estudante obteve as expressões que definem as derivadas parciais e , porém não usou as notações corretamente e, não interpretou geometricamente os dados obtidos. Aqui, não ocorreu a interiorização de ações e processos para a encapsulação do conceito das derivadas parciais e da coordenação como inclinação da reta tangente.

Salientamos que, em sala de aula, foram feitas discussões em que o conceito de derivada parcial de função de duas variáveis e as interpretações, como inclinação da tangente e como taxa de variação instantânea, foram retomados. Também foram destacados os procedimentos que podem ser utilizados para o cálculo das derivadas parciais. Essas discussões favoreceram a compreensão dos conceitos, como pode ser observado nas atividades 5, 6 e 7, descritas a seguir, em que o aluno desenvolveu as construções mentais previstas pela decomposição genética.

Para responder às questões da Atividade 5, o aluno utiliza corretamente as regras de derivação e substitui e no ponto para obter as inclinações das retas tangentes solicitadas na atividade (Figura 6). Ao ser questionado se as inclinações eram positivas ou negativas, o aluno respondeu corretamente e observou que, na direção positiva dos eixos, a função decresce e que esse aspecto está associado aos valores negativos de e . Nessa atividade, o aluno evidencia utilizar o mecanismo de coordenação da interpretação das derivadas parciais como inclinação das tangentes.

Figura 6 – Resposta da Atividade 5

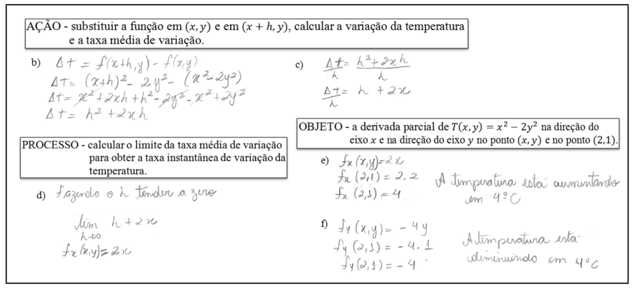


Fonte: Dados da pesquisa.

Ao compararmos os resultados das atividades 1, 2, 4 e 5, evidenciamos que o estudante demonstra conhecimentos sobre a determinação das derivadas parciais em que utiliza corretamente as regras de derivação para obtê-las, porém não foi capaz de interpretar os dados obtidos, apresentando assim, uma aprendizagem mecânica, em que não há interiorização de ações e processos que permitiram a encapsulação do conceito. O que se observa é que, ao se deparar com problemas que requerem maior conhecimento conceitual, o aluno não é capaz de abordar.

Na Atividade 6, a partir da expressão analítica que representa a temperatura em um ponto de uma placa de metal no plano , sendo em °C e e em cm, o aluno seguiu as orientações para encontrar a variação da temperatura, a variação média e com o limite, chegar à variação instantânea da temperatura no ponto na direção do eixo . A resolução da Atividade 6 (b) – (f), feita pelo estudante e as estruturas mentais de ação, processo e objeto, indicadas pela decomposição genética para derivadas parciais, são mostrados na Figura 7.

Figura 7 – Resolução da Atividade 6 e estruturas mentais desenvolvidas

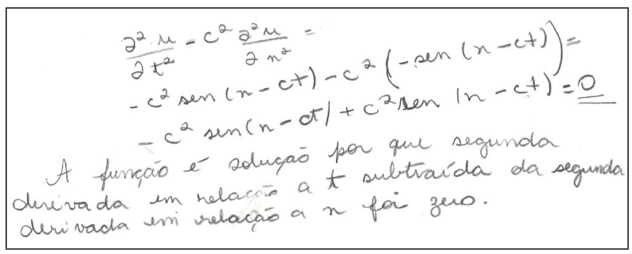


Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados obtidos, ilustrados na Figura 7, evidenciam que houve compreensão do conceito de derivadas parciais, visto que o aluno foi capaz de realizar as construções mentais indicadas pela decomposição genética. Aqui, diferentemente das atividades 1, 2 e 4, foram indicados todos os passos que o aluno deveria seguir para responder às questões. As ações e processos, embora sejam estruturas mais simples, são fundamentais para a construção do esquema de um conceito. Acreditamos que isso favoreceu o desenvolvimento dos mecanismos mentais necessários à compreensão do esquema das derivadas parciais.

Na Atividade 7, o aluno utilizou regras de derivação e coordenou ações e processos para a obtenção das derivadas parciais de primeira ordem da função , além de ter realizado novas ações e processos sobre e para a obtenção das derivadas parciais de segunda ordem. O aluno também utilizou o conceito de solução de uma equação diferencial parcial, tendo substituído as derivadas e na equação da onda para verificar se a equação é satisfeita (Figura 8).

Figura 8 – Resposta da Atividade 7



Fonte: Dados da pesquisa.

Como podemos observar em sua justificativa, o aluno não registrou que multiplica a derivada parcial de segunda ordem em relação a e não utilizou corretamente a nomenclatura para a derivada, escrevendo, por exemplo, "derivada em relação a " em vez de derivada parcial de segunda ordem em relação a . Porém esses erros não implicam que o estudante não demonstrou conhecer o conceito de solução de uma equação, mas que faltou se expressar melhor em sua resposta. Nessa atividade, há evidências de que o aluno utilizou os mecanismos de coordenação e generalização do esquema da derivada parcial no contexto das equações diferenciais parciais.

5 Conclusão

Desenvolvemos este estudo dentro da metodologia de pesquisa proposta pela teoria APOS, seguindo as etapas de Análise teórica, Planejamento e implementação e Coleta e análise dos dados como forma de investigar a compreensão dos estudantes com relação ao conceito de derivadas parciais.

De uma forma geral, os dados obtidos com a descrição das atividades resolvidas pelo aluno, com a análise dos registros das anotações do diário de campo, nos possibilitam obter os seguintes resultados:

- O desenvolvimento das atividades permitiu a construção do esquema das derivadas parciais pelo aluno para lidar com as funções de duas variáveis. Apesar da ausência de alguns conceitos sobre as derivadas parciais, o aluno foi capaz de coordenar a interpretação como inclinação de tangentes a curvas no espaço tridimensional e como taxas de variação e de utilizar o mecanismo de generalização ao resolver problemas sobre equações diferenciais parciais.
- A análise dos dados nos mostra que a decomposição genética, elaborada para as derivadas parciais, dá conta das construções mentais necessárias para a aprendizagem do conceito. No entanto, se quisermos que o aluno use justificativas mais plausíveis, é necessário que sejam apresentadas mais situações de ensino que tratem de questões conceituais sobre as derivadas parciais, visto que o aluno apresentou dificuldades na resolução dessas questões. Além disso, observamos que o aluno teve facilidade na resolução de situações de ensino que envolve regras e passos a serem seguidos, demonstrando aí desenvolver as construções mentais indicadas pela decomposição genética.

Entendemos, assim, que as escolhas teóricas e metodológicas permitiram alcançar o objetivo desta pesquisa, que foi o de investigar como se dá a compreensão do conceito de derivadas parciais por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática, levando em conta a teoria APOS como referencial teórico e metodológico. Embora a descrição dos resultados tenha sido focada em apenas um aluno, os registros dos dados coletados mostram semelhanças do trabalho dos demais alunos com o que foi descrito.

Além do mais, acreditamos que a metodologia de ensino utilizada, tendo por base o ciclo de ensino ACE, com o desenvolvimento de atividades, discussões em classe e exercícios, as atividades elaboradas a partir da decomposição genética e apresentadas aos alunos, favoreceram a compreensão do conceito de derivadas parciais por estudantes de um curso de mestrado em ensino de Matemática. Os resultados obtidos na investigação nos remetem a propor, para uma futura investigação, a utilização do referencial teórico e metodológico APOS em cursos de Cálculo na graduação, para promover a compreensão de outros conceitos matemáticos.

Referências

Anton, H., Bivens, I. & Davis, S. (2007). *Cálculo*. 2, 8. ed. Porto Alegre: Bookman.

Alves, F. R. V. & Borges Neto, H. (2011). Transição interna do cálculo em uma variável para o cálculo a várias variáveis: uma análise de livros. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo (SP), 13(3), 597-626.

Arnon, I. et al. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Asiala, M. et al. (1996) A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32.

Asiala, M. et al. (2001). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education*, 1-37.

Bisognin. E. & Bisognin, V. (2011). Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo (SP), 13(3), 509-526.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto.

Boyer, C. B. (1993). *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Cálculo*. São Paulo: Atual.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: D. Tall. *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

García, M., Gavilán, J. M. & Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30.3, 219-236.

Martinez-Planell, R., Trigueros, M. & McGee, D. (2015). On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 57-86.

Moreno, M. M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. In: Simpósio de la Sociedad Española de Investigación em Educatión Matemática, 9., 2005, España. *Anais* ... España: Universidad de Córdoba, 2005. p. 81-96.

Panero, M., Arzarello, F. & Sabena, C. (2016). The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers' Practices with the Idea of "Generic". *Bolema*, Rio Claro (SP), 54(30), 265-286.

Piaget, J. (1995). *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D. & Font, V. (2015). Una propuesta para el análisis de las prácticas matemáticas de futuros professores sobre derivadas. *Bolema*, Rio Claro (SP), 29(51), 60-89.

Rachelli, J. (2017). *Compreensão dos conceitos de derivada clássica e derivada fraca: análise segundo o modelo cognitivo APOS* (Tese de Doutorado). Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, RS, Brasil.

Rasmussen, C., Marrongelle, K. & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *ZDM Mathematics Education*, Berlim (Alemanha), 46, 507-515.

Stewart, J. (2012). *Calculus*. 7. ed. Belmont: Brooks/Cole.

Vega, M. A., Carrillo, J. & Soto, J. (2014). Análisis según el modelo cognitivo APOS del aprendizaje construido del concepto de la derivada. *Bolema*, Rio Claro (SP), 28(48), 403-429.