ETAPAS DE ESCOLHA NA RESOLUÇÃO DE PRODUTOS CARTESIANOS, ARRANJOS, COMBINAÇÕES E PERMUTAÇÕES

Danielle Avanço Vega[1]
Universidade Federal de Pernambuco
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba [2]
Universidade Federal de Pernambuco

RESUMO

Objetivando analisar a influência do *número de etapas de escolha* na resolução dos diversos tipos de problemas combinatórios, (*produto cartesiano*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*), tomou-se por base a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), que defende a existência de três dimensões fundamentais de conceitos: *situações que dão significado*, *invariantes* e *representações simbólicas*. Fundamentou-se, também, em Pessoa e Borba (2009), que abordam os diversos significados presentes na Combinatória e Borba (2010), que trata do raciocínio combinatório. O presente artigo entende por *etapa de escolha*, as variáveis presentes em uma situação combinatória e defende que o número de etapas de escolha pode influenciar na resolução de problemas combinatórios. 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental participaram da pesquisa respondendo a um teste de sondagem. Foram seis tipos de testes, cinco deles compararam dois tipos de problemas cada e o sexto teste comparou as etapas de escolha dentro do mesmo problema. Em todos os testes eram comparados problemas com duas, três e quatro etapas de escolha. O resultado dos testes revelou que os Tipos 2 e 5 obtiveram uma média de acertos mais baixas, podendo estar associada ao total de possibilidades presente nos problemas de *arranjo* com quatro etapas, visto que era o tipo de problema que apresentava maior grandeza numérica. No teste Tipo 6 verificou-se diferença estatisticamente significativa entre os desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas em comparação aos mesmos problemas com duas e três etapas de escolha, evidenciando a influência das etapas de escolha no desempenho dos alunos. Ao

[1] danielleavanco@yahoo.com.br
[2] resrborba@gmail.com

comparar o problema de *produto cartesiano* que, segundo pesquisas anteriores (PESSOA e BORBA, 2009; 2010; CORREIA e OLIVEIRA, 2011 e AZEVEDO e BORBA, 2012), era tido como o problema de mais fácil resolução para os alunos, com os problemas de *permutação*, percebeu-se uma inversão do que havia sido constatado anteriormente, na qual a *permutação* passou a ser mais fácil que o *produto cartesiano* quando se controlou o número de etapas de escolha. Ao observar as estratégias de resolução, não se verificou relação entre a representação simbólica e estratégias utilizadas e os tipos de problemas, nem com as etapas de escolha, indicando que a utilização das estratégias pode estar relacionada a escolhas pessoais. Conclui-se que no trabalho com variados tipos de situações combinatórias é preciso considerar diferentes etapas de escolha em cada tipo de problema desde o Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Combinatória. Etapas de escolha. Tipos de problemas. Estratégias.Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Aimed at analyzing the influence of the *number of steps of choice* in solving many types of combinatorial problems (*Cartesian product*, *arrangement*, *combination* and *permutation*), the Theory of Conceptual Fields of Vergnaud (1986) was taken as basis, which argues for the existence of three fundamental dimensions of concepts: *situations that give meaning*, *invariants* and *symbolic representations*. Pessoa and Borba (2009) were also taken as basis, who address the various meanings present in Combinatorics, and Borba (2010), who deals with combinatorial thinking. In this article *steps of choice* are the variables present in a combinatorial situation and we argue that the number of steps can influence the solving of combinatorial problems. 128 students in the 6th grade of Elementary School participated in the survey by answering a test. There were six types of tests, five of which compared two types of problems and a sixth test that compared the steps of choice within the same problem type. In all tests were compared problems with two, three and four steps of choice. The test results revealed that Type 2 and 5 had a lower mean of correct answers and this may be associated with the total number of possibilities of *arrangements* with four steps of choice, since it was the kind of problem that had greater numerical quantity. In Type 6

test there was a statistically significant difference between the performances on the problems of *Cartesian product* with four steps compared to the same problem type with two and three steps of choice, showing the influence of the steps of choice in student performance. When comparing the problem of *Cartesian product*, which according to previous studies (PESSOA and BORBA, 2009, 2010; CORREIA and OLIVEIRA, 2011 and AZEVEDO and BORBA, 2012), was seen as the problem with the easiest resolution by students, with *permutation* problems, we noticed a reversal of what had been previously observed, in which *permutation* became easier than *Cartesian product* when the number of steps of choice was controlled. By observing resolution strategies, there was no relationship between symbolic representation and strategies used and the types of problems, nor with the number of steps of choice, indicating that the use of strategies may be related to personal choices. We conclude that in working with various types of combinatorial situations we need to consider different steps of choice in each type of problem since Elementary School.

Keywords: Combinatorics. Steps of choice. Problem types. Strategies. Elementary School.

INTRODUÇÃO

Problemas combinatórios envolvem raciocínios mais complexos e a busca de procedimentos de solução mais adequados, pois, nem sempre, a aplicação de uma única operação ou de uma fórmula é a melhor maneira de resolver o problema combinatório. Por vezes, uma listagem de elementos, ou outro procedimento informal, é um caminho e resolução mais simples ou adequado para um problema dessa natureza. São problemas em seu sentido essencial, pois, como apontado por Borba (2010, 2013), não se sabe a solução de imediato, mas há como desenvolver procedimentos variados para a sua resolução.

Raciocínio combinatório é a forma de pensar sobre situações, envolvendo o levantamento de possibilidades que atendem a determinadas condições, que consideram se há repetição, escolha e ordenação de elementos, dentre outras relações (BORBA, 2010). Essa maneira de raciocinar é uma competência mais complexa e que deve ser estimulada pela escola, pois se constitui em base para a resolução de situações problemas.

Para ensinar Combinatória é preciso "levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (PCN, BRASIL, 1997, p. 40). Essa é a orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em relação ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, a qual envolve o trabalho com diferentes tipos de problemas combinatórios – tais como *arranjos*, *combinações* e *permutações* – e o uso de um recurso de resolução de situações combinatórias, tal como o princípio multiplicativo da contagem.

Estudos anteriores (MORO e SOARES, 2006, PESSOA e BORBA, 2009, e MAHER e YANKELEWITZ, 2010) revelam que, mesmo antes da aprendizagem desse conteúdo na escola, alunos possuem algum conhecimento de Combinatória, como a adequada escolha de elementos de um conjunto para combiná-los, mas apresentam dificuldades em outras relações combinatórias, como a consideração, ou não, da ordem dos elementos e o esgotamento de todas as possibilidades. Os conhecimentos iniciais que os estudantes possuem, indicam que esse conteúdo pode ser trabalhado desde os anos iniciais – já que há reconhecimento de algumas das relações combinatórias, mas há necessidade da intervenção de ensino para que outras relações sejam conhecidas.

Por outro lado, as dificuldades que estudantes apresentam em desenvolver o raciocínio combinatório têm sido relatadas por diversos autores (SCHLIEMANN, 1988; MORO e SOARES, 2006; TAXA-AMARO, 2006; PESSOA e BORBA, 2009). Essas dificuldades ocorrem em distintos níveis e modalidades de ensino, tais como nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na Educação de Jovens e Adultos e até mesmo entre estudantes de Ensino Superior.

Mesmo frente às dificuldades, observa-se que a compreensão de alguns princípios da Combinatória pode se iniciar antes do ensino escolar deste conteúdo, tendo evidências de conhecimentos intuitivos desde a Educação Infantil, como destacado por Matias, Santos e Pessoa (2011) e por Pessoa e Borba (2012).

Noções combinatórias intuitivas foram observadas por Pessoa e Borba (2012) em crianças de cinco e seis anos de idade, sendo a relação de escolha de elementos a mais facilmente percebida pelas crianças e as de ordem e esgotamento de possibilidades as relações mais complexas e difíceis de serem apreendidas. Dessa forma, quando se propõe situações-problema que envolvem escolha de vestimentas, formações de casais para dança, combinações de sucos e sanduiches, dentre diversas outras situações, pode-se explorar a Combinatória nos anos iniciais de escolaridade.

Pessoa e Borba (2010) pesquisaram como alunos desde o 2º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio compreendem problemas que envolvem a Combinatória. Os estudantes resolveram um teste constituído por oito problemas que abordavam os diferentes significados da Combinatória (*produto cartesiano*, *arranjo, combinação* e *permutação)*. As autoras observaram que o *produto cartesiano* foi o significado em que os estudantes obtiveram os melhores desempenhos. Por outro lado, as maiores dificuldades foram identificadas nas resoluções dos problemas de *permutação*. A maioria dos acertos foi observada nos problemas que apresentaram uma grandeza numérica pequena, pois o valor dos resultados dos problemas foi outra das variáveis manipuladas em sua pesquisa.

Entretanto, nesse estudo, e em outros (CORREA e OLIVEIRA, 2011) que obtiveram resultados semelhantes, indicando a *permutação* como problema combinatório mais difícil para alunos de anos iniciais, não se verificou o efeito de número de etapas de escolha de elementos. Sem esse controle, fica-se a dúvida se a natureza do problema (o tipo de situação combinatória), com suas respectivas relações combinatórias, é o fator que mais influencia nas dificuldades observadas, ou se outros fatores podem ter também um forte impacto.

Etapas de escolha referem-se ao número de escolhas que devem ser efetuadas em problemas combinatórios. Em *produtos cartesianos* pode-se, por exemplo, escolher um dentre quatro tipos de suco e um dentre cinco tipos de sanduíche e as etapas de escolha são duas: o tipo de suco e o tipo de sanduíche. Nesse mesmo tipo de problema, podem-se ter três etapas de escolha: o tipo de suco, o tipo de sanduíche e o tipo de sobremesa. Já em uma *permutação* que, por exemplo, se deseja permutar três pessoas em uma fila, as etapas de escolha são três: a primeira pessoa da fila, a segunda e a terceira. Já uma *permutação* com quatro elementos poderia ser o de anagramas com as letras da palavra AMOR, na qual quatro escolhas seriam efetuadas: cada uma das quatro letras. Embora o primeiro problema de *produto cartesiano* citado resulte em um número maior de possibilidades (no caso 20) e o número de possibilidades do primeiro problema de *permutação* citado seja apenas seis, o último tipo de problema tem se demonstrado mais difícil pelos alunos em início de escolarização. Observa-se que no *produto cartesiano* citado há apenas duas etapas de escolha e no exemplo de *permutação* mencionado há três etapas de escolha.

Outros exemplos utilizados nesse artigo apresentam não só duas ou três etapas, mas, também, quatro etapas de escolha, como na pesquisa de Vega (2014). Um deles simula a situação de uma garota que deve escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, combinando elementos de blusas, calças, sapatos e brincos, no qual cada conjunto de elementos representa uma etapa de escolha, desse problema de *produto cartesiano*. Outro problema com quatro etapas de escolha simulou a colocação de cinco alunos, em primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar para representarem a escola nas Olimpíadas de Matemática, nos quais cada colocação representa uma etapa de escolha desse problema de *arranjo*.

Cada tipo de problema combinatório apresenta as etapas de escolha de uma forma diferente, segundo Vega (2014), em *produtos cartesianos* são elementos de conjuntos que devem ser combinados, em *permutações*, são a quantidade de elementos a serem permutados entre si, já em *arranjos* e *combinações*, são a escolha de alguns elementos que precisam ser arranjados ou combinados, sendo a diferença entre eles, a de que no *arranjo* a ordem influencia na constituição de novas possibilidades e na *combinação* a ordem não gera possibilidades distintas.

O desempenho dos alunos em Combinatória pode ser influenciado por diversos fatores, como: as relações e propriedades de cada tipo de problema, as quais variam em termos de escolhas de elementos e de ordenação dos mesmos; como também o desenvolvimento cognitivo de cada sujeito e o aprendizado escolar, os quais possibilitam, ou não, a compreensão das variadas situações combinatórias. Também se percebe que a descrição, ou não, dos valores das variáveis pode influenciar no desempenho dos estudantes (por exemplo: descrever que os quatro sucos que devem ser combinados são de laranja, uva, cajá e acerola; ou apenas afirmar que são quatro, sem discriminá-los). Outros fatores, também, podem influenciar, como a ordem de grandeza do número de possibilidades dos problemas combinatórios; a explicitação de possibilidades no enunciado (quando no enunciado do problema já se explicita uma forma de combinação); e o número de etapas de escolha dos elementos.

Alguns desses fatores já foram anteriormente estudados, tais como a influência do desenvolvimento cognitivo (INHELDER e PIAGET, 1976; MORO e SOARES, 2006), do aprendizado escolar (FISCHBEIN, 1975 e SCHLIEMANN, 1988), dos tipos de problemas e suas respectivas relações e propriedades (PESSOA e BORBA, 2009), da ordem de grandeza do número de possibilidades (PESSOA e BORBA, 2009 e TEIXEIRA, CAMPOS, VASCONCELLOS e GUIMARÃES, 2011), da descrição dos valores das variáveis (CORREIA e OLIVEIRA, 2011) e da explicitação de possibilidades no enunciado (SILVA e SPINILLO, 2011). Entretanto, a influência do número de etapas de escolha dos elementos não foi, ainda, devidamente explorada.

Dessa forma, nesse artigo, serão apresentados os resultados do estudo de Vega (2014) que controlou as etapas de escolha de elementos, buscando verificar se há influência do número de etapas na resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. Esse controle de número de etapas de escolha não havia sido uma preocupação de estudos anteriores e pode, pelo menos em parte, explicar desempenhos observados em alguns destes estudos anteriormente realizados.

Buscou-se, nesse artigo, contribuir através da explicitação da investigação realizada sobre o efeito de etapas de escolha na resolução de problemas combinatórios, tendo em vista que, diversas pesquisas recentes (MORO e SOARES, 2006; PESSOA e BORBA, 2010; AZEVEDO, COSTA e BORBA, 2011; SILVA e SPINILLO, 2011; BARRETO, 2012) investigaram o raciocínio combinatório e analisaram como os alunos pensam sobre problemas desta natureza, quais as dificuldades e facilidades identificadas, conceitualizações e estratégias de resolução evidenciadas. Almeja-se, assim, acrescentar reflexões nessa temática, sobre o que pode influenciar o desenvolvimento do raciocínio combinatório e aspectos a serem considerados no ensino da Combinatória – conteúdo matemático que envolve situações multiplicativas.

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Ao se investigar a Combinatória, sabe-se que a mesma está inserida no campo conceitual das estruturas multiplicativas. Segundo Vergnaud (1986), campo conceitual é "um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão". (p.84). Esse pesquisador também afirma que todo conceito é formado por um "tripé de três conjuntos" (p.83): 1) conjunto de *situações que dão significado* ao conceito; 2) conjunto de propriedades *invariantes* do conceito e 3) conjunto das *representações simbólicas* utilizadas para representar e operar com o conceito. Essas três dimensões dos conceitos foram observadas na pesquisa de Vega (2014): quando se comparou os desempenhos dos alunos nos problemas com *significados* variados (os quatro tipos de problemas, apresentados a seguir); quando se abordou as relações *invariantes* dos distintos problemas, em particular, no número de etapas de escolha sendo controladas, e quando se observou as *representações simbólicas* utilizadas pelos sujeitos para responder aos problemas combinatórios.

O tripé proposto por Vergnaud (1986) é ressaltado na pesquisa de Vega (2014) quando se buscou controlar as etapas de escolha nos diferentes tipos (situações) de problemas combinatórios e seus respectivos invariantes, bem como nas grandezas numéricas propostas e na influência que as representações utilizadas tiveram no desempenho dos participantes do estudo.

OBJETIVOS E MÉTODO

Vega (2014) analisou o efeito de número de etapas de escolha, do tipo de problema e do número de possibilidades no desempenho de estudantes do Ensino Fundamental em problemas combinatórios. Para tanto, realizou um estudo de sondagem com 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Cada participante respondeu um de seis tipos diferentes de testes, possibilitando-se o controle das variáveis manipuladas: número de etapas de escolha dos problemas resolvidos, ordem de grandeza dos resultados dos problemas e tipos de situações combinatórias (*arranjo*, *combinação*, *permutação* e *produto cartesiano*).

A sondagem realizou-se por meio de seis tipos de teste, que continham seis ou oito problemas combinatórios (dependendo do teste). Todos os testes foram aplicados nas distintas salas de aula participantes e entregues aos alunos de forma aleatória. Os cinco primeiros testes comparavam dois tipos de problemas combinatórios, cada um com 2, 3 e 4 etapas de escolha, sendo assim, cada teste continha seis problemas. O sexto tipo de teste controlou o número de etapas de escolha (2, 3 e 4 etapas) e a quantidade total de possibilidades dentro de um mesmo problema, contendo oito problemas.

Os seis tipos diferentes de testes foram organizados da seguinte forma:

Teste 1 - Produto Cartesiano x Permutação

Teste 2 - Produto Cartesiano x Arranjo

Teste 3 - Produto Cartesiano x Combinação

Teste 4 - Combinação x Permutação

Teste 5 - Combinação x Arranjo

Os problemas de *permutação* e *arranjo* não foram comparados, pois seus resultados são fixos de acordo com as etapas de escolha. Por exemplo: 2, 6 e 24 são os resultados dos problemas de permutação com 2, 3 e 4 etapas de escolha respectivamente. Já os problemas de arranjo, têm como menores resultados para cada etapa de escolha, 6, 24 e 120, respectivamente para duas, três e quatro etapas. Com estes resultados fixos e diferentes em cada uma das etapas, não seria possível comparar o desempenho dos alunos em cada tipo de problema observando cada uma das etapas, pois as etapas seriam iguais, mas os resultados em cada uma delas seriam muito diferentes, tornando mais difíceis os problemas com grandeza numérica maior, como já foi visto em estudos anteriores.

Sendo assim, como cada tipo de teste buscou comparar dois tipos de problemas, com resultados semelhantes ou iguais em cada etapa de escolha, resultou-se, portanto, em cinco tipos de testes. Contudo, ainda buscou-se elaborar outro tipo de teste, não mais para comparar dois tipos de problemas, mas sim, para comparar as etapas de escolha dentro de um mesmo problema:

Teste 6 - Produto Cartesiano x Combinação x Permutação

Neste tipo de teste não foram comparados os problemas de *arranjo,* pois, como já dito anteriormente, esse tipo de problema apresenta como menores resultados fixos 6, 24 e 120 possibilidades, para duas, três e quatro etapas de escolha, respectivamente. Como o objetivo desse tipo de teste era comparar as etapas de escolha dentro de cada tipo de problema, os resultados deveriam ser iguais ou similares e menores que uma dezena, para que o número de possibilidades não fosse a causa do baixo desempenho. Portanto, utilizaram-se os problemas de *produto cartesiano, combinação e permutação*, este último somente com duas e três etapas de escolha. Excluíram-se os problemas de *permutação* com quatro etapas pelo mesmo motivo que se excluiu os problemas de *arranjo*, para que o número total de possibilidades não ultrapassasse uma dezena.

Também foram controladas as grandezas numéricas nos problemas, no qual os problemas de *produto cartesiano* apresentaram resultado 8 em todas as etapas de escolha. Os problemas de *combinação* tiveram os seguintes resultados em cada etapa: 6, 4 e 5. Já os problemas de *permutação*, foram controladas somente 2 e 3 etapas, no qual os resultados eram 2 e 6. Não se comparou os problemas de *permutação* com quatro etapas de escolha, pois o resultado apresentado é 24, tornando-se difícil uma comparação equivalente com as demais etapas de escolha. Por esse motivo, os problemas de *permutação* apresentaram somente comparação entre duas e três etapas, fazendo com que o teste do Tipo 6 apresentasse oito tipos de problemas, três de *produto cartesiano*, três de *combinação* e dois de *permutação*.

A ordenação de cada problema dentro dos testes se deu de forma aleatória. Não foi necessário preocupar-se com a ordem de apresentação de cada problema nos testes, visto que, Pontes e Borba (2012) verificaram não haver diferença significativa na disposição dos problemas dentro de cada tipo de teste, ou seja, iniciar um teste por um problema de *produto cartesiano* – tido como mais fácil em estudos anteriores – ou por um problema de *permutação* – considerado mais difícil – não apresenta diferença no desempenho dos alunos. Portanto, a ordem em que cada problema se dispôs nos diferentes tipos de testes foi através de sorteio.

Para combinar os resultados dos diversos tipos de problemas em cada tipo de teste foi necessário organizar os possíveis resultados em cada etapa de escolha. Como já explicitado anteriormente, os números de elementos envolvidos nos problemas de *combinação, arranjo e permutação* estão restritos ao número de etapas de escolha. Essa restrição não ocorre com os problemas de *produto cartesiano*, isso porque a resolução de seus problemas se dá pela multiplicação direta de seus elementos.

As grandezas numéricas de todos os problemas em cada uma das etapas de escolha foram controladas, como pode ser visto no Quadro 1.

No teste Tipo 1, os problemas de *produto cartesiano* e *permutação* tiveram seus resultados iguais em cada uma das etapas. Por exemplo, nos problemas de *produto cartesiano* e de *permutação* com duas etapas de escolha, o total de possibilidades era dois. Já com três etapas de escolha, ambos os problemas apresentaram seis como sendo o total de possibilidades possíveis de serem combinadas. Nos problemas deste tipo de teste, o resultado das possibilidades da combinação de quatro etapas de escolha foi 24.

Quadro 1: Tipos de testes

<table>
<tr><th>Testes</th><th>Questões</th><th>Comparando</th><th colspan="3">Respostas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo 1</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">Produto Cartesiano
X
Permutação</td><td>2 etapas</td><td>3 etapas</td><td>4 etapas</td></tr>
<tr><td>2</td><td>6</td><td>24</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo 2</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">Produto Cartesiano
X
Arranjo</td><td>2 etapas</td><td>3 etapas</td><td>4 etapas</td></tr>
<tr><td>6</td><td>24</td><td>120</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo 3</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">Produto Cartesiano
X
Combinação</td><td>2 etapas</td><td>3 etapas</td><td>4 etapas</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>6 e 5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo 4</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">Permutação
X
Combinação</td><td>2 etapas</td><td>3 etapas</td><td>4 etapas</td></tr>
<tr><td>2 e 3</td><td>6 e 4</td><td>24 e 15</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo 5</td><td rowspan="2">6</td><td rowspan="2">Arranjo
X
Combinação</td><td>2 etapas</td><td>3 etapas</td><td>4 etapas</td></tr>
<tr><td>6</td><td>20 e 24</td><td>120 e 126</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Tipo 6</td><td rowspan="2">8</td><td rowspan="2">2, 3 e 4 Etapas de Escolha dentro de um mesmo problema</td><td>Produto Cartesiano</td><td>Combinação</td><td>Permutação</td></tr>
<tr><td>8</td><td>6, 4 e 5</td><td>2 e 6</td></tr>
</table>

Da mesma forma, procedeu-se com os problemas do teste Tipo 2, 3, 4 e 5. Ao se visualizar o Quadro 1, percebe-se que nem todos os resultados foram iguais, alguns foram similares. Um exemplo de similaridade no total de possibilidades aconteceu com o teste Tipo 3. Em quatro etapas de escolha, nos quais os resultados similares foram seis e cinco possibilidades, no qual, seis é o resultado do problema de *produto cartesiano*, listado primeiro no quadro, e cinco, o resultado do problema de *combinação*. Os resultados, no quadro, que foram similares, encontram-se listados na mesma ordem em que aparece a comparação dos problemas e quando os resultados são iguais, este aparece uma única vez no quadro.

CATEGORIZAÇÃO DAS RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS

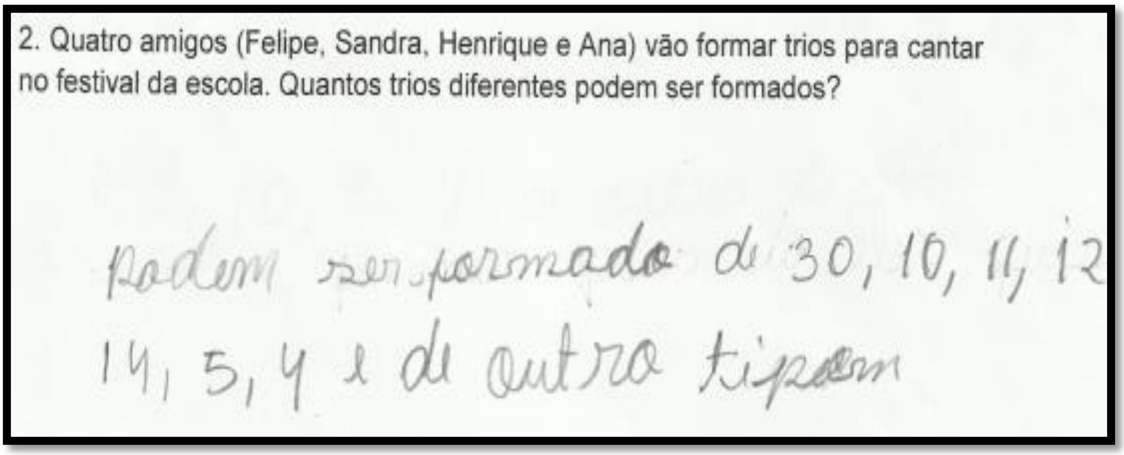
As categorias foram criadas a partir das respostas apresentadas pelos alunos, indo além do mero erro ou acerto total. De acordo com o desempenho dos alunos na resolução dos problemas, foi possível categorizar as respostas, e organizá-las em acertos totais, acertos parciais e erros, como pode ser observado no Quadro 2.

Foram determinadas pontuações, na qual a pontuação zero correspondia ao erro, ou seja, se o aluno deixava a questão em branco ou não conseguia apresentar nenhuma possibilidade válida, o que indicava não haver ter compreendido a relação combinatória da situação. A pontuação um correspondia ao Acerto Parcial 1, no qual o aluno respondia com apenas uma possibilidade de situação combinatória, ou seja, percebia quais relações combinatórias estavam presentes na situação e corretamente apresentava uma possibilidade, mas se limitava a apresentar essa possibilidade, por considerá-la única, por ser sua preferida ou por julgar, ainda, que não havia necessidade de apresentar outras. A pontuação dois associava-se ao Acerto Parcial 2, tendo como resposta duas situações combinatórias ou mais, podendo chegar até a metade das possibilidades. Nesse caso, o aluno percebia a necessidade de apresentar mais de uma possibilidade, mas ao máximo chegava a apresentar metade das possibilidades válidas. A pontuação três correspondia ao Acerto Parcial 3, no qual o aluno respondia com mais da metade das possibilidades, indicando perceber a necessidade de esgotar o todo, embora não conseguisse ainda sistematicamente apresentar todas as possibilidades. A pontuação quatro era o Acerto Total do problema, ou seja, eram apresentadas todas as possibilidades corretas.

Quadro 2: Categorização das respostas

PONTUAÇÃO 0	• ERRO
PONTUAÇÃO 1	• ACERTO PARCIAL 1 - APENAS UMA POSSIBILIDADE APRESENTADA
PONTUAÇÃO 2	• ACERTO PARCIAL 2 - DE 2 ATÉ A METADE DAS POSSIBILIDADES APRESENTADAS
PONTUAÇÃO 3	• ACERTO PARCIAL 3 - MAIS DA METADE DAS POSSIBILIDADES APRESENTADAS
PONTUAÇÃO 4	• ACERTO TOTAL

Para exemplificar melhor cada uma dessas categorias, Vega (2014) apresenta extratos das respostas dos alunos em cada categoria de pontuação. A Figura 1 mostra a resposta de um aluno que não apresentou em sua resolução uma relação combinatória.

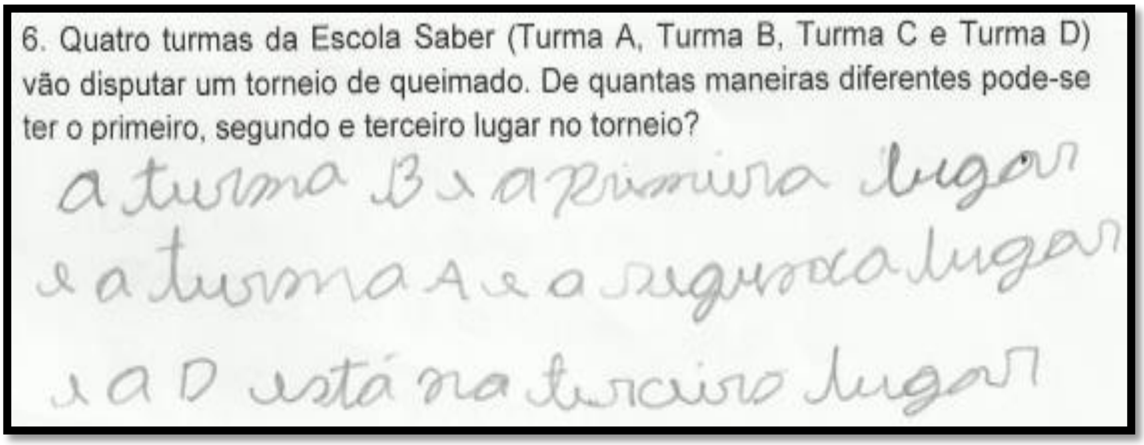

2. Quatro amigos (Felipe, Sandra, Henrique e Ana) vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

podem ser formado de 30, 10, 11, 12
14, 5, 4 e de outro tipom

Pontuação 0 – Erro
Figura 1: Resposta errada do Aluno 74 – Teste Tipo 4
(Permutação x Combinação).

A resposta do aluno não atende ao que foi solicitado no problema. Seu registro apresenta diversos números sem aparente relação com a situação combinatória. Resolve um problema de *combinação* com três etapas de escolha, cuja solução correta seria quatro possibilidades.

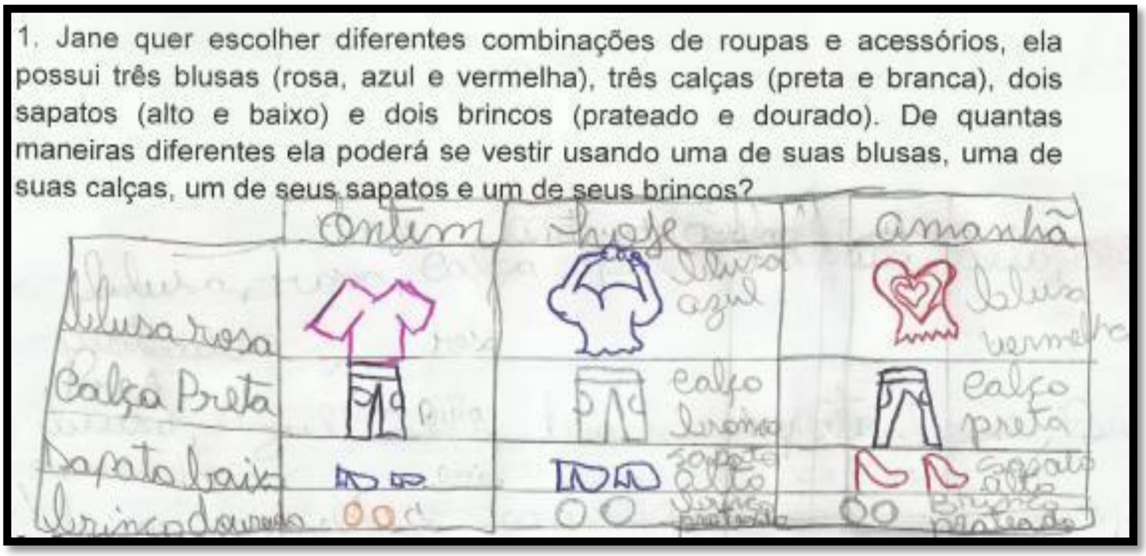
Na Figura 2, têm-se a solução de um aluno que apresentou uma única possibilidade de combinação (Turma B – 1º lugar, Turma A – 2º lugar e Turma D – 3º lugar), respondendo a um problema de *arranjo* com três etapas de escolha, cuja solução correta seria 24 possibilidades. O aluno demonstra compreender a situação e apresenta uma possibilidade correta, mas não evidencia a necessidade de esgotar todas as possibilidades, no caso, apresentando as 24 maneiras possíveis de se ter 1º, 2º e 3º lugar a partir de quatro elementos.


6. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

a turma B e a primeira lugar
e a turma A e a segunda lugar
e a D está na terceiro lugar

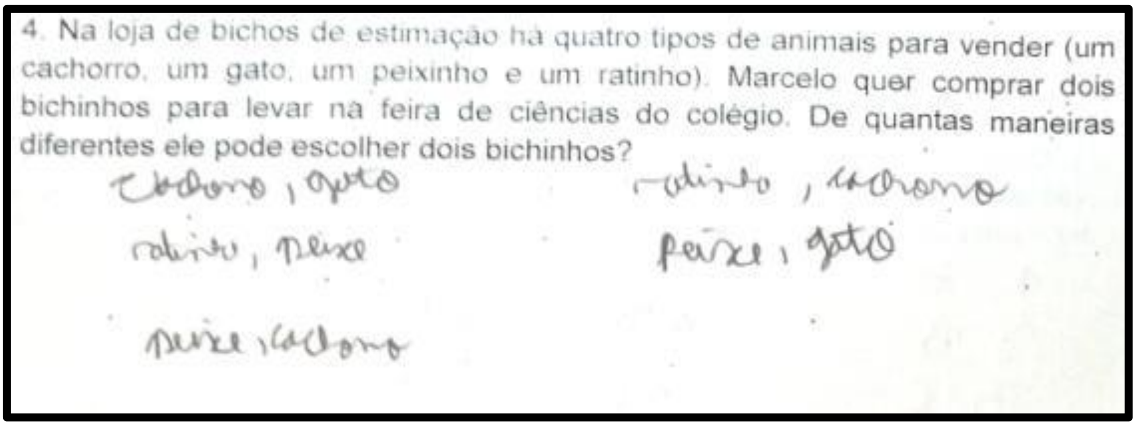
Pontuação 1 – Acerto parcial 1
(com apenas uma possibilidade apresentada)
Figura 2: Resposta incompleta do Aluno 31 – Teste Tipo 2
(Arranjo x Produto Cartesiano).

Na Figura 3, o aluno apresenta três possibilidades de combinação de roupas e acessórios (ontem, hoje e amanhã), utilizando a representação simbólica *desenho* para responder a um problema de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha, cuja solução correta seria 24 possibilidades. O aluno não se limita em apresentar uma possibilidade única, mas não evidencia perceber a necessidade de esgotar todas as possibilidades.


1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), três calças (preta e branca), dois sapatos (alto e baixo) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

Pontuação 2 – Acerto parcial 2
(apresentação de duas até a metade das possibilidades)
Figura 3: Resposta incompleta do aluno 23 – Teste Tipo 1
(Produto Cartesiano x Permutação).

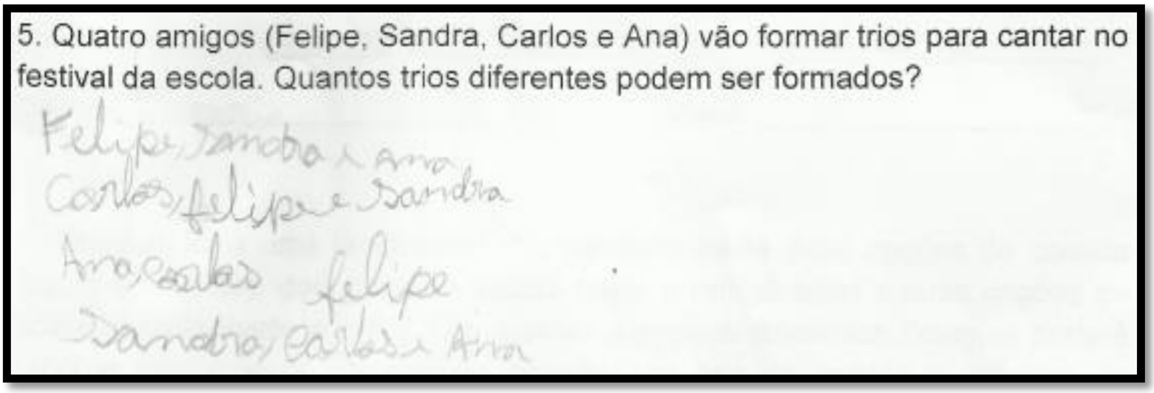
Na Figura 4, o aluno apresenta cinco possibilidades de combinar os animais que poderão ser comprados, utilizando a representação simbólica *listagem* para responder a um problema de *combinação* com duas etapas de escolha, cuja solução correta seria seis possibilidades. O aluno não se contenta em apresentar poucos casos, mas não há evidência de compreensão de que a resolução só será completa quando todas as possibilidades forem consideradas.


4. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

cachorro, gato   ratinho, cachorro
ratinho, peixe   peixe, gato
peixe, cachorro

Pontuação 3 – Acerto parcial 3
(com mais da metade das possibilidades apresentadas)
Figura 4: Resposta incompleta do Aluno 99 – Teste Tipo 5
(Arranjo x Combinação).

O aluno que respondeu ao problema de *arranjo* com três etapas de escolha da Figura 5 apresenta todas as possibilidades de combinar os amigos para formar trios, utilizando a representação simbólica *listagem* para solucionar o problema de forma correta. Houve, nesse caso, preocupação do aluno em apresentar todos os casos possíveis.


5. Quatro amigos (Felipe, Sandra, Carlos e Ana) vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

Felipe, Sandra e Ana
Carlos, felipe e Sandra
Ana, carlos e felipe
Sandra, Carlos e Ana

Pontuação 4 – Acerto Total
Figura 5: Resposta correta do Aluno 112 – Teste Tipo 6
(Produto Cartesiano, Combinação e Arranjo)

Ao todo, verificou-se que 24 alunos responderam ao teste Tipo 1; 25 alunos responderam ao teste Tipo 2; 16 alunos responderam ao teste Tipo 3; 21 alunos responderam ao teste Tipo 4; 22 alunos responderam ao teste Tipo 5; e 20 alunos responderam ao teste Tipo 6. Dessa forma, no total, houve a participação de 128 alunos do 6º ano.

A média de pontos em cada um dos testes pode ser observada na Tabela 1.

Tabela 1: Média de pontos em cada tipo de teste

TIPO DE TESTE	COMPARAÇÃO	TOTAL DE PONTOS POSSÌVEIS	MÉDIA
1	PC X P	6 X 4 = 24	18,04
2	PC X A	6 X 4 = 24	12,32
3	PC X C	6 X 4 = 24	19,56
4	C X P	6 X 4 = 24	16,75
5	C X A	6 X 4 = 24	10,77
6	Etapas de escolha	8 X 4 = 32	27,35

PC = PRODUTO CARTESIANO P = PERMUTAÇÃO C = COMBINAÇÃO A= ARRANJO

Nos testes Tipo 1, 2, 3, 4 e 5, como comparavam dois tipos de problemas e cada um apresentava duas, três e quatro etapas de escolha, haviam seis problemas. O total de pontos nesses testes era 24, uma vez que a pontuação máxima para cada um dos seis problemas era quatro.

Já no teste Tipo 6, que buscou comparar as etapas de escolha dentro do mesmo tipo de problema, foram observados os tipos de problema que se adequavam ao objetivo proposto, que no caso seriam *produto cartesiano*, *combinação* e só duas e três etapas de *permutação*. Sendo assim, o teste Tipo 6 apresentou oito problemas, três problemas de *produto cartesiano*, três de *combinação* e dois de *permutação*. A pontuação máxima que um aluno poderia alcançar em um problema era quatro, se apresentasse acerto total, portanto, a pontuação máxima possível nesse tipo de teste era 32.

Como o quantitativo de alunos variou de um tipo de teste para outro e a quantidade de problemas não foi a mesma em todos os testes, Vega (2014) transformou os dados coletados em percentuais para que a comparação entre os testes fosse mais bem visualizada. Dessa forma, o percentual médio de acertos no teste Tipo 1 foi de 74%, no teste Tipo 2 foi 51%, no teste Tipo 3 foi 80%, no teste Tipo 4 foi 74%, no teste Tipo 5 foi 44% e no teste Tipo 6 foi de 85%. O percentual de acerto da maioria dos testes foi acima de 70%, como foram nos testes Tipo 1, 3, 4 e 6. Somente os testes Tipo 2 e 5 apresentaram um percentual de ordem de grandeza diferente, 51% e 44% respectivamente.

Primeiramente, os dados foram organizados em categorias, conforme a resposta apresentada pelo aluno em cada problema, seguido de análises por meio de provas estatísticas, com uso do programa *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS.

Pode-se constatar, através de análises sobre os diversos tipos de testes, que, tanto através da prova paramétrica de amostras independentes como da prova paramétrica ANOVA com post hoc Tukey, que ao ser comparado, o teste Tipo 2 apresenta diferenças significativas de desempenho com todos os testes, menos com o teste Tipo 5. Isso porque, ambos apresentaram baixos desempenhos. Essa diferença entre os testes pode ser justificada pelo número total de possibilidades dos problemas, visto que, os testes Tipo 2 e 5 comparam problemas de *arranjo* com os demais problemas e os problemas de *arranjo* com quatro etapas de escolha possuem resultado fixo em 120 possibilidades. Dessa forma, concluiu Vega (2014), o elevado valor no total das possibilidades desses tipos de problemas que foram comparados nos testes Tipo 2 e 5 pode ter gerado dificuldades no desempenho dos alunos.

Foram observadas diferenças significativas entre desempenhos nos testes Tipo 2 e Tipo 1 ($F(4,108) = -5,72$; $p = 0,005$). No teste Tipo 1 comparou-se o desempenho em problemas de *produto cartesiano* com o desempenho em problemas de *permutação* e no teste Tipo 2 foram comparados os desempenhos entre *produtos cartesianos* e *arranjos*. As diferenças significativas de desempenhos entre estes dois tipos de testes podem ser explicadas porque tanto os *produtos cartesianos* quanto os *arranjos* do teste Tipo 2 apresentavam maior número de possibilidades, quando comparado ao total de possibilidades dos problemas de *produto cartesiano* e *permutação* do teste Tipo 1.

Também foram observadas diferenças de desempenho entre o teste Tipo 2 e o teste Tipo 3 ($F(4,108) = -7,24$; $p = 0,001$). No teste Tipo 2 foram comparados *produtos cartesianos* e *arranjos,* enquanto que o teste Tipo 3 comparou os desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* com *combinação.* As diferenças significativas podem ser explicadas, novamente, pelo elevado número de possibilidades apresentados pelos problemas do teste Tipo 2.

Houve diferença significativa também quando se comparou os desempenhos nos testes Tipo 2 e Tipo 4 ($F(4,108) = -4,63$; $p = 0,049$). As comparações feitas no teste Tipo 4 foram entre os desempenhos nos problemas de *combinação* e *permutação* que apresentam total de possibilidades menor que nos problemas de *produto cartesiano* e *arranjo.*

Não foram observadas diferenças significativas de desempenho entre os testes Tipo 2 e Tipo 5 ($F(4,108) = 1,55$; $p = 0,880$), pois em ambos foram comparados problemas de *arranjo*, ora com *produto cartesiano*, no teste Tipo 2, ora com *combinação*, no teste Tipo 5.

Outro teste que apresentou baixo percentual de desempenho foi o teste Tipo 5, apresentando média de acertos de 10,77 pontos, quando a maior pontuação possível poderia ser de 24 pontos, sendo a mais baixa de todos os testes. Esse baixo desempenho pode estar associado ao elevado total de possibilidades presente nos problemas com quatro etapas de escolha, visto que, estes problemas apresentaram soluções de 120 e 126 possibilidades, para os problemas de *arranjo* e *combinação*, respectivamente. Não é possível diminuir o número total de possibilidades nos problemas de *arranjo*, visto que seus resultados são fixos de acordo com suas etapas de escolha, como já mencionado anteriormente.

De acordo com Vega (2014), esses dados reforçam o que foi observado nos estudos de Moro e Soares (2006), Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), os quais relacionam o melhor desempenho dos alunos aos resultados dos problemas que apresentam uma menor quantidade de possibilidades. Assim sendo, os problemas com grandeza numérica elevada são considerados mais difíceis e apresentam desempenho mais baixo e, dessa forma, o resultado observado no teste Tipo 5 era esperado.

Ao se comparar o desempenho no teste Tipo 5 com os demais testes, verificou-se haver algumas diferenças significativas. Através de uma análise de variância (ANOVA), com post hoc Tukey, comparou-se o desempenho no teste Tipo 5 com o teste Tipo 1 ($F(4,108) = -7,27$; $p < 0,001$), depois foi confrontado com o teste Tipo 3 ($F(4,108) = -8,79$; $p < 0,001$), e, ainda, comparou-se com o teste Tipo 4 ($F(4,108) =$ -

6,18; p = 0,004), e em todas essas comparações houve diferença significativa de desempenhos. Como o teste Tipo 5 e o teste Tipo 2 apresentam problemas de *arranjo* em suas comparações, diferença significativa de desempenho não foi observada entre os dois tipos de teste ($F(4,108) = -1,55$; $p = 0,880$).

DESEMPENHO POR TIPOS DE PROBLEMA E POR ETAPAS DE ESCOLHA

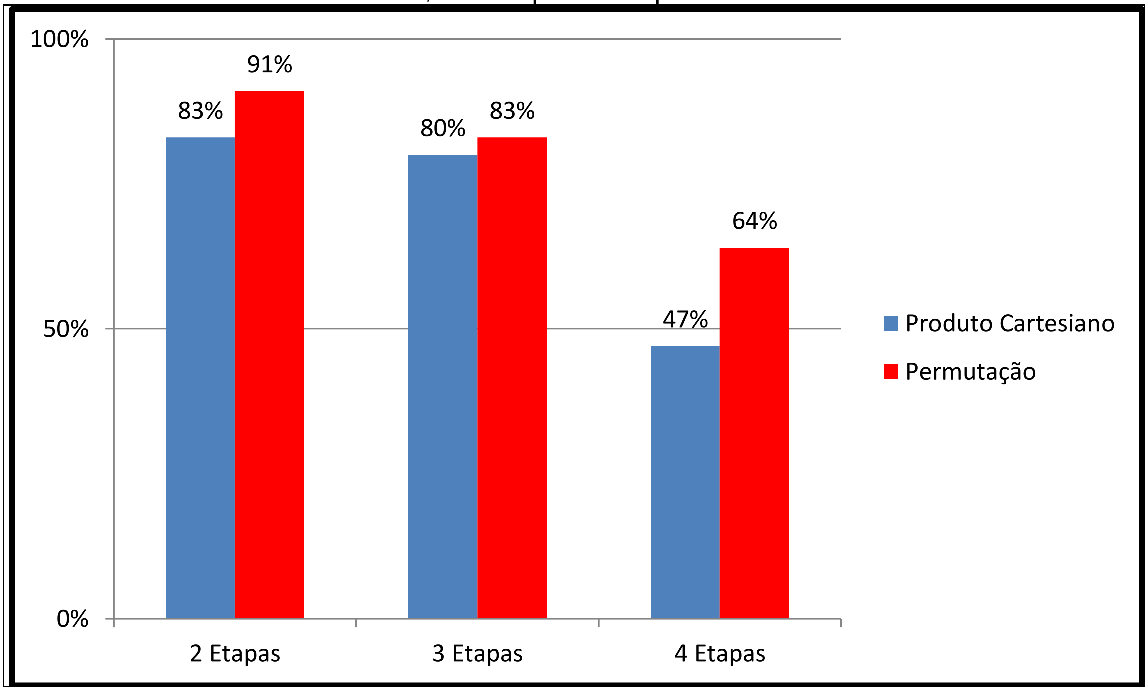
Os resultados serão apresentados pela ordem de comparação de cada teste, buscando primeiramente, comparar os desempenhos em problemas de *produto cartesiano* com todos os demais tipos de problema, visto que, os problemas de *produto cartesiano* são apresentados explicitamente aos alunos no Ensino Fundamental, enquanto que, os demais problemas, como, *arranjo*, *combinação* e *permutação*, somente são trabalhados explicitamente com os alunos no Ensino Médio, em geral no segundo ano.

O primeiro teste foi assim intitulado, por trazer a comparação mais instigante dessa pesquisa. Isso porque, em estudos anteriores, os problemas de *produto cartesiano* eram tidos como os mais fáceis e os de *permutação*, eram considerados mais difíceis por alunos nessa faixa etária (10, 11 anos). Dessa forma, o teste Tipo 1 comparou desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* com *permutação*, o teste Tipo 2 comparou *produto cartesiano* com *arranjo* e o teste Tipo 3, comparou *produto cartesiano* com *combinação*. Já no teste Tipo 4, a comparação foi feita com os problemas de *combinação* e *permutação* e o teste Tipo 5 comparou os problemas de *combinação* e *arranjo*. O objetivo da comparação desses testes era visualizar se há diferença de desempenho entre um problema e outro, quando mantidas constantes as etapas de escolha.

O DESEMPENHO EM PROBLEMAS DE *PRODUTO CARTESIANO* E *PERMUTAÇÃO* COM DUAS, TRÊS E QUATRO ETAPAS DE ESCOLHA

Observando os resultados do teste Tipo 1, Vega (2014) verificou que o desempenho dos alunos foi superior nos problemas com duas etapas de escolha e que há uma decrescente queda nos percentuais de acertos parciais e totais quando se observa os problemas com três e quatro etapas de escolha. No Gráfico 1 estes resultados podem ser observados, tanto para os problemas de *produto cartesiano* quanto para os de *permutação*.

Gráfico 1: Percentuais de acerto nos problemas de *produto cartesiano* e de *permutação*, com duas, três e quatro etapas de escolha



Quando se observa as etapas de escolha é nítido que os problemas com mais etapas de escolha são mais difíceis de serem resolvidos do que os problemas com menos etapas, isso porque, o percentual do desempenho dos alunos nos problemas com quatro etapas de escolha é menor que o percentual do desempenho com duas e três etapas. Há uma queda decrescente entre os desempenhos em duas, três e quatro etapas de escolha.

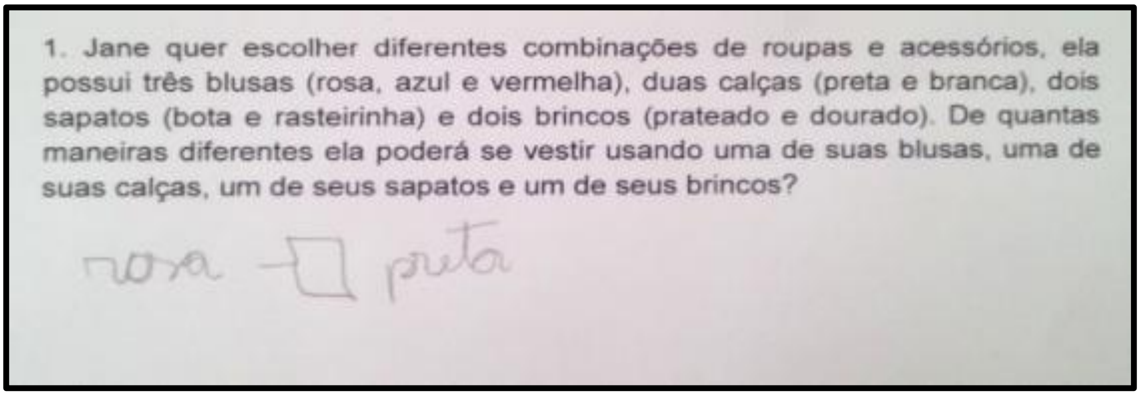
Os desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* e *permutação* foram comparados no teste Tipo 1 e, a partir do gráfico, é possível visualizar que nos problemas de *permutação*, em todas as etapas, obteve-se um percentual de acerto maior que os problemas de *produto cartesiano*, mas somente nos problemas com quatro etapas de escolha foi possível verificar uma maior diferença entre os tipos de problema. Esses resultados sinalizam em sentido contrário ao de estudos anteriores

(PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011; CORREA e OLIVEIRA, 2011; BARRETO, 2012; AZEVEDO, 2013) que apontaram *permutação* como mais difícil que *produto cartesiano*.

Através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares foi verificado que os problemas de *permutação* foram significativamente mais fáceis de serem resolvidos do que os problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha ($t\ (23) = 2{,}713$; $p = 0{,}012$). Não foram observadas diferenças estatisticamente significativas em desempenho com duas ou três etapas de escolha, conforme será apresentado a seguir.

A partir desses resultados, Vega (2014) afirma que é possível reforçar a hipótese de que estudos anteriores apontavam que os problemas de *permutação* eram mais difíceis de serem respondidos por alunos dessa faixa etária, isso porque, estes estudos avaliaram, à luz do tripé de Vergnaud (1996), que os invariantes (propriedades e relações), de cada tipo de situação combinatória específica, podem ter influência nos desempenhos dos estudantes. Contudo, estes estudos, não observaram as etapas de escolha presentes nos problemas combinatórios, nos quais, *produto cartesiano* sempre apresentava duas etapas e *permutação* sempre apresentava três ou quatro etapas de escolha. Uma vez controlado o número de etapas de escolha, *permutação* não necessariamente é o tipo de problema combinatório de mais difícil compreensão.

Através de uma análise dos erros cometidos pelos alunos nos problemas de *produto cartesiano* com quatro etapas de escolha, foi verificado que, dos sete alunos que erraram esse problema, quatro deixaram-no em branco e três não combinaram todas as etapas. Listaram somente duas etapas, revelando assim que, quanto maior o número de etapas de um problema, maior o grau de dificuldade que ele apresenta, como pode ser visto na Figura 6.



1. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui três blusas (rosa, azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

rosa preta

Figura 6: Resposta incorreta do Aluno 16 ao não considerar todas as etapas de escolha de um problema de produto cartesiano no teste Tipo 1

Percebe-se que o aluno começa a listar um tipo de blusa, no caso rosa, e a combina com um tipo de calça, no caso preta, contudo, não continua a lista das demais peças que precisam ser combinadas, como o sapato e os brincos.

No problema de *permutação* com quatro etapas de escolha, têm-se quatro elementos que precisam ser permutados, já no problema de *produto cartesiano* são quatro conjuntos de elementos que precisam ser combinados, tornando a possibilidade de erro no problema de *produto cartesiano* superior, como foi o que ocorreu. Na *permutação,* torna-se mais fácil lembrar-se de quatro elementos do que considerar quatro diferentes conjuntos de escolhas e todos os seus devidos elementos em *produto cartesiano*.

Também foi observado que os alunos apresentaram dificuldade nos problemas de *permutação* com maior número de etapas de escolha (quatro), pois quando utilizavam todos os elementos dispostos no problema, não conseguiam encontrar todas as possíveis permutações dos quatro elementos. Entretanto, o percentual de acertos foi maior em *permutações* pelo fato dos alunos tenderem a considerar todos os quatro elementos e utilizarem alguma sistematização no levantamento das permutações possíveis, já nos *produtos cartesianos* alguns dos elementos tendiam a ser esquecidos.

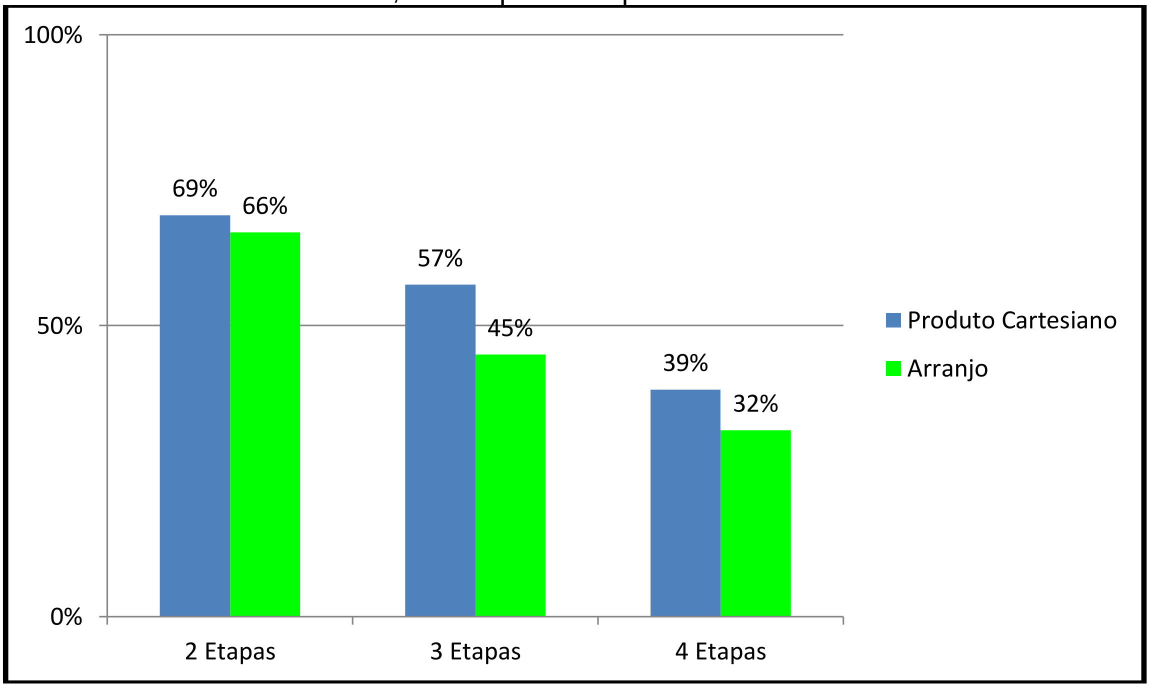
Quando comparados os desempenhos em duas e três etapas de escolha nos problemas de *produto cartesiano* e *permutação* não houve nenhuma diferença significativa. Os desempenhos em *produto cartesiano* com duas etapas de escolha e em *permutação* com duas etapas, ao serem comparados, não apresentaram diferença estatisticamente significativa a 0,05 (t (23) = - 1,356; p = 0,188). Da mesma forma, os desempenhos em *produto cartesiano* e em *permutação*, ambos com três etapas de escolha, ao serem comparados, também não apresentam diferença significativa na prova paramétrica t-teste de amostras em pares ($t\ (23) = -0{,}365$; $p = 0{,}718$). Esses resultados evidenciam que com poucas etapas de escolha (duas ou três) esses dois tipos de problemas se equiparam em termos de facilidade para os alunos.

O DESEMPENHO EM PROBLEMAS DE *PRODUTO CARTESIANO* E *ARRANJO* COM DUAS, TRÊS E QUATRO ETAPAS DE ESCOLHA

Comparou-se também os desempenhos em problemas de *produto cartesiano* e *arranjo* no teste Tipo 2, como pode ser visto no Gráfico 2.

Estudos anteriores (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011; CORREA e OLIVEIRA, 2011; BARRETO, 2012; AZEVEDO, 2013) mostraram que os problemas de *produto cartesiano* são mais fáceis que os problemas de *arranjo*. Com a comparação feita no teste Tipo 2 foi possível testar a hipótese de que essas diferenças também podem ser influenciadas pelo número de etapas de escolha.

Gráfico 2: Percentuais de acerto nos problemas de *produto cartesiano* e de *arranjo*, com duas, três e quatro etapas de escolha



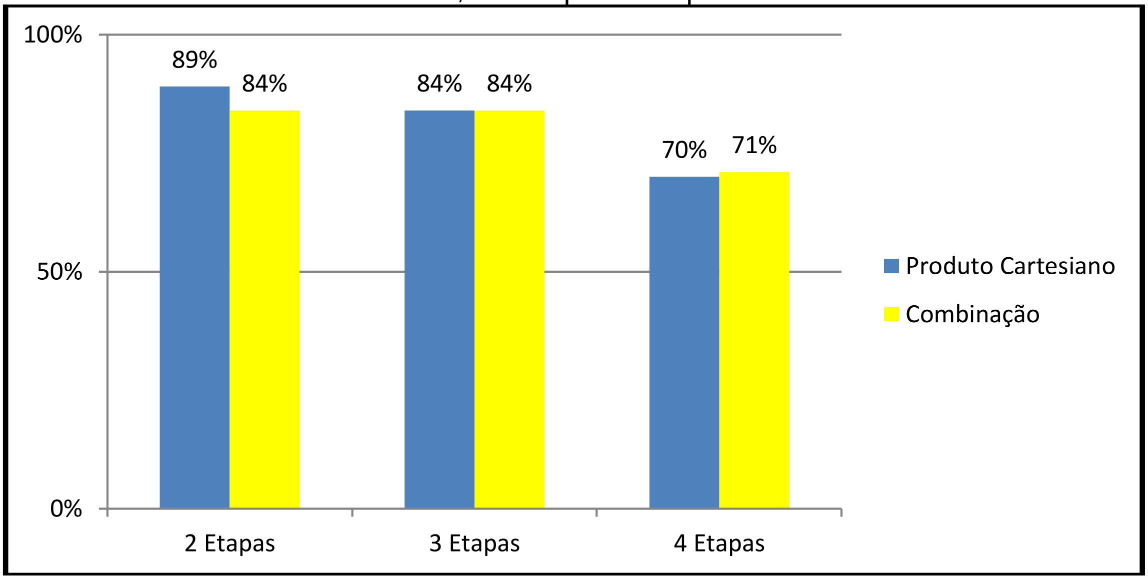
Visualiza-se que os problemas de *produto cartesiano*, em todas as etapas, obtiveram um percentual de acerto maior do que o obtido em problemas de *arranjo*. Contudo, essa diferença nos desempenhos, entre um tipo de problema e outro, não é significativa, de acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares. Tanto nos problemas com duas etapas de escolha (t (24) = 0,345; p = 0,733), como nos problemas com três etapas de escolha (t (24) = 1,953; p = 0,063) e também na comparação dos problemas com quatro etapas de escolha (t (24) = 1,098; p = 0,283), não se apresentaram diferenças significativas de desempenho entre os problemas de *produto cartesiano* e *arranjo* em nenhuma das etapas. Isso evidencia que controlados os números de etapas de escolha, esses dois tipos de problemas se equiparam em nível de dificuldade para estudantes do Ensino Fundamental, diferindo-se dos resultados de estudos anteriores (PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011; CORREA e OLIVEIRA, 2011; BARRETO, 2012; AZEVEDO, 2013), nos quais, não houve controle de número de etapas de escolha.

O DESEMPENHO EM PROBLEMAS DE *PRODUTO CARTESIANO* E *COMBINAÇÃO* COM DUAS, TRÊS E QUATRO ETAPAS DE ESCOLHA

O teste Tipo 3 comparou os desempenhos em problemas de *produto cartesiano* e *combinação*, como pode ser visto no Gráfico 3. Nesse teste a média de acertos foi de 19,56 pontos dentre possíveis 24, uma das médias mais altas, se comparada aos demais testes. Essa elevada média pode estar associada ao total de possibilidades possíveis de serem combinadas em cada tipo de problema, visto que a grandeza numérica desse tipo de teste não ultrapassou uma dezena.

De acordo com os estudos de Moro e Soares (2006), Pessoa e Borba (2009) e Pessoa e Santos (2011), o aluno tende a acertar mais os problemas que estão associados a resultados com menor quantidade de possibilidades. As pesquisas dessas autoras revelaram que são considerados mais difíceis os problemas que apresentam uma maior quantidade de possibilidades. Portanto, os problemas com baixa grandeza numérica são mais fáceis e os problemas com grandeza numérica elevada são considerados mais difíceis e apresentam desempenho mais baixo, já que os alunos utilizam procedimentos não formais – como a listagem – e fica mais difícil chegar a um número elevado de possibilidades por estes meios. A conclusão das pesquisas citadas acima é a mesma encontrada por Vega (2014).

Gráfico 3: Percentuais de acerto nos problemas de *produto cartesiano* e de *combinação*, com duas, três e quatro etapas de escolha

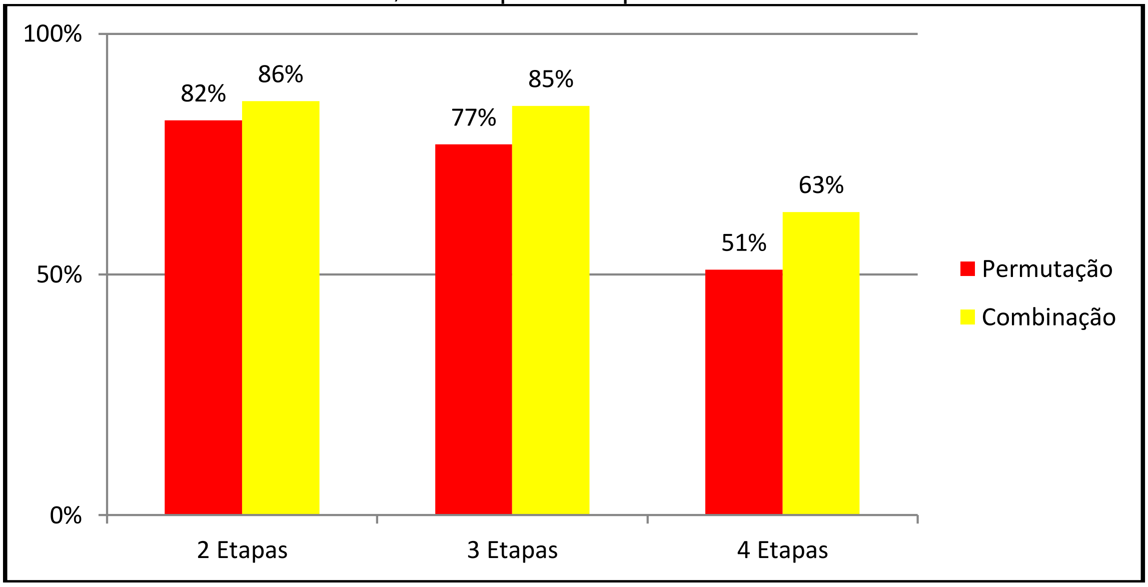


Não foram observadas diferenças significativas nas comparações de desempenho entre os problemas de *produto cartesiano* e *combinação*, revelando que há pouca diferença percentual entre um tipo de problema e outro. De acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares, tanto em duas etapas de escolha (t (24) = 0,345; p = 0,733), como em três etapas (t (24) = 1,953; p = 0,063) e em quatro etapas de escolha (t (24) = 1,098; p = 0,283), não foram observadas diferenças significativas de desempenho entre problemas de *produto cartesiano* e combinação, quando as etapas de escolha foram controladas.

O DESEMPENHO EM PROBLEMAS DE *COMBINAÇÃO* E *PERMUTAÇÃO* COM DUAS, TRÊS E QUATRO ETAPAS DE ESCOLHA

O teste Tipo 4 revelou, de modo geral, um desempenho melhor nos problemas de *combinação* quando comparados aos problemas de *permutação*, como pode ser observado no Gráfico 4.

Gráfico 4: Percentuais de acerto nos problemas de permutação e de combinação, com duas, três e quatro etapas de escolha



De acordo com a prova paramétrica t-teste de amostras em pares há diferença significativa de desempenho entre um tipo de problema e outro. Essa diferença foi verificada somente nos problemas com três e quatro etapas de escolha. Não se observou diferença significativa de desempenho entre os problemas com duas etapas de escolha (t (20) = - 0,730; p = 0,474). Com três etapas (t (20) = - 3,627; p = 0,002) e com quatro etapas de escolha (t (20) = - 2,750; p = 0,012), foi observado um melhor desempenho, estatisticamente significativo, com relação aos problemas de *combinação*.

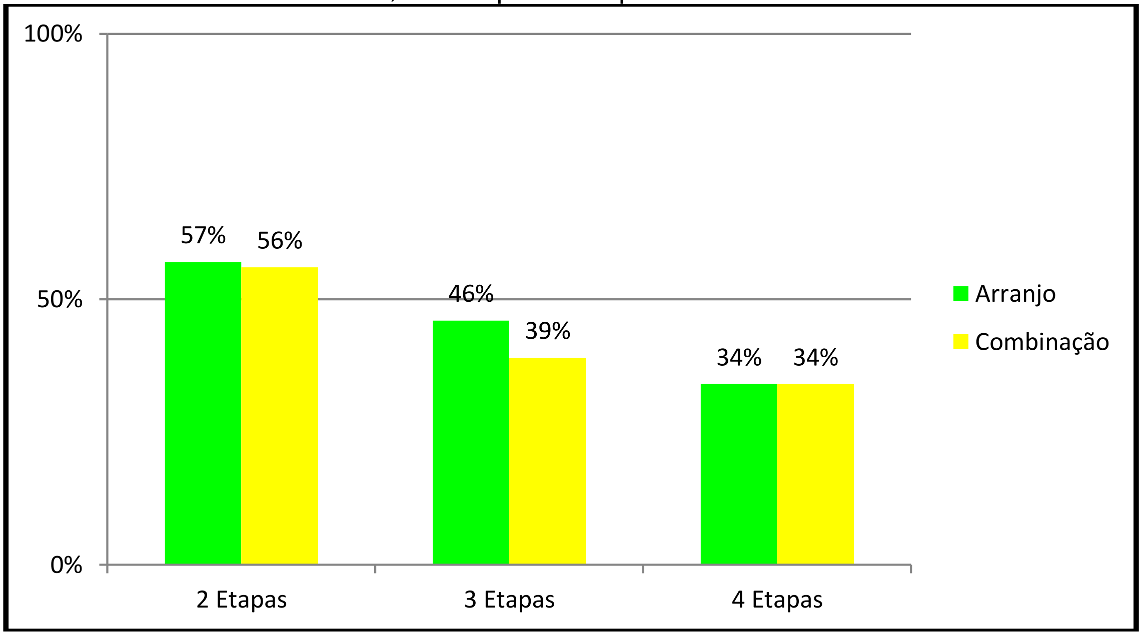
Os problemas de *combinação* podem apresentar essa facilidade por relacionar-se diretamente à baixa grandeza numérica presente nesses problemas. Mesmo sabendo que a diferença entre os resultados de *permutação* e de *combinação* não são grandes, pode-se associar essa pequena variação ao benefício obtido nos desempenhos em um dos tipos de problemas. Essa mesma diferença de desempenho entre os problemas de *combinação* e *permutação* foi verificada nos estudos de Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), Barreto (2012) e Azevedo (2013), nos quais, *permutação* é o problema que apresenta os mais baixos desempenhos.

Durante a elaboração de cada tipo de teste, Vega (2014) preocupou-se em tentar igualar ou deixar similares os resultados de cada tipo de problema, contudo, como os problemas de *permutação* têm seus resultados fixos de acordo com suas etapas de escolha e os problemas de *combinação* não possuem tanta flexibilidade em suas combinações, como já descrito anteriormente, fez-se necessário buscar um valor similar para cada etapa. Os problemas de *combinação* apresentaram como resultados 3, 4 e 15 possibilidades em duas, três e quatro etapas respectivamente, enquanto que os problemas de *permutação* tinham como solução 2, 6 e 24 possibilidades em suas resoluções para duas, três e quatro etapas de escolha respectivamente. Essa mínima diferença de duas combinações nos problemas de três etapas e a diferença de nove possibilidades para os problemas com quatro etapas de escolha podem ter sido suficientes para tornar os problemas de *combinação* mais fáceis de serem resolvidos do que os problemas de *permutação*.

O DESEMPENHO EM PROBLEMAS DE *COMBINAÇÃO* E *ARRANJO* COM DUAS, TRÊS E QUATRO ETAPAS DE ESCOLHA

No teste Tipo 5 comparou-se o desempenho nos problemas de *arranjo* e *combinação,* como pode ser visto no Gráfico 5, que apresenta os problemas de *arranjo* com um percentual de acerto maior nas etapas dois e três. Já nos problemas com quatro etapas de escolha, o desempenho é igual entre os problemas de *arranjo* e de *combinação*. Porém, analisou-se a significância dessa diferença, entre o desempenho em um tipo de problema e outro através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, não revelando grau de significância, em todas as etapas de escolha comparadas. (Duas etapas de escolha: t (21) = 0,196; p = 0,847; Três etapas de escolha: t (21) = 0,880; p = 0,389; Quatro etapas de escolha: t (21) = 0,000; p = 1,000).

Gráfico 5: Percentuais de acerto nos problemas de *arranjo* e de *combinação*, com duas, três e quatro etapas de escolha

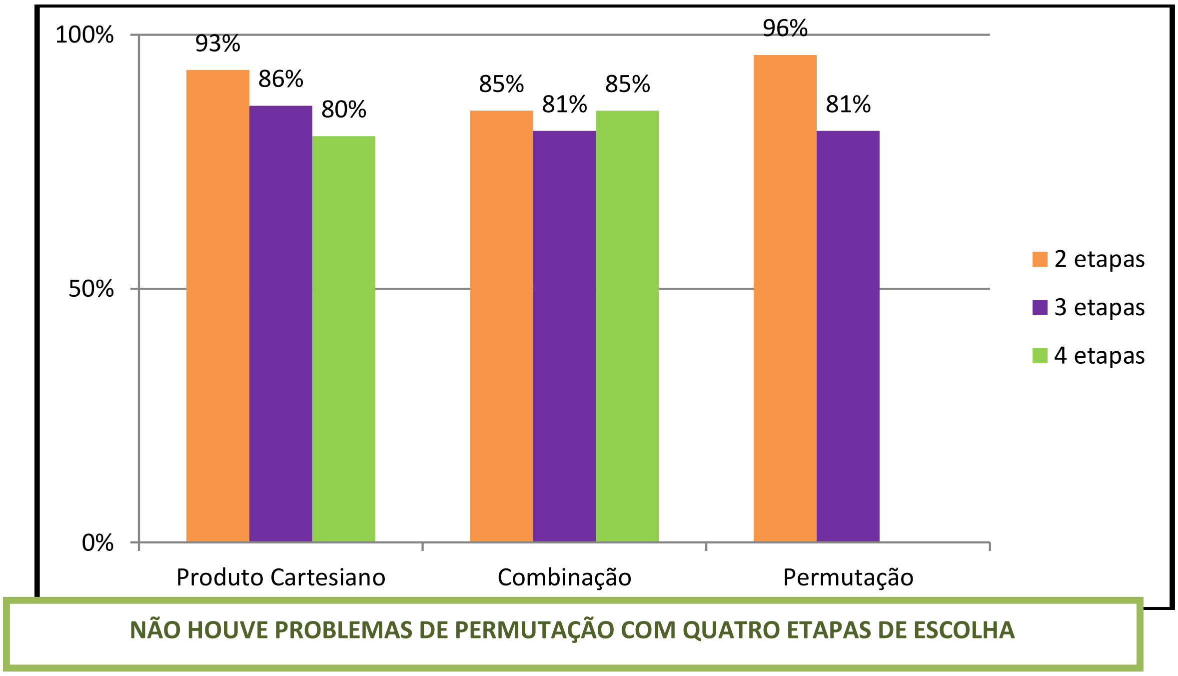


Dessa forma, problemas de *arranjo* e de *combinação,* ao serem respondidos pelos alunos apresentam o mesmo grau de dificuldade, no qual não há um tipo de problema que seja considerado mais fácil ou mais difícil que o outro.

OS DESEMPENHOS POR ETAPAS DE ESCOLHA

Após considerar todas as comparações de desempenho entre os diferentes tipos de testes e entre os diversos tipos de problemas, Vega (2014) analisou a influência das etapas de escolhas num mesmo problema, mantendo igual ou similar o total de possibilidades em todas as etapas. O teste Tipo 6 controlou os resultados dos problemas para que, tanto no problema com duas etapas de escolha, como no problema com três e quatro etapas, o total de possibilidades fosse o mesmo, ou similar. Assim, seria possível observar o efeito das etapas de escolha com o controle das grandezas numéricas. Nos testes anteriores, o número de etapas de escolha tinha números de possibilidades semelhantes ao longo dos problemas e agora dentro de um mesmo problema havia o mesmo, ou muito semelhante número de possibilidades. Os resultados obtidos podem ser vistos no Gráfico 6.

Gráfico 6: Percentuais de acerto em cada etapa de escolha nos problemas de *produto cartesiano, combinação* e *permutação*



Analisando primeiramente os problemas de *produto cartesiano*, é possível, verificar um decrescente desempenho à medida que as etapas de escolha aumentam, tornando claro que, responder problemas com duas etapas de escolha é mais fácil que responder problemas com três etapas e estes, por sua vez, são mais facilmente resolvidos do que problemas com quatro etapas de escolha. Os problemas de *produto cartesiano* apresentaram resultado oito, em todas as etapas de escolha, portanto, com o número de possibilidades controlado, há evidências de que o número de etapas de escolha influenciou o desempenho dos alunos.

Por meio da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, verificou-se diferença significativa entre os desempenhos nos problemas de *produto cartesiano* de duas etapas e quatro etapas (t (19) = 3,584; p = 0,002) e entre os problemas de três etapas e quatro etapas (t (19) = 2,517; p = 0,021). Entretanto, não foram observadas diferenças significativas nos desempenhos entre problemas de duas e três etapas de escolha (t (19) = 1,831; p = 0,083).

A partir desses dados é possível verificar a influência das etapas de escolha no problema de *produto cartesiano*, tido como um dos tipos de problemas mais fáceis de serem resolvidos, de acordo com Pessoa e Borba (2009), Pessoa e Santos (2011), Correa e Oliveira (2011), Barreto (2012) e Azevedo (2013), nos quais, *produto cartesiano* é o problema que apresenta os melhores desempenhos.

Observando os problemas de *combinação*, que apresentaram totais de possibilidade 6, 4 e 5 em duas, três e quatro etapas, respectivamente, não foram verificadas diferenças significativas comparando cada uma das etapas, isso porque as diferenças percentuais entre uma etapa e outra são pequenas. Através da prova paramétrica t-teste de amostras em pares não foi verificada diferenças significativas de desempenho entre duas e três etapas de escolha ($t\ (19) = 0{,}645$; $p = 0{,}527$), duas e quatro etapas ($t\ (19) = 0{,}719$; $p = 0{,}481$), e três e quatro etapas de escolha ($t\ (19) = 0{,}000$; $p = 1{,}000$). Os problemas de *combinação* podem apresentar mais complexidade na natureza de seu tipo de problema (suas propriedades e relações), mas o nível de dificuldade é basicamente o mesmo, independente do número de etapas de escolha.

O mesmo foi verificado nos problemas de *permutação*, que apresentaram 2 e 6, como respostas para duas e três etapas de escolha. Como já explicado anteriormente, não foram apresentados problemas com quatro etapas de escolha, pois o valor do total de possibilidades não seria igual ou similar aos das outras etapas, portanto não atenderiam ao objetivo desse tipo de teste. Por essa mesma razão não foram controlados os problemas de *arranjo*, pela falta de flexibilidade de seus resultados em cada etapa de escolha.

Não houve diferenças significativas no desempenho dos alunos ao responder problemas de *permutação* com duas ou três etapas de escolha ($t\ (19) = 1{,}993$; $p = 0{,}061$). Portanto, nos problemas de *permutação*, o número de etapas de escolha não influenciou no desempenho, mas outras explicações também devem ser consideradas, como as propriedades e relações específicas de cada tipo de problema, bem como o número de etapas resultantes.

Depois de analisar os dados coletados, Vega (2014) também observou as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos para responder cada tipo de teste. Foram observadas essas estratégias em função do número de etapas de escolha, do tipo de problema e do número total de possibilidades.

ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO

Diversas estratégias foram utilizadas pelos alunos, por intermédio de representações simbólicas variadas, para solucionarem os problemas que lhes foram propostos. Algumas destas estratégias não possibilitaram o acerto total das possibilidades solicitadas nos problemas combinatórios, enquanto que outras foram eficazes e permitiram ao aluno obter a resposta correta à situação proposta.

O objetivo de Vega (2014) foi verificar a relação entre as estratégias de resolução utilizadas pelos alunos com o tipo de problema combinatório, bem como com as etapas de escolha, observando se os alunos variavam suas estratégias de acordo com o tipo de problema que resolvem – *arranjo*, *combinação*, *permutação* ou *produto cartesiano* – ou se variam as estratégias em função do número de etapas de escolha (dois, três ou quatro) da situação. Percebeu-se que não há relação entre um determinado tipo de problema e uma representação simbólica ou estratégia específica, como também não há relação direta entre estratégias utilizadas especificamente para duas, três ou quatro etapas de escolha.

Foi possível verificar que as estratégias variavam de acordo com cada aluno, ou seja, em geral, cada aluno usou a mesma representação simbólica e a mesma estratégia para responder todos os problemas de seu teste. Observou-se que 82% dos alunos utilizaram uma mesma representação simbólica e estratégia em todos os tipos de problema e em todas as etapas de escolha. Por exemplo, o aluno que iniciou o teste usando uma representação escrita como a listagem, tendia a utilizá-la em todos os problemas.

Vega (2014) observou que as estratégias mais utilizadas foram: cálculo (adição, subtração, multiplicação ou divisão), listagem, quadro, desenho e uso de fórmulas. A tendência era que o aluno escolhesse uma destas estratégias e a utilizasse em todos os problemas que resolveu, demonstrando assim, perceber que todos os problemas poderiam ser resolvidos da mesma maneira, visto que havia regularidades entre eles por serem todos problemas combinatórios.

De acordo com Pessoa e Borba (2009, p.28), os alunos podem apresentar as seguintes formas de resolução para os problemas combinatórios:

Realiza adição, subtração ou divisão, utilizando os valores apresentados no enunciado. A resposta, geralmente, é incorreta sem relação.

Desenha ou escreve possibilidades, podendo a resposta ser correta ou incorreta, havendo, ou não, o esgotamento de todas as possibilidades.

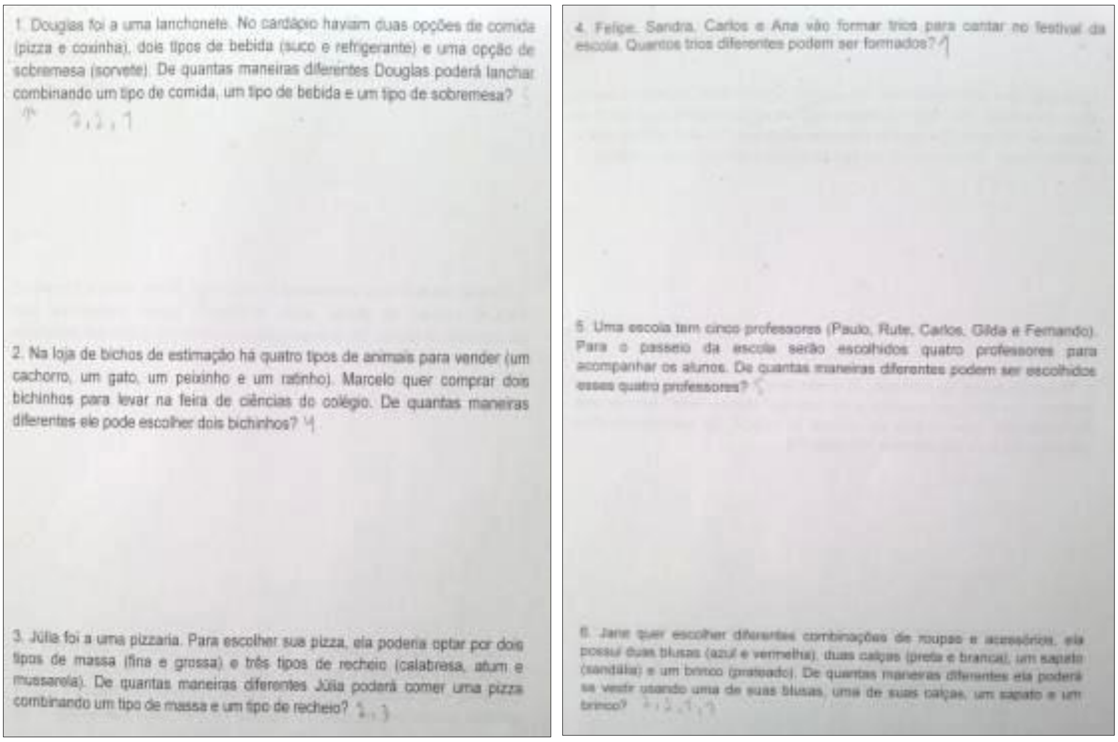
Relaciona o problema a um produto, podendo a multiplicação ser adequada ou inadequada.

Essas estratégias de resolução foram analisadas por Pessoa (2009) para classificar a variedade de respostas que os alunos utilizaram ao deparar-se com problemas combinatórios. A autora lista algumas das possíveis estratégias apresentadas pelos alunos, como: a não explicitação de um tipo de estratégia ou representação simbólica; adição ou subtração; desenho; árvore de possibilidades; diagrama ou quadro; listagem de possibilidades; multiplicação adequada ou inadequada; percepção de regularidade.

Nem todas as representações simbólicas classificadas pela autora citada foram encontradas no estudo de Vega (2014), contudo, com base nesses tipos de representações simbólicas, se buscou entre os estudantes, extratos das resoluções utilizadas ao responderem os diferentes tipos de testes.

Alguns alunos não explicitaram a estratégia utilizada, tipo de resposta que pode ser visualizado na Figura 7. Quando o aluno respondeu ao problema sem revelar o tipo de estratégia empregado para chegar ao total de possibilidades, ele, em geral, utilizou essa mesma forma de responder em todo teste.

O aluno, como pode ser visto na Figura 7, apresentou somente a resposta que considerou ser a certa, não apresentando nenhum tipo de cálculo, desenho ou listagem que indique o caminho percorrido para chegar ao resultado escrito, embora se possa deduzir que o aluno apenas registrou números citados nos enunciados dos problemas.



1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam duas opções de comida (pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e uma opção de sobremesa (sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?
2,2,1

2. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos? 4

3. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (fina e grossa) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio? 2,3

4. Felipe, Sandra, Carlos e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados? 1

5. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores? 5

6. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui duas blusas (azul e vermelha), duas calças (preta e branca), um sapato (sandália) e um brinco (prateado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um sapato e um brinco? 2,2,1,1

Figura 7: Respostas em geral incorretas do Aluno 58 – sem explicitação de estratégia

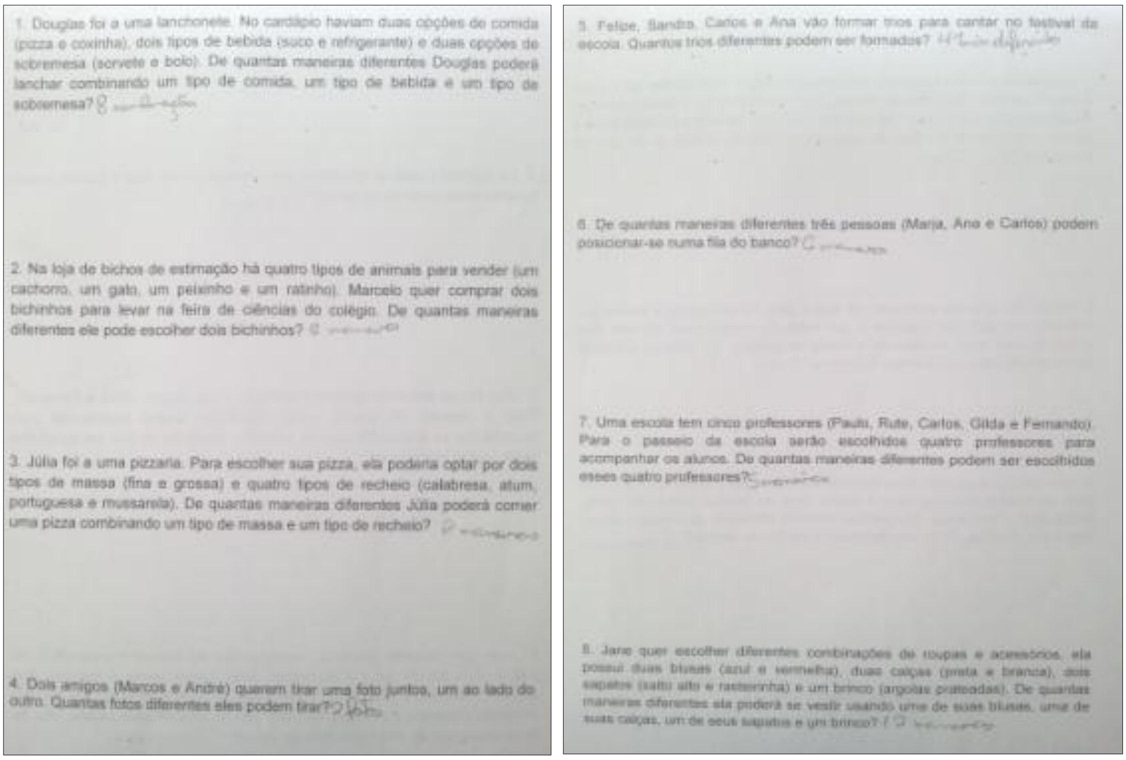
As respostas corretas aos problemas acima mostrados podem ser vistas no Quadro 3.

Quadro 3: Respostas aos problemas do teste Tipo 3.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Produto Cartesiano	3 etapas	4	2,2,1
2. Combinação	2 etapas	6	4
3. Produto Cartesiano	2 etapas	6	2,3
4. Combinação	3 etapas	4	1
5. Combinação	4 etapas	5	**5**
6. Produto Cartesiano	4 etapas	4	2,2,1,1

Dentre as respostas corretas, o aluno da Figura 7, apresentou acerto somente no problema de combinação com quatro etapas de escolha. Nos demais resultados, o aluno apresentou valores que não correspondem à totalidade de possibilidades dos problemas.

Para Vega (2014), muitos alunos podem tentar resolver os problemas que julgam fáceis através de cálculos mentais, ou por não dominarem o conhecimento necessário para resolver o problema através de uma representação escrita, ou por essa ser uma prática muito estimulada nas escolas e livros didáticos hoje em dia. Os resultados dos problemas da Figura 7 não corresponderam às respostas corretas esperadas, contudo outros alunos, não explicitaram a estratégia utilizada e obtiveram êxito em suas respostas, como pode ser visto, no exemplo da Figura 8.


1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam duas opções de comida (pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e duas opções de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

2. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

3. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (fina e grossa) e quatro tipos de recheio (calabresa, atum, portuguesa e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

4. Dois amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, um ao lado do outro. Quantas fotos diferentes eles podem tirar?

5. Felipe, Sandra, Carlos e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

6. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

7. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores?

8. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui duas blusas (azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (salto alto e rasteirinha) e um brinco (argolas prateadas). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco?

Figura 8: Respostas primordialmente corretas do Aluno 110 – sem explicitação de estratégia

Mesmo não explicitando a estratégia utilizada, o aluno acertou seis dos oito problemas apresentados no teste Tipo 6. Diferentemente da mera escolha de valores explicitados nos enunciados, o aluno parece ter efetuado alguns cálculos, e, em alguns casos, cálculos corretos.

No Quadro 4, é possível visualizar as respostas corretas aos problemas que foram revelados acima e a relação com a escrita respondida pelo aluno. É possível visualizar que o aluno acertou a maioria dos problemas propostos, errou somente nos problemas de *produto cartesiano* com duas e quatro etapas de escolha.

Quadro 4: Respostas aos problemas do teste Tipo 6.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Produto Cartesiano	3 etapas	8	**8**
2. Combinação	2 etapas	6	**6**
3. Produto Cartesiano	2 etapas	8	6
4. Permutação	2 etapas	2	**2**
5. Combinação	3 etapas	4	**4**
6. Permutação	3 etapas	6	**6**
7. Combinação	4 etapas	5	**5**
8. Produto Cartesiano	4 etapas	8	12

A explicitação, ou não, das estratégias utilizadas para responder aos problemas não é indício de que o aluno necessariamente errará ou acertará, pois no caso da Figura 8, o aluno obteve êxito na maioria dos problemas.

Outra estratégia de resolução de problemas apontada por Pessoa (2009) foi a utilização da adição ou subtração como cálculo para tentar responder ao problema proposto. Ao responder os problemas do teste Tipo 2, percebe-se que para o aluno da Figura 9 a escolha dos números que irão compor a adição são os mesmos sugeridos pelos problemas. Dessa forma, o aluno apresenta um cálculo incorreto, usando o algoritmo da adição para solucionar o problema.

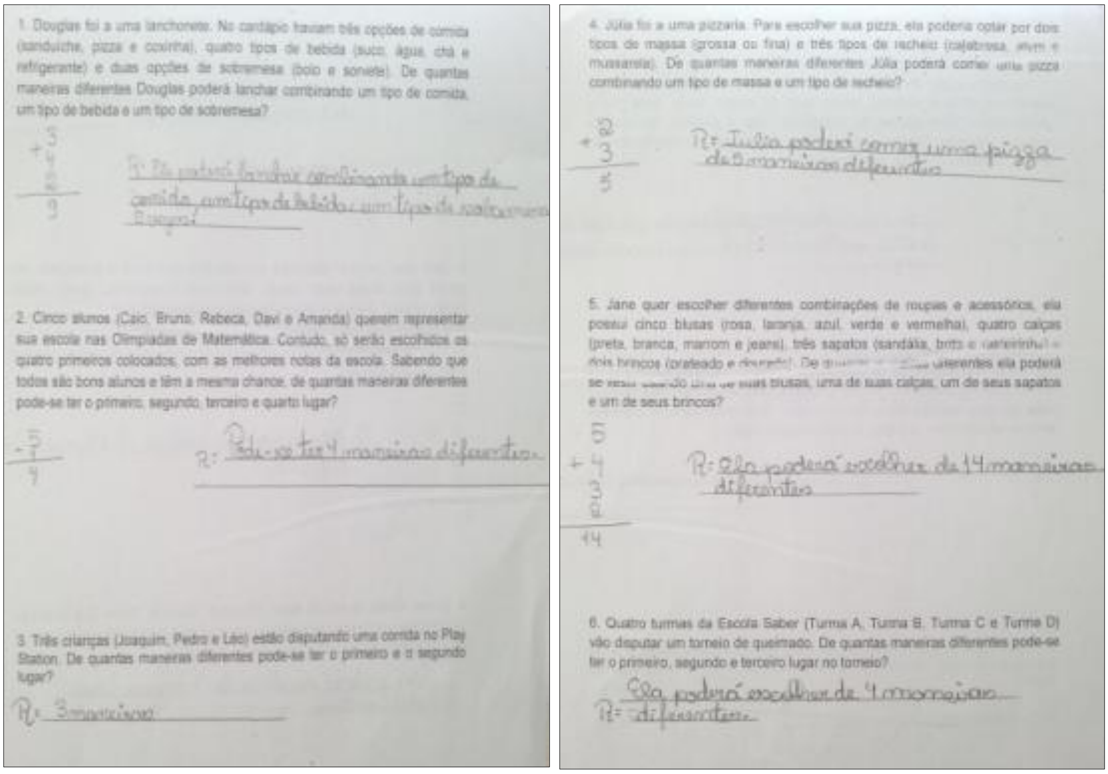


Figura 9: Respostas incorretas do Aluno 29 – com uso inadequado da adição ou subtração

De acordo com Vega (2014), quando um aluno utiliza a adição ou a subtração inadequada para responder aos problemas combinatórios, torna-se evidente sua falta de compreensão ao utilizar essas operações, visto que não há relação direta entre a resposta escrita e a adição direta dos números propostos no problema. É possível visualizar que em todas as questões, o aluno, não obteve êxito, visto que as respostas a esses problemas são respectivamente, 24, 120, 6, 6, 120 e 24.

Utilizar uma adição inadequada não é uma estratégia eficaz de resolução de problemas combinatórios. Contudo, em geral, quando o aluno desenha a resolução de seu problema, ele consegue obter acertos parciais e totais, por isso, empregar o desenho como estratégia de resolução demonstra, grande parte das vezes, que o aluno compreende o que é solicitado nos problemas. O interessante desse tipo de estratégia é que ela pode ser utilizada por estudantes de diferentes idades, desde os mais novos até os mais velhos, incluindo alunos do 6º ano, como exemplificado aqui. O estudo de Pessoa e Borba (2009) mostra que até alunos do Ensino Médio, utilizam desenhos na resolução de problemas combinatórios.

Através do desenho, visualizado na Figura 10, o Aluno 78 pôde obter êxito em quatro dos seis problemas presentes no teste Tipo 4.

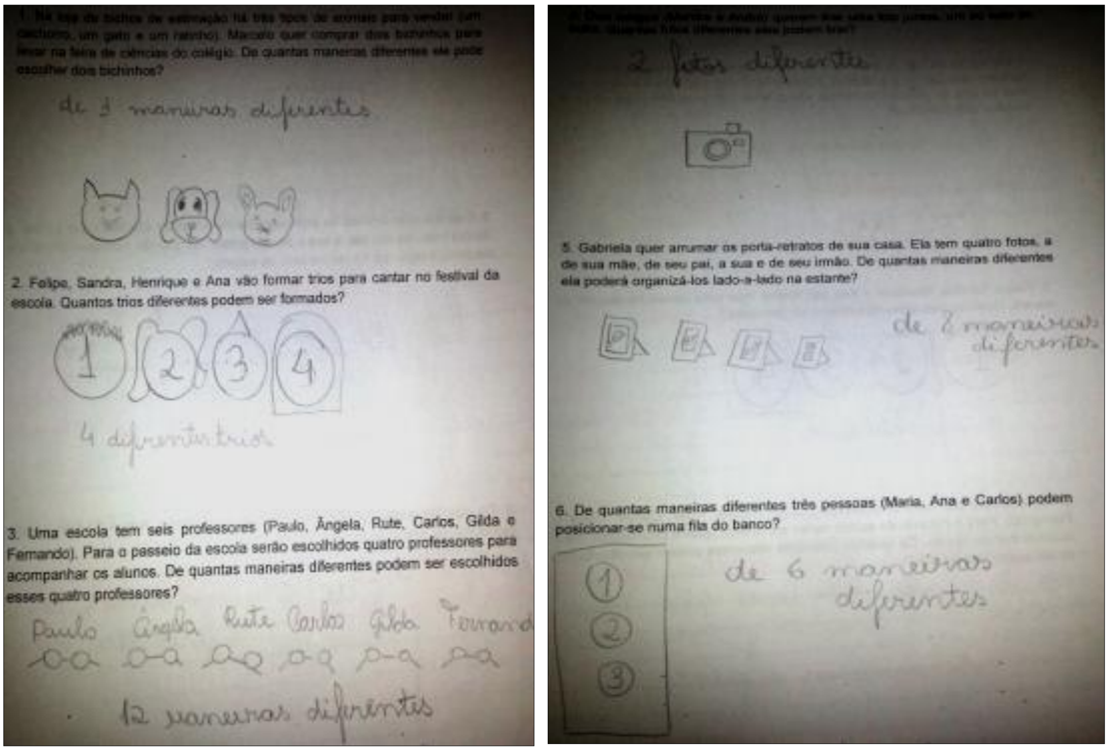


Figura 10: Respostas em sua maioria corretas do Aluno 78 – com desenhos

O aluno conseguiu acerto parcial nos problemas de *combinação* e *permutação*, ambos com quatro etapas de escolha. Nos demais, o aluno alcançou acerto total. As respostas corretas de cada problema podem ser visualizadas no Quadro 5.

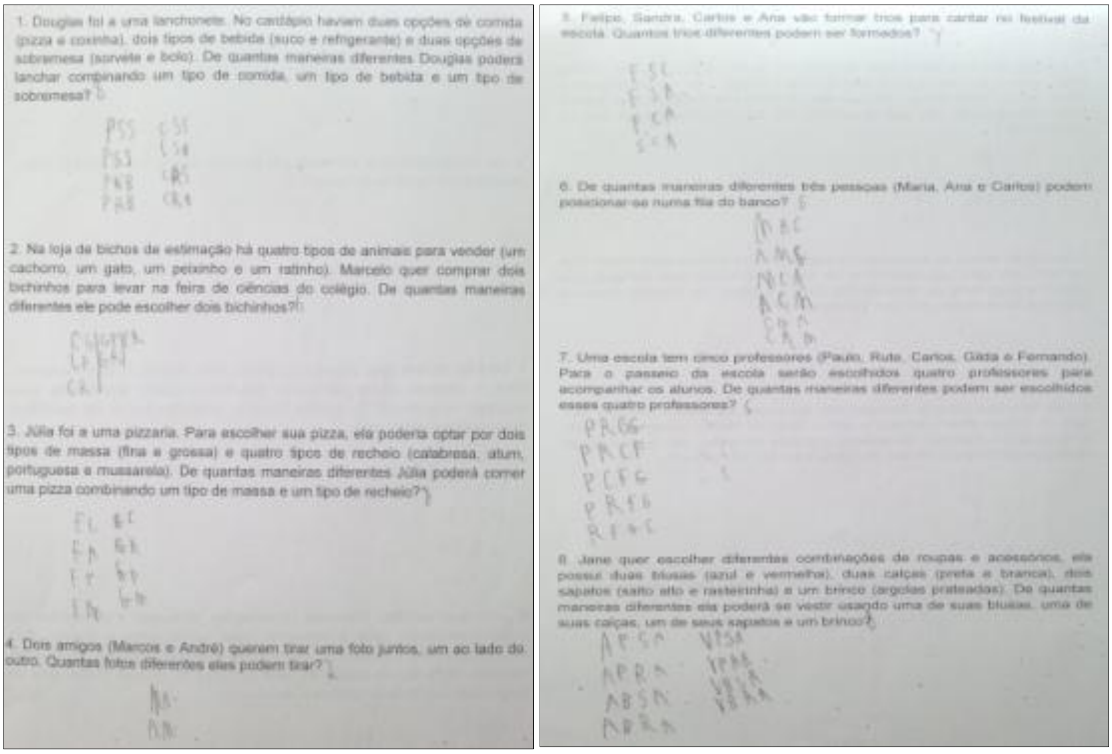
Quadro 5: Respostas aos problemas do teste Tipo 4.

Problema	Etapas de escolha	Resposta correta	Resposta do aluno
1. Combinação	2 etapas	3	**3**
2. Combinação	3 etapas	4	**4**
3. Combinação	4 etapas	15	12
4. Permutação	2 etapas	2	**2**
5. Permutação	4 etapas	24	8
6. Permutação	3 etapas	6	**6**

Através do Quadro 5 e da Figura 10, é possível visualizar a eficácia da estratégia de resolução desenho no desempenho do aluno. Contudo, o desenho, nesse caso, parece ter sido utilizado somente como ilustração do enunciado de alguns problemas, pois as combinações parecem ter sido realizadas mentalmente. No Problema 1, uma combinação com duas etapas de escolha, o aluno desenha os três animais que poderão ser escolhidos pelo menino. Através desse desenho, ficam mais claras as possíveis combinações de animais, contudo, o aluno não desenhou, nem listou essas combinações. A visualização de todas as possibilidades nas diferentes situações propostas parece ter sido mental.

Segundo Vega (2014), uma das estratégias de resolução mais utilizadas pelos alunos é a listagem. Estudos anteriores (PESSOA e BORBA, 2009; BARRETO, 2012 e AZEVEDO, 2013) já apontavam essa representação simbólica como sendo a mais presente nas respostas dos alunos.

No extrato a seguir, Figura 11, é possível observar um aluno que utilizou este tipo de estratégia como resolução de problemas, obtendo um índice elevado de acertos totais.



1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam duas opções de comida (pizza e coxinha), dois tipos de bebida (suco e refrigerante) e duas opções de sobremesa (sorvete e bolo). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

2. Na loja de bichos de estimação há quatro tipos de animais para vender (um cachorro, um gato, um peixinho e um ratinho). Marcelo quer comprar dois bichinhos para levar na feira de ciências do colégio. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

3. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (fina e grossa) e quatro tipos de recheio (calabresa, atum, portuguesa e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

4. Dois amigos (Marcos e André) querem tirar uma foto juntos, um ao lado do outro. Quantas fotos diferentes eles podem tirar?

5. Felipe, Sandra, Carlos e Ana vão formar trios para cantar no festival da escola. Quantos trios diferentes podem ser formados?

6. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Ana e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

7. Uma escola tem cinco professores (Paulo, Rute, Carlos, Gilda e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos quatro professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses quatro professores?

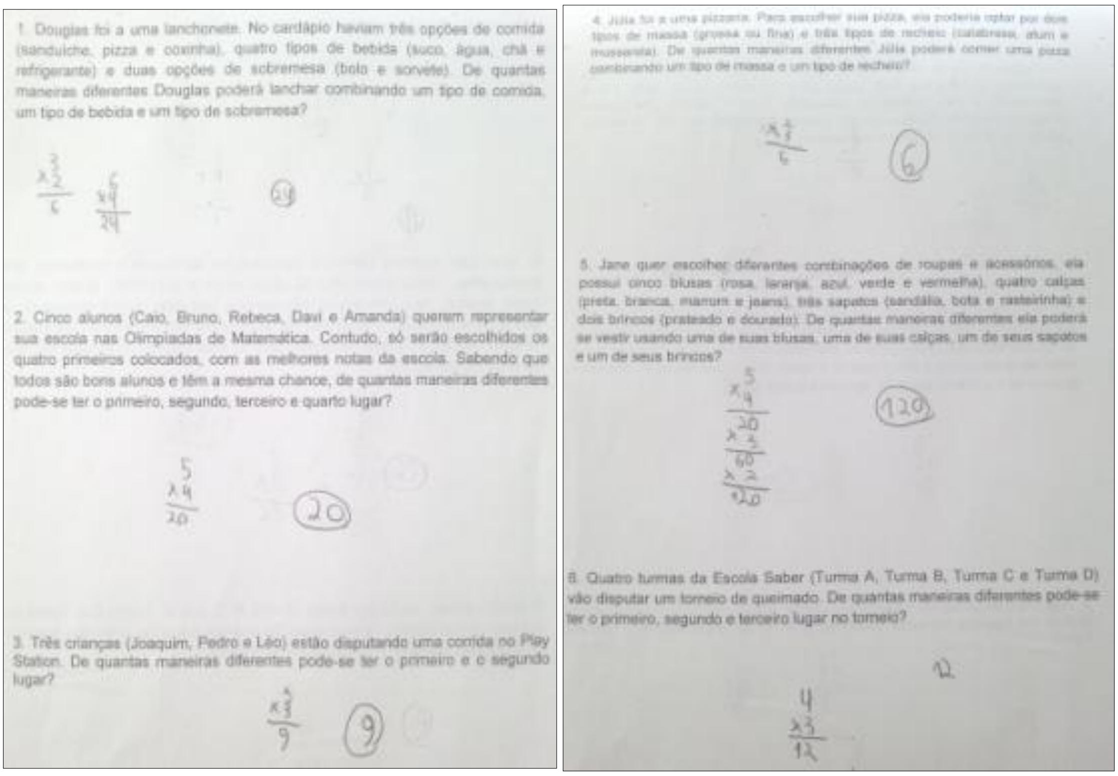
8. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui duas blusas (azul e vermelha), duas calças (preta e branca), dois sapatos (salto alto e rasteirinha) e um brinco (argolas prateadas). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um brinco?

Figura 11: Respostas em sua maioria corretas do Aluno 117 – uso de listagens

O Aluno 117 respondeu corretamente, por meio de listagens, a todos os problemas de *produto cartesiano*, *combinação* e *permutação.* Dessa forma, percebe-se que a listagem é uma estratégia que proporciona um índice elevado de acertos, contudo ela precisa estar associada ao esgotamento total das possibilidades e a outros invariantes importantes para a resolução dos diferentes problemas combinatórios.

Outra estratégia que proporciona um bom desempenho dos estudantes é a utilização da multiplicação para resolução de problemas combinatórios, contudo, para responder um problema de *combinação*, não basta simplesmente multiplicar os dados apresentados nos problemas, é preciso compreender quais dados irão ser multiplicados e depois dividi-los pela permutação dos elementos entre si. É necessário perceber a lógica existente em cada tipo de problema.

No extrato da Figura 12, o aluno utilizou a multiplicação, ora de forma adequada, ora de forma inadequada, visto que é preciso observar os invariantes presentes em cada problema combinatório.


1. Douglas foi a uma lanchonete. No cardápio haviam três opções de comida (sanduíche, pizza e coxinha), quatro tipos de bebida (suco, água, chá e refrigerante) e duas opções de sobremesa (bolo e sorvete). De quantas maneiras diferentes Douglas poderá lanchar combinando um tipo de comida, um tipo de bebida e um tipo de sobremesa?

24

2. Cinco alunos (Caio, Bruno, Rebeca, Davi e Amanda) querem representar sua escola nas Olimpíadas de Matemática. Contudo, só serão escolhidos os quatro primeiros colocados, com as melhores notas da escola. Sabendo que todos são bons alunos e têm a mesma chance, de quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar?

20

3. Três crianças (Joaquim, Pedro e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro e o segundo lugar?

9

4. Júlia foi a uma pizzaria. Para escolher sua pizza, ela poderia optar por dois tipos de massa (grossa ou fina) e três tipos de recheio (calabresa, atum e mussarela). De quantas maneiras diferentes Júlia poderá comer uma pizza combinando um tipo de massa e um tipo de recheio?

6

5. Jane quer escolher diferentes combinações de roupas e acessórios, ela possui cinco blusas (rosa, laranja, azul, verde e vermelha), quatro calças (preta, branca, marrom e jeans), três sapatos (sandália, bota e rasteirinha) e dois brincos (prateado e dourado). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas, uma de suas calças, um de seus sapatos e um de seus brincos?

120

6. Quatro turmas da Escola Saber (Turma A, Turma B, Turma C e Turma D) vão disputar um torneio de queimado. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o primeiro, segundo e terceiro lugar no torneio?

12

Figura 12: Respostas corretas e incorretas do Aluno 40 – uso da multiplicação

O aluno acertou três dos seis problemas, visto que as respostas a esses problemas são respectivamente, 24, 120, 6, 6, 120 e 24. Os acertos foram observados apenas nos problemas de *produto cartesiano*, Problemas 1, 4 e 5. Já nos problemas de *arranjo*, o aluno iniciou sua resolução de forma correta, como pode ser visto no Problema 2, contudo, a resolução encerra-se na multiplicação 5 x 4, quando, na realidade, como são primeiro, segundo, terceiro e quarto lugar, ele deveria multiplicar 5 x 4 x 3 x 2. O mesmo erro é cometido no Problema 6.

Através das estratégias utilizadas pelos alunos, verificou-se não haver diferença entre as categorias classificadas por Pessoa (2009) e as encontradas no estudo de Vega (2014), nem tampouco, houve relação entre a estratégia utilizada e o tipo de problema ou, ainda, o número de etapas de escolha. Percebeu-se que ao utilizar uma mesma estratégia em todos os tipos de problemas, os alunos parecem ter demonstrado perceber regularidades presentes nos problemas combinatórios.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo apresenta os resultados encontrados no estudo de Vega (2014), que oferecem evidências para destacar as etapas de escolha dos problemas de Combinatória enquanto variável que pode influenciar no desempenho de alunos do Ensino Fundamental ao responderem questões com este conteúdo. Esta, portanto, é a principal contribuição desse artigo, uma vez que estudos anteriores apontaram outras variáveis (primordialmente, tipo de situação combinatória e número total de possibilidades do problema e também forma de apresentação das variáveis) as quais foram revistas por Vega (2014) e acrescidas pelo olhar mais atento ao número de etapas de escolha dos problemas combinatórios.

Nos diferentes tipos de testes utilizados (seis, ao todo), verificou-se que o problema de *permutação* com quatro etapas de escolha foi o que apresentou um melhor nível de facilidade quando comparado ao problema de *produto cartesiano* com a mesma quantidade de etapas, nesse caso, quatro etapas também no teste Tipo 1. Esse resultado vai de encontro ao que estudos anteriores apontavam, como sendo *produto cartesiano* mais fácil que *permutação*.

Nos testes Tipo 2 e 3, observou-se não haver diferenças significativas de desempenho entre problemas de *produto cartesiano* e *arranjo*, ou entre *produtos cartesianos* e *combinações*, nem com duas, três ou com quatro etapas de escolha. Já no teste Tipo 4, os problemas de *permutação* com três e quatro etapas foram mais difíceis de serem resolvidos do que os problemas de *combinação*, também com três e quatro etapas de escolha. No teste Tipo 5, observou-se a ausência de diferenças significativas de desempenho entre problemas de *combinação* e *arranjo*, em duas, três e quatro etapas de escolha.

A análise realizada por Vega (2014) ressalta que, se o número total de possibilidades não for muito elevado, não há diferenças significativas de desempenho nos tipos de situações combinatórias. As relações e propriedades de cada tipo de problema, entretanto, não podem ser desconsideradas. Ao analisar somente as etapas de escolha, sem comparar os problemas, foco central do teste Tipo 6, foi possível verificar que – controlando-se o número total de possibilidades solicitadas – os problemas com quatro etapas de escolha são mais difíceis que os problemas combinatórios com duas e três etapas. Nos problemas de *produto cartesiano* há forte evidência da influência das etapas de escolha na resolução dos problemas de Combinatória.

Este resultado reforça a hipótese inicial e central da pesquisa de Vega (2014) que estudos anteriores apontavam o *produto cartesiano* como problema de mais fácil resolução, mas, em geral, esse tipo de problema envolvia apenas duas etapas de escolha e era comparado com problemas de outros tipos – *arranjos*, *combinações* e *permutações* – os quais possuíam, em geral, três ou quatro etapas de escolha.

Quando se analisa o número total de possibilidades de um problema, percebe-se que quanto maior a grandeza numérica presente na resposta, mais difícil será solucioná-lo corretamente. Isso foi verificado por Vega (2014) ao comparar os diversos tipos de testes e observar que os testes Tipo 2 e 5 eram mais difíceis de serem resolvidos do que os demais testes, pois apresentavam diferenças significativas de desempenho, quando comparado com outros. Isso pode ser explicado ao observar o total de possibilidades elevado nos problemas presentes nestes testes.

Dessa forma, o presente artigo traz confirmações quanto à influência do número de etapas de escolha (variável não controlada em estudos anteriores, mas controlada no estudo de Vega, ibidem) e da ordem de grandeza do total de possibilidades solicitadas (como já apontado por estudos anteriores por MORO e SOARES, 2006; PESSOA e BORBA, 2009; PESSOA e SANTOS, 2011 e TEIXEIRA, CAMPOS, VASCONCELLOS e GUIMARÃES, 2011). Além destas duas variáveis, há também indícios de que o tipo de situação combinatória também tem influência nos desempenhos, pois as relações e propriedades particulares de cada situação também influenciam na compreensão da situação e no procedimento utilizado em sua resolução. É o caso, dentre possíveis outros, de problemas de *permutação* com quatro etapas, nos quais os alunos conseguiram sistematizar suas soluções considerando os quatro elementos a serem permutados, enquanto se esqueceram de um ou mais elementos em *produtos cartesianos* que também possuíam quatro etapas de escolha.

Analisando também as representações simbólicas e estratégias utilizadas pelos alunos, não foi possível perceber relações específicas com os diferentes tipos de problemas combinatórios, nem com os números de etapas de escolha. A variação das representações simbólicas e estratégias utilizadas parecem estar associadas à percepção dos alunos das regularidades presentes nos problemas combinatórios, isso porque, em geral, cada aluno escolheu uma forma de representação e estratégia para utilizar em todos os problemas combinatórios respondidos que não variava de acordo com o tipo de problema ou o número de etapas de escolha.

As análises realizadas nesse artigo foram feitas a partir do estudo de Vega (2014) que tomaram como base a Teoria de Vergnaud, a qual aponta para *situações que dão significado*, *invariantes* (propriedades e relações) e *representações simbólicas* utilizadas em conceitualizações. Pôde-se verificar que, de modo geral, não há um significado dos problemas combinatórios que seja considerado mais fácil que os demais; viu-se que há influência das etapas de escolha, enquanto invariante de importante destaque; e verificou-se não haver ligação entre a representação simbólica escolhida pelo aluno para resolver os problemas e as etapas de escolha ou os diferentes tipos de problemas combinatórios.

Através desse artigo, almeja-se contribuir para uma melhora no ensino de Combinatória. Os resultados, assim como os obtidos em estudos anteriores, apontam que não deve ser priorizado o ensino deste ou daquele tipo de problema combinatório, mas, sim, de todos os diversificados tipos de problemas, para que os alunos tenham contato com diferentes relações e propriedades combinatórias. Também é preciso levar os alunos a lidar com variado número de etapas de escolha presentes nos problemas, para que percebam mais claramente as escolhas necessárias no levantamento de possibilidades. Deve-se, também, estimular a variedade de estratégias de resolução, para que os alunos percebam que algumas são mais eficientes, quando, por exemplo, se tem um maior número total de possibilidades. Desenhos e listagens – procedimentos muito comuns entre os alunos – são bem eficientes quando há poucas possibilidades, mas não são, necessariamente, os mais indicados quando o número total de possibilidades é elevado. Como apontado por Borba (2013) é preciso que os alunos iniciem com o uso destes procedimentos, mas gradativamente se utilizem de estratégias mais gerais e sistemáticas – como quadros, diagramas, cálculos aritméticos e procedimentos mais formais (princípio fundamental da contagem e fórmulas), os quais podem dar conta da grande variedade de situações combinatórias.

Os alunos do 6º ano apresentaram bons desempenhos nos testes propostos, reforçando a ideia de que o ensino desse conteúdo pode e deve ser iniciado ainda no

Ensino Fundamental, como orientam os Parâmetros Curriculares Nacionais em relação ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e como evidenciado em estudos anteriores (MORO e SOARES, 2006; PESSOA e BORBA, 2009; MAHER e YANKELEWITZ, 2010; PESSOA e SANTOS, 2011; MATIAS, SANTOS e PESSOA, 2011 e POR PESSOA e BORBA, 2012).

É importante que os resultados dessa pesquisa e de outras cheguem ao conhecimento do professor, pois é ele quem irá ajudar o aluno a construir a ponte entre modos intuitivos e cotidianos de pensamento para o modo próprio da Matemática formal, em um processo crescente e em espiral que parte dos conhecimentos prévios do aluno, como os observados na pesquisa de Vega (2014), e avança para procedimentos combinatórios refinados, como a sistematização, a generalização e demais procedimentos importantes para a combinação de elementos.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, J. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador?** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2013.

AZEVEDO, J; BORBA, R. O ensino da Combinatória por meio da construção de árvores de possibilidades com e sem o uso do software Diagramas de Árbol. **Anais...** do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Canoas - RS, 12 a 14 de novembro de 2012.

AZEVEDO, J; COSTA, D. da; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

BARRETO, F. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2012.

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais**... do X Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia, 2010.

BORBA, R. Vamos combinar, arranjar e permutar: Aprendendo combinatória desde os anos iniciais de escolarização. In: **Anais**... do XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba, 2013.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Ministério da Educação e Desporto – Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CORREA, J. OLIVEIRA, G. **A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória.** Curitiba: Educar em Revista, 2011.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976

MAHER, C; YANKELEWITZ, D. **Representations as tools for building arguments**. In: MAHER, C. POWER, A. UPTEGROVE, E. Combinatorics and Reasoning. New York: Springer, 2010.

MATIAS, P. C; SANTOS, M. M. de S; PESSOA, C. A. dos S. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

MORO, M. L; SOARES, M. T. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Revista Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v.8, n.1, pp. 99-124, 2006.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. (Tese Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. **Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.1, n.1. 2010. Disponível em: http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia/article/view/4 Acesso em: 08 set. 2011.

PESSOA, C.; BORBA, R. Do young children notice what combinatorial situations require? **Proceedings…** 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME36), Taiwan, 2012.

PESSOA, C; SANTOS, L. T. B. dos. O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais**... do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

PONTES, D; BORBA, R. A influência das etapas de escolha e das representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental. **Anais...** do XVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Canoas - RS, 12 a 14 de novembro de 2012.

SCHLIEMANN, A. **A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária.** In: Carraher, T. N.; Carraher, D.; Schliemann, A. Na vida dez, na escola zero. São Paulo: Cortez, 1988.

SILVA, J. da; SPINILLO, A. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. **Anais...** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE, 26 a 30 de junho de 2011.

TAXA-AMARO, F. Solução de problemas com operações combinatórias. Em M. R. de Brito (Org.), **Solução de problemas e a matemática escolar**, pp. 163-183. Campinas: Alínea, 2006.

TEIXEIRA, L. CAMPOS, E. VASCONCELLOS, M. GUIMARÃES, S. **Problemas multiplicativos envolvendo combinatória: estratégias de resolução empregadas por alunos do Ensino Fundamental público.** Curitiba: Educar em Revista, 2011.

VEGA, D. **Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha: Produto Cartesiano, Arranjo, Combinação ou Permutação?** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, 2014.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, 1986.

___________. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

Submetido: agosto de 2014

Aceito: novembro de 2014