DOI: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634.2019v12n2p221-233

Estratégias e Procedimentos Emergentes na Resolução de Questões de Análise Combinatória e o Ensino Exploratório de Matemática

Strategies and Procedures come out in Combinatorial Problems Solving and Exploratory Mathematics Teaching

Everton José Goldoni Estevam*[a]; Celine Maria Paulek[a]; Maria Ivete Basniak[a]; Dirceu Scaldelai[b]; Natali Angela Felipe[a]

[a]Universidade Estadual do Paraná, Campus de União da Vitória, PR, Brasil.
[b]Universidade Estadual do Paraná, Campus de Campo Mourão, PR, Brasil.
*E-mail: evertonjgestevam@gmail.com

Resumo

Este artigo analisa as resoluções de duas questões de matemática adaptadas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e de vestibulares, envolvendo combinatória, com o intuito de investigar semelhanças e diferenças entre as estratégias de resolução empregadas por alunos que experienciaram o Ensino Exploratório de Matemática (EEM) e aqueles que não vivenciaram formalmente esta perspectiva de ensino. Para tanto, é realizada uma análise qualitativa de 24 resoluções de dois grupos de alunos do segundo ano de dois cursos de licenciatura em Matemática: 14 com experiências no EEM e 10 sem este tipo de experiência. Os resultados evidenciam que, além de um maior percentual de acertos, os alunos com experiência no EEM apresentam maior variedade de estratégias, envolvendo justificativas e articulações que esclarecem os raciocínios empregados e a relação entre suas (re)soluções e o contexto da questão. Assim, o estudo sugere que a perspectiva do EEM pode configurar um panorama promissor para o ensino e a aprendizagem da Matemática, inclusive no que se refere à resolução de questões de avaliações sistemáticas, bem como a limitação de processos avaliativos alicerçados exclusivamente na solução final.

Palavras-chave: Metodologia de Ensino. Ensino de Matemática. Resoluções de Tarefas.

Abstract

This article analyzes the resolutions of two mathematic questions adapted from the National High School Examination (ENEM) and the entrance exams, involving combinatorial analysis, in order to investigate similarities and differences among the strategies by students who have experienced the Exploratory Mathematics Teaching (EMT) and those who did not formally experienced this teaching perspective. Thereunto, a qualitative analysis of 24 resolutions of two groups of second year students of two undergraduate courses in Mathematics teacher education is performed: 14 with EMT and 10 without this type of experience. The findings evidence that, further a higher percentage of hits, students with EEM experience presented greater variety of strategies involving justifications and articulation to clarify the reasoning used and the relation among their solutions and the question context. Then, the study suggests the EEM perspective may configure a scenery of teaching and learning of Mathematics regarding to the solving questions of systematic evaluation, as well as the limitation of evaluation processes based exclusively on the final solution.

Keywords: *Teaching Methodology. Teaching of Mathematics. Task Resolutions.*

1 Introdução

As estratégias de resolução empregadas em tarefas matemáticas vêm sendo apontadas pela literatura como aspecto importante a ser considerado por professores e pesquisadores, porque “representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações e conceitos complexos” e, portanto, “os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão” (NCTM, 1994, p. 77). Já no final de década de 1980, D’Ambrósio salientava a necessidade de transcender o ensino de Matemática assente na aplicação de fórmulas e algoritmos, sob a asserção de que “falta aos alunos uma flexibilidade de solução e a coragem de tentar soluções alternativas, diferentes das propostas pelos professores” (D’Ambrósio, 1989, p. 15).

A diversidade de estratégias de resolução, por exemplo, é um dos pressupostos assumidos pelo Ensino Exploratório de Matemática (EEM), o qual, em oposição ao ensino direto ou transmissivo, admite que a aprendizagem decorre do trabalho sério que os alunos realizam, a partir de tarefas desafiadoras para as quais não possuem uma estratégia imediata de resolução (Canavarro, 2011; Oliveira, Menezes, & Canavarro, 2013). Com o planejamento e gestão consonantes das condições em sala de aula e ações do professor, favorece-se a participação dos alunos, seja individual ou coletiva, em atividades de inquirição, nas quais, apoiando-se nas suas experiências anteriores, questões são levantadas, conjecturas elaboradas e caminhos diversos e possíveis são explorados e problematizados (Oliveira & Carvalho, 2014). Neste sentido, o EEM valoriza a “(re)descoberta pelos alunos de métodos próprios para resolver uma questão” (Ponte, 2014, p. 21), os quais podem colaborar com seu processo de aprendizagem, nas características salientadas pelo NCTM (1994) e por D’Ambrósio (1989).

De outra parte, por vezes, deparamo-nos com questionamentos e considerações acerca da efetividade dessa perspectiva de ensino para o desempenho satisfatório em avaliações sistemáticas, como na Prova Brasil, Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), Vestibulares, Concursos, entre outras, as quais, comumente, não priorizam processos resolutivos (*solutions*), mas as soluções consideradas corretas (*answers*). Por conseguinte, a efetividade de perspectivas metodológicas exigentes, como o EEM, é questionada e, eventualmente, negligenciada.

Nesse sentido, desde o ano de 2016, o Grupo de Estudos Teóricos e Investigativos em Educação Matemática - Getiem vem desenvolvendo o projeto *"Ensino e Aprendizagem Exploratória da Matemática"* que, dentre outros objetivos, busca investigar: i) o desempenho de alunos que experienciaram o ensino-aprendizagem exploratório na resolução de questões semelhantes às presentes no ENEM e em vestibulares; ii) semelhanças e diferenças nas estratégias, procedimentos e registros utilizados por alunos, na resolução de uma mesma tarefa, depois de experienciarem o ensino-aprendizagem exploratório.

O presente artigo é, portanto, parte dos resultados desse projeto e estuda as estratégias e os procedimentos de resolução empregados por alunos da licenciatura em Matemática que experienciaram o Ensino Exploratório de Matemática (EEM) e aqueles que não vivenciaram formalmente esta perspectiva de ensino, no intuito de investigar as influências do EEM nas estratégias e nos procedimentos emergentes na resolução de questões envolvendo análise combinatória, adaptadas do ENEM e de vestibulares[1].

A próxima seção apresenta uma discussão quanto ao EEM e estratégias, procedimentos e representações matemáticas em processos de resolução de tarefas, seguida dos aspectos metodológicos da pesquisa. Na seção de resultados, caracterizamos e discutimos as estratégias identificadas na resolução de duas questões envolvendo análise combinatória, cujas implicações são sistematizadas na última parte do trabalho.

2 Ensino Exploratório de Matemática e Estratégias de Resolução de Tarefas Matemáticas

O Ensino Exploratório de Matemática (EEM) constitui uma perspectiva que se relaciona com as Investigações Matemáticas e, por conseguinte, às resoluções de problemas (Ponte, 2007). Aproxima-se da primeira porque se situa em uma compreensão alargada de *inquiry-based teaching* (Oliveira & Cyrino, 2013), que privilegia uma lógica didático-pedagógica exploratória e investigativa. Contudo, apesar de pressupor tarefas que preservam natureza aberta (Ponte, 2005), admite adaptações que visam aos níveis menores de sofisticação e complexidade matemática, bem como possibilitam uma sistematização objetiva dos conteúdos matemáticos ao final (Ponte, 2007). Igualmente, apesar da diversidade de caracterizações da resolução de problemas, por ser aberta, difere-se das características iniciais de um problema, mas se aproxima da atividade de resolução de problemas quando a tarefa ou algum de seus itens constitui situações para as quais o aluno não possui uma estratégia imediata de resolução (Canavarro, 2011).

O EEM opõe-se àquele chamado tradicional ou direto (Ponte, 2005) porque admite a sala de aula como um ambiente de interação entre os alunos, o professor e o conhecimento matemático na busca de um entendimento comum por meio da negociação de significados (Bishop & Goffree, 1986). Deste modo, a aprendizagem decorre do trabalho que os alunos realizam a partir do engajamento em tarefas desafiadoras, para as quais não possuem método imediato de resolução (Canavarro, 2011). Essas tarefas devem

> ser um desafio e basear-se em uma situação concreta; possibilitar aos alunos a confiança em sua experiência quando resolvê-las e, portanto, fazer uso de várias estratégias com diferentes níveis de sofisticação matemática. Elas devem ser ancoradas no currículo e ser destinadas a uma compreensão mais profunda de conceitos matemáticos que têm uma forte ligação com o conhecimento que os alunos constroem durante as aulas. (Oliveira & Cyrino, 2013, p. 218).

Com ações consonantes do professor, os alunos são conduzidos a comunicar suas ideias e (in)compreensões, questionar ideias de outros, refletir sobre a necessidade ou vantagem de determinadas ideias ou estratégias de resolução, em uma dimensão colaborativa de aprendizagem (Chapman & Heater, 2010). Neste sentido, o EEM pressupõe tarefas matemáticas e uma dinâmica de aulas, geralmente organizadas em fases[2], que tenham potencial para envolver os alunos em um trabalho que desencadeie formas complexas de pensamento (Ponte, 2005), bem como provoque a emergência de diferentes estratégias e representações com diferentes níveis de sofisticação matemática (Oliveira & Cyrino, 2013). Isto permite que o aluno se apoie na sua experiência anterior para elaboração do processo de resolução (Ponte, 2014), ao mesmo tempo em que possibilita a comparação da eficiência e adequabilidade dessas estratégias como meio para (re)solução da situação em causa, ou ampliação para outras semelhantes ou relacionadas, em consonância com o NCTM.

O modo como os alunos interpretam as representações indicadas nos enunciados das tarefas, e como criam e interpretam suas próprias representações, é decisivo para sua aprendizagem, uma vez que os objetos matemáticos são abstrações que não existem no mundo real, sendo possível pensar neles apenas através de representações (Ponte, 2014). Contudo, há que se ter em conta a polissemia que permeia essa relação. Se, por um lado, um mesmo objeto matemático pode ter diversas representações, por exemplo, o número natural 1 pode ser representado por "1" (algarismo indo-arábico),

1 Uma discussão preliminar semelhante envolvendo Geometria foi apresentada no XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática - EPREM.
2 Para compreensão desta organização de aulas, ver Cyrino (2016).

“I” (algarismo romano), “” (indigitada), “um” (língua portuguesa), “*one*” (língua inglesa), “●” (pictórica), etc.; por outro, uma certa representação pode designar diferentes objetos, de acordo com o contexto, por exemplo, o sinal de “=” (igual) tanto pode representar uma equivalência quanto o resultado de uma operação.

Salienta-se, contudo que, embora sua proeminência para o ensino e a aprendizagem de Matemática, poucos são os estudos dedicados a elucidar as (diversas) estratégias a que os alunos podem recorrer ou recorrem no decurso de desenvolvimento de tarefas com características diversas, bem como envolvendo diferentes conteúdos da Matemática. De modo geral, os estudos abordam esta temática ao admitir a resolução de problemas como primazia.

Nesse cenário, Echeverría (1998, p. 60) afirma que as estratégias para resolução de problemas consistem em “formas conscientes de organizar e determinar recursos de que dispomos para a solução de um determinado problema”. Para Dostál (2015, p. 2803), uma estratégia “pode ser caracterizada como um plano da sequência de etapas consistindo na aplicação de métodos e recursos adequados que conduzam à resolução bem-sucedida do problema”. De acordo com Hadji, citado por Buriasco, Ferreira e Ciani (2009, p. 77), pode-se entender “por estratégia a orientação geral das operações e dos meios a utilizar. [...]. Em sentido lato, o termo designa um conjunto de ações coordenadas tendo em vista uma finalidade”. Neste sentido, estratégia difere-se de procedimento, que

> [...] diz respeito ao processo de desenvolvimento da estratégia, o modo pelo qual se desenvolve a estratégia. Considerando, por exemplo, que um problema foi resolvido por meio de um sistema de equações do primeiro grau (estratégia utilizada para abordar o problema) e que esse sistema foi resolvido pelo método da substituição, este seria então o procedimento, ou seja, o modo como se desenvolveu a estratégia. (Buriasco, Ferreira, & Ciani, 2009, p. 77).

Destarte, a partir da definição de uma estratégia matemática, pode-se recorrer a diferentes procedimentos para resolução de determinada tarefa ou questão, os quais, por sua vez, podem envolver diversos tipos de representação. No que se refere a este último aspecto, Bishop e Goffree (1986) categorizam as representações que podem ser encontradas nas aulas de Matemática em quatro grupos principais: símbolos matemáticos, linguagem verbal, figuras e objetos. Os autores afirmam que “cada um destes tipos tem o seu próprio vocabulário ou código que precisa ser apreendido de forma a compreender as ideias matemáticas expressas” (p. 34). As figuras, imagens, ícones, etc. dão origem ao que se pode designar por representações pictóricas.

As semelhanças e diferenças nas estratégias, procedimentos e representações utilizadas na resolução de uma determinada tarefa matemática podem ser identificadas, por exemplo, considerando: (a) diferentes representações de um conceito matemático; (b) propriedades diversas (definições ou teoremas) de conceitos matemáticos, a partir de um tópico particular de matemática; ou (c) diferentes ferramentas e teoremas, a partir de diferentes ramos da matemática (Guberman & Leikin, 2013).

Neste contexto, Musser e Shaughnessy (1997) salientam cinco estratégias de resolução de problemas no campo da matemática escolar: *tentativa-e-erro*; *reconhecimento de padrões; resolver um problema mais simples; trabalhar em sentido inverso;* e *simulação*, esta última utilizada quando a (re)solução do problema compreende a realização de um experimento, cuja execução não seja viável ou acessível. Cavalcanti (2001) refere, também, a *recorrência a desenhos* como uma possível estratégia para a interpretação e compreensão de um problema, bem como para a busca de uma solução.

Com o intuito de apresentar uma abordagem ampliada sobre estratégias de resolução de problemas, Posamentier e Krulik (2015) consideram dez possibilidades, que incluem as já referidas por outros trabalhos e podem ser sintetizadas na conformidade que segue.

Raciocínio Lógico: a partir de um padrão (re)conhecido previamente, mas não necessariamente explicitado, trabalhar com a questão como um todo (sem fragmentá-la), utilizando e estabelecendo relações lógicas entre os elementos que permeiam a situação na busca pela solução;

Reconhecimento de Padrão: fragmentar a questão em partes menores, de modo a perceber elementos e relações existentes que possibilitem a identificação de um (possível) padrão;

Organização dos dados: organizar os dados para obter uma forma de resolução mais simples;

Fazer um desenho ou uma representação visual: elaborar desenhos ou representações visando à compreensão da situação e/ou do que está sendo feito. A visualização ajuda na familiarização do resolvedor com a situação;

Representar todas as possibilidades: organizar exaustivamente uma lista em que todas as possibilidades são listadas de maneira sistemática. Assim, o que se procura estará incluído em algum lugar dessa lista;

Trabalhar no sentido inverso: partindo do objetivo ou resultado, e não dos dados, procurar uma proposição ou conjunto de proposições, uma relação ou conjunto de relações das quais se deduz o objetivo ou resultado;

Tentativa-e-erro: aplicar operações pertinentes às informações dadas, podendo envolver processos sistemáticos (testar todas as possibilidades) ou inferenciais, os quais consideram um conhecimento pertinente para reduzir a procura;

Adotar um ponto de vista diferente: resolver o problema por um método não comum, diferente daquele(s) usualmente empregado(s) em problemas semelhantes;

Resolver um problema mais simples: resolver um caso particular ou recuar temporariamente de um problema complicado para uma versão resumida, podendo vir acompanhado do emprego de um padrão;

Considerar casos extremos: considerar alguma das variáveis em seus extremos e outras como constantes, de modo a obter algum auxílio da resolução.

Esta relação serve de orientação para as análises deste trabalho acerca das estratégias, bem como procedimentos e registros que conduzem o desdobramento dessas estratégias, no intuito de atingir o objetivo enunciado na seção introdutória.

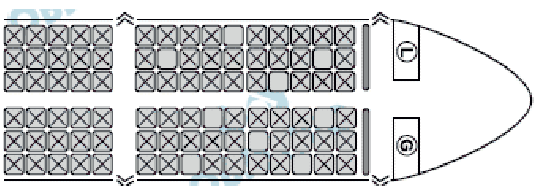
3 Material e Métodos

A presente pesquisa abarcou a análise qualitativa das estratégias emergentes na resolução de duas questões, por 24 alunos do segundo ano da licenciatura em Matemática[3], as quais foram adaptadas do ENEM do ano de 2015 (Figura 1) e de uma prova de vestibular (Figura 2). As questões envolvem análise combinatória, e esta abordagem ocorre, na primeira questão, a partir da organização de pessoas em um determinado número de assentos em um avião e, na segunda, a partir da determinação de placas de veículos distintas, admitidas determinadas condições.

A primeira questão (Figura 1) buscava, além das estratégias, identificar se os estudantes conseguiam associá-las com relações matemáticas já conhecidas, nomeadamente com o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e com o operador fatorial. A resolução demandava o reconhecimento de que há mais poltronas disponíveis do que pessoas a serem acomodadas no avião e, ainda, de que a cada possibilidade de ocupação das poltronas os passageiros poderiam trocar de lugar entre si, formando uma nova organização de pessoas no voo, ou seja, a ordem deve ser considerada neste caso. Neste sentido, para resolver a questão, pode-se utilizar o procedimento de arranjo simples ou uma combinação associada a uma permutação.

Figura 1 – Questão 1, adaptada do ENEM (2015) e resolvida pelos alunos

Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o *site* de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura disponibilizada pelo *site*, as poltronas ocupadas estão marcadas com X, e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



a) Qual a quantidade de formas distintas para acomodar toda a família neste voo?

b) Este número pode ser calculado por:

i) $\frac{9!}{2!}$

ii) $\frac{9!}{7! \cdot 2!}$

iii) $7!$

iv) $\frac{5!}{2!} \cdot 4!$

v) $\frac{5!}{4!} \cdot \frac{4!}{3!}$

Fonte: Adaptado de ENEM (2015).

Para a resolução da segunda questão (Figura 2), no primeiro item, os alunos precisariam considerar que, para cada letra existem 26 opções; e para cada algarismo, 10 opções. Além disso, era necessário perceber que cada uma dessas opções gera uma nova placa, podendo haver repetição de caracteres. Já no segundo item, era preciso considerar que a ordem de letras e algarismos pode ser alterada; então, as possíveis configurações de placa contendo quatro letras e três algarismos aliadas às possibilidades existentes para cada algarismo e cada letra compreendem os elementos para resolver a questão. Assim, a resolução da questão envolve, no item (a), um arranjo com repetição e, no item (b), a associação entre o arranjo da situação anterior e uma combinação. Em todas as situações, tanto da questão 1 quanto da questão 2, é fundamental a compreensão do PFC e do operador fatorial.

Figura 2 – Questão 2, adaptada do vestibular Unesp (2016) e resolvida pelos alunos

Está previsto que, a partir de 1º de janeiro de 2017, entrará em vigor um sistema único de emplacamento de veículos para todo o Mercosul, o que inclui o Brasil. As novas placas serão compostas por 4 letras e 3 algarismos. Admita que no novo sistema possam ser usadas todas as 26 letras do alfabeto, incluindo repetições, e os 10 algarismos, também incluindo repetições. Admita ainda que, no novo sistema, cada carro do Mercosul tenha uma sequência diferente de letras e algarismos em qualquer ordem. Veja alguns exemplos das novas placas.

a) No novo sistema descrito, determine a quantidade de placas possíveis com o formato "Letra – Letra – Algarismo – Algarismo – Algarismo – Letra – Letra", nesta ordem.

b) Determine a quantidade de placas possíveis com 4 letras e 3 algarismos, independente da ordem em que aparecem na placa.

Fonte: Os autores.

3 Todos os alunos assinaram termo de consentimento livre e esclarecido manifestando seu interesse e disponibilidade para participar do estudo, conforme protocolo 47903042013 e Parecer 001/2013-COEP.

Os 24 alunos que resolveram as questões constituem dois grupos com experiências distintas relacionadas ao ensino e à aprendizagem dos conteúdos de Análise Combinatória no curso de licenciatura: o Grupo A é composto de 10 estudantes de uma Instituição de Ensino Superior (IES) (identificados por A1 a A10), que estudaram os conteúdos tratados nas tarefas na disciplina *Complementos de Matemática*. Já o Grupo B é composto de 14 estudantes de outra IES (identificados por B1 a B14) que, além de terem cursado a disciplina *Matemática Elementar*, que aborda Análise Combinatória, experienciaram aulas assentes no EEM, no contexto da disciplina *Instrumentalização para o Ensino de Matemática no Ensino Médio*, a qual tem por objetivo possibilitar a vivência de situações de aprendizagem de conteúdos matemáticos daquele nível de ensino por meio de diferentes alternativas metodológicas.

As duas questões foram desenvolvidas (juntamente com outras duas não referidas neste trabalho) em duas aulas, com duração de 50 minutos cada, ao final das duas disciplinas das diferentes IES, nas quais os alunos concluintes da segunda série do curso foram convidados a resolver as situações propostas apresentando os elementos considerados necessários e pertinentes para esclarecimento e compreensão do raciocínio empregado.

As análises foram realizadas identificando, inicialmente, a(s) estratégia(s) de cada resolução e a correção da resposta apresentada, sendo iniciadas pelo Grupo A e seguidas pelo Grupo B. A partir da identificação inicial das estratégias, elas foram agrupadas de acordo com suas semelhanças e grupo pertencente, tendo como referência aquelas apresentadas no quadro teórico. Por fim, elas foram circunstanciadas, tendo em conta o encaminhamento dado pelos alunos às estratégias utilizadas, o qual expressa procedimentos e representações diversos utilizados, cujas evidências permitem discussões e inferências relacionadas ao objetivo do presente estudo.

4 Resultados e Discussão

Assumimos as dez estratégias de resolução descritas por Posamentier e Krulik (2015) como orientação para as análises do presente trabalho. Contudo, o decurso do processo analítico evidenciou que a identificação dos elementos presentes nas resoluções que caracterizam determinada estratégia é complexa e não direta. Isto porque a definição de cada estratégia sugere aspectos tênues que as diferenciam, os quais, por vezes, demandam uma estrutura sistemática constituída de elementos bem delineados, que permitem a delimitação consistente desse limiar. Desta forma, complementamos as definições das estratégias descritas por Posamentier e Krulik (2015) com os descritores que consideramos distintivos de cada uma delas, tendo em conta aquilo que conseguimos identificar e interpretar, a partir das resoluções em análise, como intencionalidade do aluno e funções das diversas representações e procedimentos empregados no processo resolutivo (Quadro 1).

Quadro 1 – Descritores para a identificação e classificação das estratégias de resolução

ID	Estratégia	Descritores Considerados Elementos Distintivos
E1	Fazer um desenho ou uma representação visual	▪ Elabora um desenho ou esquema para compreender a situação; ▪ Elabora um desenho ou esquema para organizar seu processo de resolução; ▪ Salienta a necessidade de visualização da situação em um esquema ou desenho para sua resolução.
E2	Representar todas as possibilidades	▪ Explicita uma tentativa de listar ou registrar todas as possibilidades para resolver a situação por meio de processos de contagem.
E3	Trabalhar no sentido inverso	▪ Utiliza uma expressão matemática, partindo do objetivo ou resultado, sem justificativas; ▪ Busca elementos da situação para atribuir sentido aos valores utilizados na expressão matemática utilizada.
E4	Reconhecimento de um padrão	▪ Resolve situações semelhantes com quantidade menor de elementos e tenta identificar um padrão; ▪ Utiliza raciocínio indutivo
E5	Adotar um ponto de vista diferente	▪ Utiliza um método incomum, mas eficiente para resolver a situação
E6	Organização dos dados	▪ Explicita uma sistemática para organização dos dados da situação e a utiliza na resolução.
E7	Raciocínio lógico	▪ Utiliza uma expressão matemática, com justificativas; ▪ Circunstancia a resolução na situação em questão.
E8	Resolver um problema mais simples	▪ Desconsidera aspectos da situação com vistas a constituir uma situação particular mais simples; ▪ Considerar aspectos não presentes na situação com vistas a constituir uma situação particular mais simples; ▪ Agrega os aspectos desconsiderados inicialmente na situação mais simples para resolver a situação em questão.
E9	Considerar casos extremos	▪ Considera situações particulares, sem desconsiderar nenhuma das características da situação.
E10	Tentativa e erro	▪ Testa diferentes possibilidades e, a partir de análise pertinente, estabelece a solução; ▪ Apresenta diferentes resoluções e determina a solução a partir de critérios pertinentes de exclusão.

Fonte: Dados da pesquisa.

Destarte, os descritores do Quadro 1 significam os elementos que alicerçaram nossas análises, cujos resultados do processo analítico são apresentados e discutidos na seção seguinte.

4.1 Estratégias emergentes nas resoluções dos alunos

No que diz respeito à consideração de soluções/respostas corretas para a questão 1, o Quadro 2 sintetiza os resultados encontrados nas resoluções apresentadas pelos 24 estudantes que a resolveram. Foram consideradas corretas as soluções/respostas que, de alguma maneira, referiam a importância da ordem para a situação em questão e, considerando este aspecto, resolveram o arranjo, resultando a alternativa (a) como resposta correta para o item (b) da questão.

Quadro 2 – Síntese das soluções apresentadas pelos 24 alunos que resolveram a questão 1

Grupo	A			B		
	Qtde.	**%**	**Alunos**	**Qtde**	**%**	**Alunos**
Soluções corretas	0	0%	-	6	43%	B2, B3, B10, B11, B13 e B14
Soluções Incorretas	8	80%	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A8 e A9	8	64%	B1, B4, B5, B6, B7, B8, B9, B12
Sem resposta/ resolução	2	20%	A7 e A10	0	0%	-
Total	**10**	**100%**	**-**	**14**	**100%**	**-**

Fonte: Dados da pesquisa.

Já para a questão 2, cujos resultados encontrados nas resoluções apresentadas pelos 24 estudantes estão sintetizados no Quadro 3, a análise considerou as particularidades das situações expressas nos itens (a) e (b) da questão. Desta forma, foram consideradas corretas as soluções/respostas que determinaram valores correspondentes a, no o item (a), considerar a possibilidade de repetição de letras e algarismos e a ordem estabelecida previamente na situação; e, no item (b), a capacidade para articular as possibilidades de letras e algarismos para os dígitos que compõem a placa dos veículos, bem como a independência da ordem com que eles podem ser organizados naquelas placas.

Quadro 3 – Síntese das soluções apresentadas pelos 24 alunos que resolveram a questão 2

Grupo	A						B					
	Item (a)			**Item (b)**			**Item (a)**			**Item (b)**		
	Qtde	**%**	**Alunos**	**Qtde**	**%**	**Alunos**	**Qtde**	**%**	**Alunos**	**Qtde**	**%**	**Alunos**
Soluções corretas	0	0%	-	0	0%	-	9	64%	B3, B5, B7, B8, B9, B10, B11, B13 e B14	1	7%	B3
Soluções Incorretas	8	80%	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A8 e A9	8	80%	A1, A2, A3, A4, A6, A7, A8 e A9	1	7%	B2	7	50%	B1, B5, B8, B9, B10, B11 e B13
Sem resposta/ resolução	2	20%	A5 e A10	2	20%	A5 e A10	4	29%	B1, B4, B6, B12	6	43%	B2, B4, B6, B7, B12 e B14
Total	**10**	**100%**	**-**	**10**	**100%**	**-**	**14**	**100%**	**-**	**14**	**100%**	**-**

Fonte: Dados da pesquisa.

Os dados apresentados nos Quadros 2 e 3 evidenciam, com exceção do item (b) da questão 2, percentuais superiores de acerto nas resoluções das questões pelo Grupo B, quando comparado ao Grupo A, e este último não apresentou solução correta alguma. Isto sugere, inicialmente, que o EEM pode colaborar para o desenvolvimento de capacidades para resolução de questões semelhantes àqueles presentes em avaliações de grande escala, como o ENEM e vestibulares, inclusive com desempenhos superiores. Considerando a restrição quantitativa dos dados utilizados no estudo, acreditamos que a análise sistemática e descritiva das estratégias empregadas, com seus respectivos desdobramentos em procedimentos e representações, pode oferecer elementos que validem essa hipótese e apontem aspectos para sustentá-la e esclarecê-la, conforme segue.

No que se refere às estratégias empregadas, na análise das resoluções apresentadas pelos alunos, identificamos algumas variações, cujas aproximações e os distanciamentos possibilitaram a sistematização, a partir dos elementos estruturados no Quadro 1. O Quadro 4 apresenta a síntese desta análise, a qual é circunstanciada e problematizada, com recorrências aos procedimentos e representações, nas análises ulteriores, organizadas por questão.

Quadro 4 – Síntese das estratégias identificadas nas resoluções dos alunos

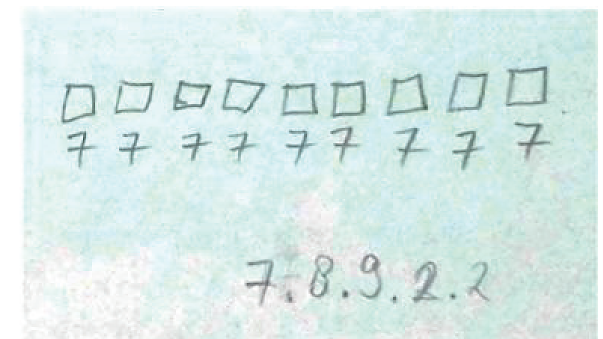
ID	Estratégia	Questão 1 Item (a)		Questão 2			
				Item (b)	Item (a)	Item (b)	
		Grupo A	Grupo B	Grupo A		Grupo B	
E1	Fazer um desenho ou uma representação visual	A1	B1, B9, B14	A1, A6	-	B2	-
E2	Representar todas as possibilidades	A2	-	-	-	-	-
E3	Trabalhar no sentido inverso	A3, A5, A6, A9	-	-	-	-	-
E4	Reconhecimento de um padrão	-	-	-	-	-	-
E5	Adotar um ponto de vista diferente	-	B5, B6,	-	-	-	B3
E6	Organização dos dados	-	B11	-	-	-	-
E7	Raciocínio lógico	A4, A8	B2, B3, B4, B7, B8, B10, B12	A3, A4, A7, A9	A1, A3, A4, A6, A7, A8, A9	B3, B5, B7, B8, B9, B10, B11, B13, B14	B1, B5, B8, B9, B11, B13
E8	Resolver um problema mais simples	-	-	-	-	-	-
E9	Considerar casos extremos	-	-	-	-	-	-
E10	Tentativa e erro	-	B13	-	-	-	-
-	Sem estratégia/resolução	A7, A10	-	A2, A5, A8, A10	A2, A5, A10	B1, B4, B6, B12	B2, B4, B6, B7, B10, B12, B14

Fonte: Dados da pesquisa.

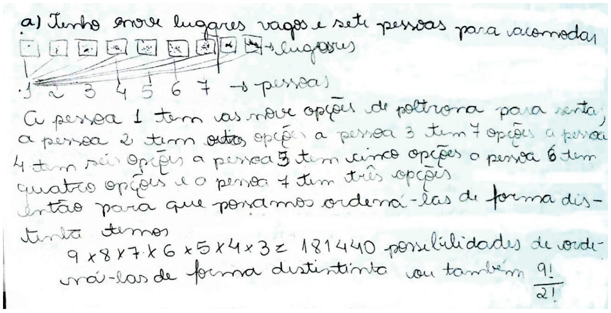
4.2 Circunstanciando as estratégias identificadas na resolução da questão 1

Nas análises das resoluções da questão 1, identificamos a emergência de sete das estratégias estruturadas no quadro teórico, e aquelas não identificadas referem-se à E4, E8 e E9. No que se refere a E1, foram consideradas aquelas estratégias assentes inicialmente em uma representação visual, utilizada para compreender a situação em questão e/ou desenvolver seus procedimentos resolutivos. A1 elabora uma representação pictórica associada ao número 7, a qual sugere uma busca por compreender a situação em análise e que considera as possibilidades para que as pessoas se sentem nas 9 poltronas disponíveis no avião. Contudo, parece desconsiderar as implicações decorrentes de as pessoas irem se sentando e, portanto, ocupando algumas poltronas, já que considera 7 possibilidades para cada uma das 9 poltronas existentes. Salienta-se, por outro lado, que a solução assinalada como resposta ao item (b) - (ii) - não guarda relação com esse raciocínio, tampouco com o valor indicado como solução ao item (a) – 2016, o qual igualmente não decorre do raciocínio inicial sugerido pela representação pictórica. B1 também recorre a uma representação pictórica das 9 poltronas e das 7 pessoas, considerando restar 2 assentos vazios e, a partir disto, faz a combinação entre 9 poltronas e 7 pessoas, desconsiderando a diversidade de formas de acomodação dessas pessoas em 7 poltronas. Isso o conduz a também assinalar como resposta ao item (b) da questão a opção (ii). B9 apresenta uma representação pictórica inicial, semelhante à B1, que associa as possibilidades de pessoas para sentar em cada uma das poltronas do avião, mas sugere que a oitava e a nona cadeira também teriam 7 e 6 possibilidades, respectivamente, para acomodar as pessoas. No entanto, encaminha uma resolução aritmética associada à combinação e, portanto, incompatível com a representação elaborada inicialmente. B14, por sua vez, usa o desenho para representar como acomodar as pessoas nas poltronas disponíveis no avião, descrevendo que a primeira pessoa tem 9 possibilidades de assento, a segunda 8 e assim sucessivamente. Utilizando uma explicação em linguagem verbal correspondente com a representação pictórica, bem como operações aritméticas compatíveis e associadas à ideia do operador fatorial, conclui sua resolução multiplicando todas as possibilidades que cada pessoa tem para se sentar e, por conseguinte, concluindo que a resposta correta para o item (b) consiste na opção (i). A Figura 3 apresenta as resoluções de A1 e B14.

Figura 3 – Resoluções da questão 1 que expressam a estratégia E1



Resolução do aluno A1



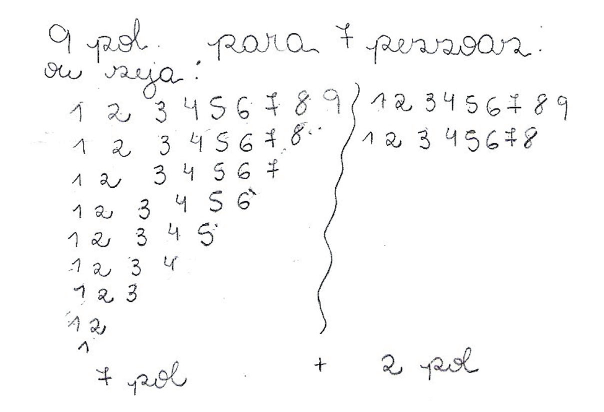
a) Tenho nove lugares vagos e sete pessoas para acomodar
→ lugares
1 2 3 4 5 6 7 → pessoas
A pessoa 1 tem as nove opções de poltrona para sentar, a pessoa 2 tem oito opções a pessoa 3 tem 7 opções a pessoa 4 tem seis opções a pessoa 5 tem cinco opções a pessoa 6 tem quatro opções e a pessoa 7 tem três opções
Então para que possamos ordená-las de forma distinta temos
9x8x7x6x5x4x3 = 181440 possibilidades de ordená-las de forma distintinta ou também 9!/2!

Resolução do aluno B14

Fonte: Os autores.

Foi considerada como E2 a estratégia de A2 (Figura 4), que organiza uma lista em que tenta representar todas as possibilidades de disposição das pessoas nos assentos vagos ao diminuir o número de poltronas disponíveis, conforme as pessoas ocupam os lugares vazios. Contudo, não fica claro como determinou o valor 36, opção (ii), indicado como resposta no item (b) da questão.

Figura 4 – Resoluções da questão 1 que expressam a estratégia E2



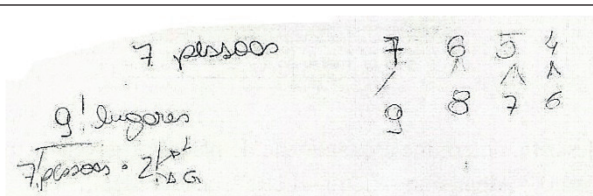
9 pol. para 7 pessoas:
ou seja:
1 2 3 4 5 6 7 8 9 | 1 2 3 4 5 6 7 8 9
1 2 3 4 5 6 7 8 | 1 2 3 4 5 6 7 8
1 2 3 4 5 6 7
1 2 3 4 5 6
1 2 3 4 5
1 2 3 4
1 2 3
1 2
1
7 pol + 2 pol

Resolução do aluno A2

Fonte: Os autores.

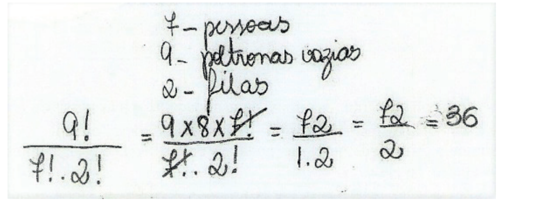
Com relação a E3, foram consideradas aquelas estratégias que referiam como resolução do item (a) da questão uma explicação da resposta assinalada como correta para o item (b), sem justificativa. Neste sentido, A5 refere apenas a existência de 7 pessoas e 9 poltronas disponíveis, enquanto A3, A6 e A9, para explicar o (dois fatorial) da opção (ii), indicada por todos como a solução ao item (b), referem a existência de duas fileiras de poltronas, uma de cada lado do avião (Figura 5).

Figura 5 – Resoluções da questão 1 que expressam a estratégia E3



7 pessoas 7 6 5 4
9 8 7 6
9! lugares
7! pessoas · 2!

Resolução do aluno A6



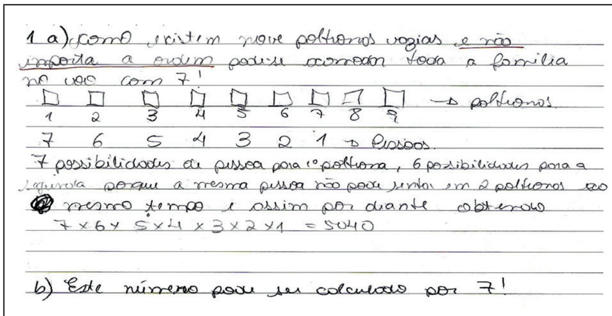
7 – pessoas
9 – poltronas vazias
2 – filas
$\frac{9!}{7!.2!} = \frac{9\times8\times7!}{7!.2!} = \frac{72}{1.2} = \frac{72}{2} = 36$

Resolução do aluno A9

Fonte: Os autores.

Com relação a E5, foram consideradas aquelas estratégias que, de algum modo, admitiam condições não presentes na situação e igualmente desconsideravam aspectos nela estabelecidos. B5, por exemplo, adotou um ponto de vista que desconsidera a existência de 9 poltronas e considera a possibilidade de 7 pessoas para se sentarem na primeira poltrona, restando 6 para a segunda e assim sucessivamente (Figura 6). B6, apesar de não esclarecer o raciocínio utilizado, apresenta cálculos que sugerem um raciocínio semelhante.

Figura 6 – Resoluções da questão 1 que expressam a estratégia E5



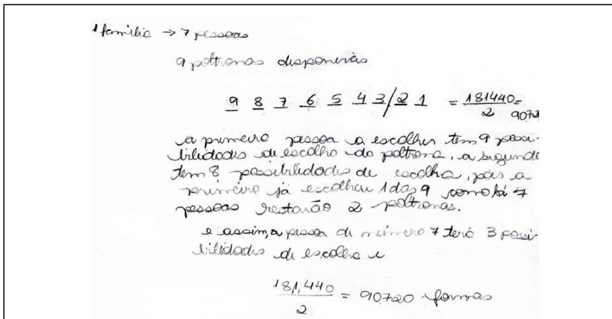
1 a) como existem nove poltronas vazias e não importa a ordem pode-se acomodar toda a família no voo com 7!
1 2 3 4 5 6 7 8 9 → poltronas
7 6 5 4 3 2 1 → pessoas
7 possibilidades da pessoa para 1ª poltrona, 6 possibilidades para a segunda porque a mesma pessoa não pode sentar em 2 poltronas ao mesmo tempo e assim por diante obtemos
7x6x5x4x3x2x1 = 5040
b) Este número pode ser calculado por 7!

Resolução do aluno B5

Fonte: Os autores.

B11 tenta apresentar uma organização dos dados, relacionada à E6, em que considera a existência de 9 possibilidades para a primeira pessoa sentar, 8 possibilidades para a segunda e assim sucessivamente. Desta forma, conclui em linguagem verbal que é necessário desconsiderar o (dois fatorial), em virtude das duas poltronas que permaneceriam vazias. Para tanto, ao *retirar* as duas poltronas, realiza uma divisão por 2 sem, no entanto, explicar a desconsideração do produto relacionado ao fatorial (Figura 7).

Figura 7 – Resolução da questão 1 que expressa a estratégia E6



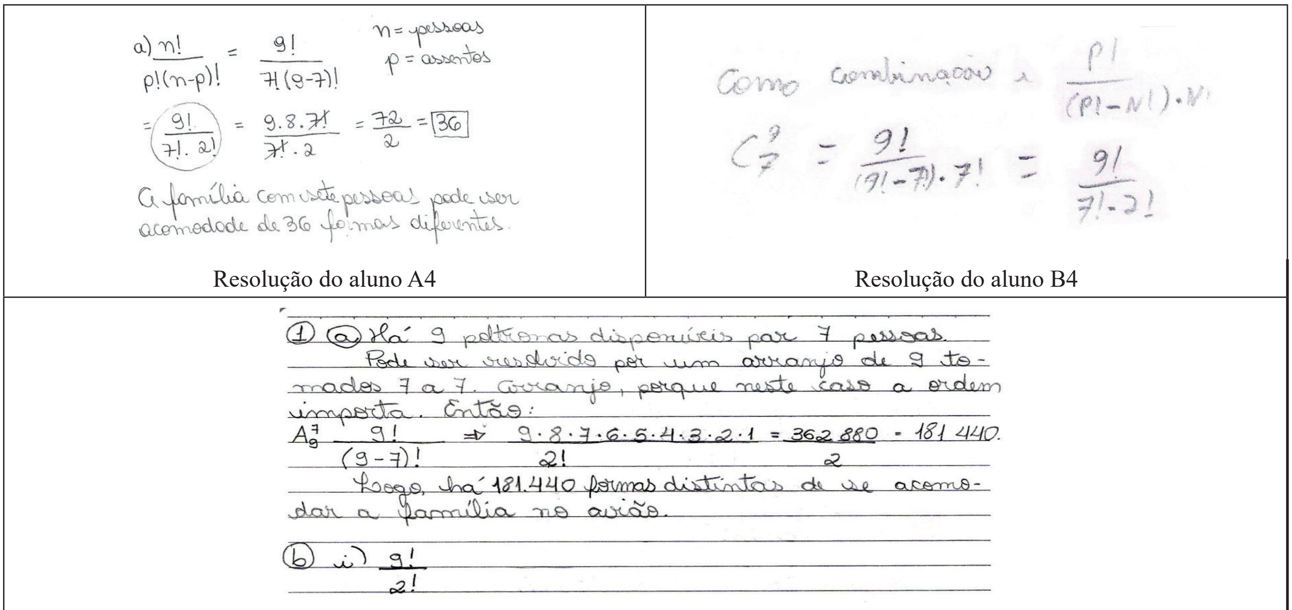
1 família → 7 pessoas
9 poltronas disponíveis
9 8 7 6 5 4 3/2 1 = 181440/2 = 90720
a primeira pessoa a escolher tem 9 possibilidades de escolha de poltrona, a segunda tem 8 possibilidades de escolha, pois a primeira já escolheu 1 das 9 como são 7 pessoas restarão 2 poltronas.
e assim, a pessoa de número 7 terá 3 possibilidades de escolha e
181440/2 = 90720 formas

Resolução do aluno B11

Fonte: Os autores.

As resoluções que partiam de um padrão previamente reconhecido para elaborar a estratégia de resolução, devidamente justificado, foram consideradas como E7. De modo geral, elas partem do algoritmo de resolução de combinações ou arranjos para situar esses padrões na situação em questão, a partir dos elementos e relações por ela oferecidos. A8 sugere isso ao identificar sua resolução com a letra C, revelando a compreensão da situação como uma combinação, ideia explicitada por B4, B8 e B12, com símbolos matemáticos e em linguagem verbal, fazendo a combinação de 9 poltronas, tomadas 7 a 7. A4 apresenta um procedimento semelhante, mas revela um equívoco quando, apesar de identificar *n* como a quantidade de pessoas e *p* como a quantidade de assentos, ao situar os valores no algoritmo , considera e . B3 e B10 resolvem corretamente a partir do algoritmo para arranjos. Contudo, enquanto B3 esclarece de maneira consistente, em linguagem verbal, os elementos que o levam a considerar a situação como um arranjo, B10 explica que sempre sobrarão duas poltronas e, equivocadamente, considera que a ordem não importa, apesar de ter resolvido a situação como um arranjo. A Figura 5 apresenta algumas destas resoluções.

Figura 8 – Resoluções da questão 1 que expressam a estratégia E7



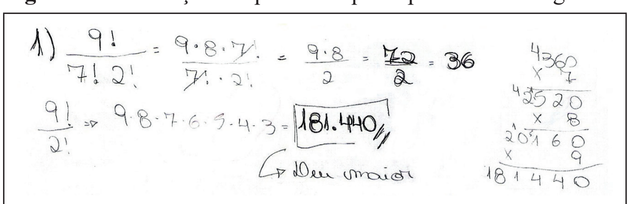
Resolução do aluno A4 | Resolução do aluno B4

Resolução do aluno B3

Fonte: Os autores.

Finalmente, B13 evidencia uma estratégia de tentativa e erro, E10, porque resolve uma combinação e um arranjo sugerindo não ter clareza sobre o algoritmo ou o procedimento combinatório a ser utilizado. Ao final, justifica a solução por meio do arranjo sob o argumento da importância da ordem, a qual implica um valor resultante maior (Figura 9).

Figura 9 – Resolução da questão 1 que expressa a estratégia E10



Resolução de B13

Fonte: Os autores.

A análise global das estratégias emergentes nas resoluções dos alunos à questão 1 aponta alguns elementos relevantes ao presente estudo. Sua característica como questão objetiva pode justificar a dificuldade de identificação de estratégias de resolução, já que muitos alunos parecem partir da resposta ao item (b) para resolver/explicar o item (a). Cabe salientar que este aspecto é predominante no Grupo A. Possivelmente isto pode ser decorrente de as circunstâncias da situação possibilitarem a aplicação direta de um algoritmo relacionado aos diferentes procedimentos combinatórios, a partir do arranjo ou de uma combinação associada a uma permutação.

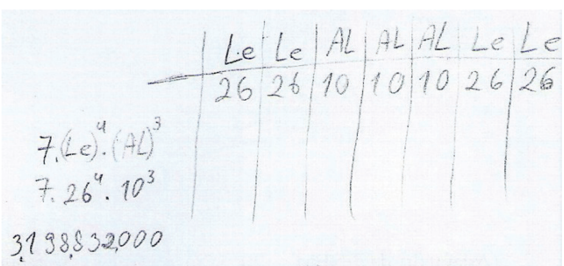
Evidencia-se, igualmente, uma preocupação mais explícita no Grupo B em esclarecer os raciocínios empregados e justificar seus processos de resolução com consistência e coerência, enquanto as resoluções do Grupo A, quando não limitados aos procedimentos aritméticos, apresentam explicações em linguagem verbal que não correspondem às demais representações utilizadas na resolução. Isto se evidencia, por exemplo, nas análises das resoluções do Grupo A, que expressam predominantemente inferências, enquanto o Grupo B oferece elementos explícitos para as discussões realizadas.

4.3 Circunstanciando as estratégias identificadas na resolução do item (a) da questão 2

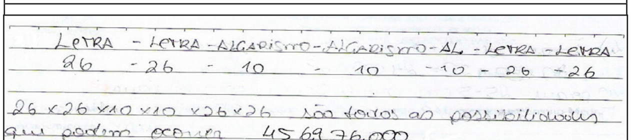
Nas análises das resoluções do item (a) da questão 2, identificamos a emergência de apenas duas das estratégias estruturadas no Quadro 1, nomeadamente E1 e E7. Salienta-se, ainda, a identificação de 8 resoluções, 4 no grupo A (40%) e 4 no grupo B (28,5%), que não permitiram a identificação de uma estratégia, seja por não ter sido resolvida ou por apresentar apenas valores, sem quaisquer representações que esclareçam os processos que os originaram.

A1, A6, B2, B5, B9 e B14 apresentam estratégias alicerçadas em representações visuais, que lhes permitem compreender a situação e organizar suas ideias, expressando, deste modo, estratégias consideradas como E1. A1 elabora uma representação para compreender a situação e estruturar os procedimentos aritméticos utilizados na resolução da situação. Contudo, indevidamente, considera que as letras e algarismos podem permutar nas sete posições, o que justifica sua multiplicação por 7. A6 elabora uma representação semelhante, mas considera a solução a partir da adição dessas diferentes possibilidades, desconsiderando o PFC. B2 elabora uma representação pictórica buscando compreender a situação, mas não apresenta resolução. Já B5, B9 e B14 utilizam o esquema elaborado para explicar e justificar o procedimento de resolução, a partir do PFC. A Figura 10 apresenta algumas dessas estratégias.

Figura 10 – Resoluções do item (a) da questão 2 que expressam a estratégia E1



Resolução do aluno A1

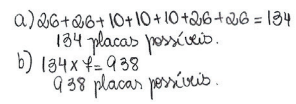


Resolução do aluno B5

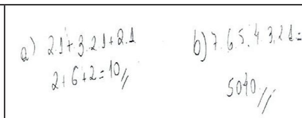
Fonte: Os autores.

Por sua vez, E7, relacionada ao emprego do raciocínio lógico, foi a estratégia predominante nas resoluções da questão 2, tanto para o item (a) quanto para o item (b) (ver Quadro 2). A3 e A9 apresentam uma adição de 26, quatro vezes, relacionada às possibilidades para letras; e 10, três vezes, relacionada aos algarismos, evidenciando a admissão de um padrão que fere o PFC. De outro modo, A4 reconhece o PFC e elabora uma estratégia coerente. Contudo, não esclarece por que considerou 9 algarismos, e não 10, como informado na situação. Por fim, A7 estabelece um padrão restrito às permutações, a partir dos elementos presentes nas imagens apresentadas como exemplos na situação, considerando apenas 2 possibilidades para as letras e 3 para os algarismos. B3, B7, B8, B10, B11 e B13, reconhecendo um padrão *a priori* alicerçado nas possibilidades para letras e algarismos e na anuência para repetição, indicam numericamente essas possibilidades e multiplicam todos os elementos a partir do PFC. Contudo, enquanto B10 e B13 restringem seus registros à aritmética, B11 salienta a importância da ordem, e B3, B7 e B8 circunstanciam, em linguagem verbal, os condicionantes que justificam seus procedimentos de cálculo. A Figura 11 apresenta algumas destas estratégias.

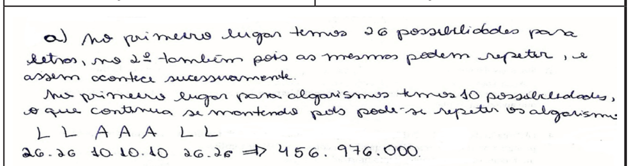
Figura 11 – Resoluções do item (a) da questão 2 que expressam a estratégia E7



Resolução do aluno A9



Resolução do aluno A7



Resolução do aluno B8

Fonte: Os autores.

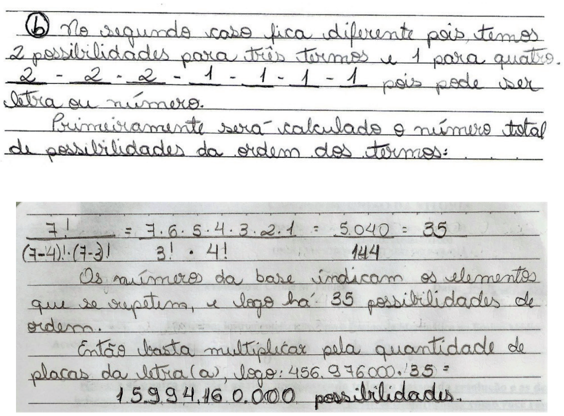
A análise global das estratégias emergentes nas resoluções dos alunos ao item (a) da questão 2 ratificam nosso apontamento em relação às estratégias empregadas em questões de natureza objetiva. A quantidade de resoluções em branco ou que não possibilitaram identificação de estratégias aumentou substancialmente na resolução à questão 2, quando comparada à questão 1. Outro aspecto relevante refere a identificação de uma diversidade menor de estratégias comparadas àquela. Possivelmente isto pode ter relação com o fato de se tratar de uma questão de natureza dissertativa. Contudo, observam-se igualmente respostas mais esclarecedoras, e que articulam as diferentes representações, no Grupo B, quando comparadas ao Grupo A.

4.4 Circunstanciando as estratégias identificadas na resolução do item (b) da questão 2

Nas análises das resoluções do item (b) da questão 2, também identificamos a emergência de apenas duas estratégias: E5 e E7.

Conforme evidenciado na figura 12, B3 faz uma representação que parece explicar as possibilidades de os dígitos das placas serem letras ou algarismos. Depois, calcula as possibilidades de formação de placas com 4 letras e 3 algarismos, permutando os 7 elementos e considerando a ordem. Contudo, justifica o quociente, não a partir de uma combinação, mas pela necessidade de desconsiderar placas com a mesma ordem de disposição de letras e algarismos.

Figura 12 – Resolução do item (b) da questão 2 que expressa a estratégia E5

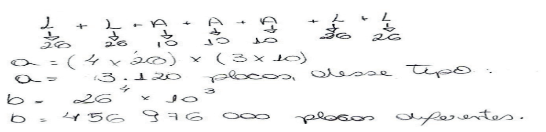

b) No segundo caso fica diferente pois temos 2 possibilidades para três termos e 1 para quatro.
2 - 2 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 pois pode ser letra ou número.
Primeiramente será calculado o número total de possibilidades da ordem dos termos:
$\frac{7!}{(7-4)!\cdot(7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3!\cdot4!} = \frac{5.040}{144} = 35$
Os números da base indicam os elementos que se repetem, e logo há 35 possibilidades de ordem.
Então basta multiplicar pela quantidade de placas da letra (a), logo: 456.976000·35 =
15994160.000 possibilidades.

Resolução do aluno B3

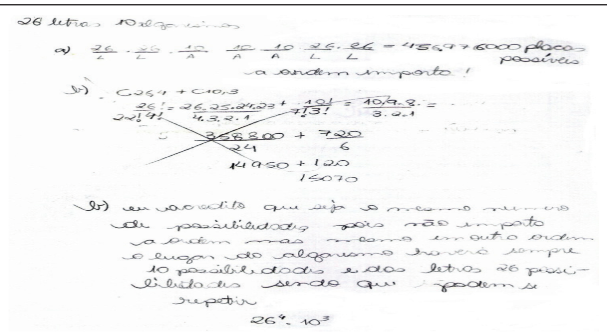
Fonte: Os autores.

Por outro lado, o raciocínio lógico emerge em diferentes resoluções, a partir do (re)conhecimento de padrões diversos. A1 utiliza o padrão identificado no procedimento do item (a) sem explicitá-lo, e realiza o produto , sugerindo compreender as quantidades de letras e algarismos presentes no formato da placa como aquelas possíveis. A3 tenta permutar as letras e algarismos e adiciona o produto ao produto . A6 e B1 resolvem o item (a) no item (b) e fazem o produto , sugerindo a utilização de um padrão relacionado à permutação de letras e algarismos nas posições da placa. A4 e A9 multiplicam o resultado do item (a) por 7. A7 resolve como (sete fatorial), sem esclarecer seu raciocínio. Igualmente, A8 resolve o item (b) como um quociente entre e , sem explicações complementares. B5 considera as permutações das 4 letras e dos 3 algarismos entre si nas placas; contudo, desconsidera o total de 7 posições na resolução. B8, embora explicite a acomodação de letras e algarismos nas placas, considera duas combinações: uma de 26 letras tomadas quatro a quatro e outra de 10 algarismos tomados três a três. Ao final, adiciona os resultados sem explicar o motivo. B9 e B11 julgam explicitamente ser uma situação semelhante àquela expressa no item (a) da questão. B13 determina a possibilidade de formação de placas com 3 algarismos e 4 letras. Contudo, ao invés de fazer o produto entre essas possibilidades e a quantidade de placas determinadas no item (a), faz a divisão, sem explicar o motivo.

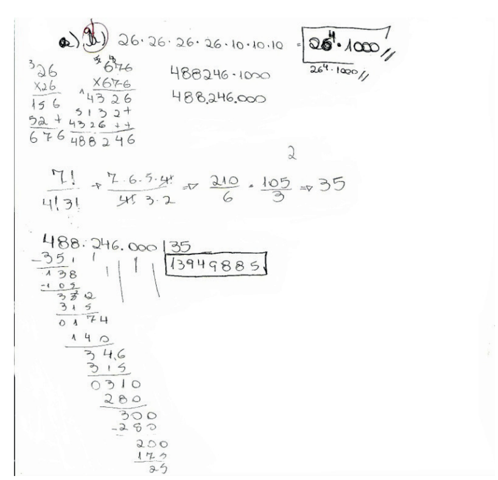
Figura 13 – Resolução do item (b) da questão 2 que expressa a estratégia E7


L + L + A + A + A + L + L
26 26 10 10 10 26 26
a = (4 x 26) x (3 x 10)
a = 3.120 placas desse tipo.
b = $26^4 \times 10^3$
b = 456 976 000 placas diferentes.

Resolução do aluno A6


26 letras 10 algarismos
a) 26/L · 26/L · 10/A · 10/A · 10/A · 26/L · 26/L = 456976000 placas possíveis
a ordem importa!
b) C26,4 + C10,3
26!/22!4! = 26.25.24.23/4.3.2.1 + 10!/7!3! = 10.9.8/3.2.1 =
358800/24 + 720/6
14950 + 120
15070
b) eu acredito que seja o mesmo número de possibilidades pois não importa a ordem mas mesmo em outra ordem o lugar do algarismo haverá sempre 10 possibilidades e das letras 26 possibilidades sendo que podem se repetir
$26^4 \cdot 10^3$

Resolução do aluno B11


a) b) 26·26·26·26·10·10·10 $\boxed{26^4 \cdot 1000}$
$26^4 \cdot 1000$
26 x26 = 676; 676 x676 = 488246
488246·1000
488.246.000
$\frac{7!}{4!\,3!} \to \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4!\,3\cdot2} \to \frac{210}{6}\cdot\frac{105}{3} \to 35$
488.246.000 | 35 = $\boxed{13949885}$

Resolução do aluno B13

As resoluções do item (b) da questão 2, além de apresentarem diversidade de estratégias de resolução bastante restrita, foram as que mostraram maior índice de resoluções incorretas e em branco. Tentando identificar possíveis causas, apontamos a característica da questão como uma possibilidade. Diferente dos demais analisados, o item (b) da questão 2 era o único que não permitia a aplicação direta de um algoritmo associado aos diferentes procedimentos combinatórios. Desta forma, os resultados evidenciam dificuldades de compreensão relacionadas à análise combinatória em ambos os grupos, as quais, pelas características dos registros apresentadas, mostram-se mais acessíveis e compreensíveis nas resoluções do grupo B, quando comparados ao grupo A.

5 Conclusão

As análises das estratégias empregadas pelos alunos na busca por solucionar as questões discutidas neste trabalho permitem identificar uma diversidade de estratégias de resolução, as quais, em conjunto com os procedimentos e representações diversas utilizadas no seu encaminhamento, evidenciam a mobilização de diferentes ideias na resolução de uma mesma questão. Contudo, para identificação dessa diversidade, para além de uma descrição acerca das diversas estratégias de resolução, revelaram-se essenciais, de um lado, o estabelecimento de elementos consistentes e elucidadores para a identificação da estratégia empregada em determinada resolução e, de outro, a presença de elementos claros nas resoluções dos alunos, que permitem este tipo de análise. Neste sentido, dois aspectos sobressaem em nosso estudo:

1. Mais do que descrever uma estratégia de resolução, considerando a pertinência da análise de estratégias ao processo pedagógico, o Quadro 1 significou elementos consistentes e coesos que possibilitaram compreender e analisar as estratégias empregadas pelos alunos, bem como suas implicações, limitações e potencialidades. Neste sentido, ele parece elucidar elementos promissores, complementares às definições das estratégias, a serem considerados em ações assentes nesta temática;
2. Parece fundamental e urgente o desenvolvimento de uma cultura matemática que encoraje o desenvolvimento de métodos próprios e de resolução, alicerçados na compreensão e articulação dos conhecimentos matemáticos dos alunos aos contextos das tarefas que lhes são propostas. Isto porque a articulação e a exploração de diferentes representações e procedimentos, os quais esclarecem a estratégia utilizada, ao revelar essa diversidade de ideias e compreensões, colabora para a ação pedagógica, na medida em que refere aspectos diversos de relações e conceitos matemáticos complexos.

Com relação ao segundo aspecto, a predominância dessa diversidade articulada e coerente no Grupo B aponta indícios de que os alunos que experienciaram o EEM não priorizam apenas a resposta final como solução da questão, mas se preocupam com o estabelecimento e esclarecimento dos caminhos que empregam no processo resolutivo, considerado aspecto também relevante para a solução. Isto, além de encorajá-los a transcender uma compreensão de matemática assente na aplicação de fórmulas e algoritmos, colabora, por exemplo, para a busca de alternativas diversas de resolução, as quais, ao evocar aspectos diferentes das relações matemáticas e de conceitos complexos associados à situação/questão, podem colaborar para sua compreensão e elaboração de conhecimento matemático. Talvez isso justifique o percentual superior de acertos do Grupo B em relação ao Grupo A, e sugere que a experiência com o EEM pode colaborar para o bom desempenho dos alunos em avaliações sistemáticas.

Do mesmo modo, a correspondência e articulação entre diferentes representações no decurso do encaminhamento de diferentes estratégias parecem constituir um elemento interessante para avaliação do conhecimento dos alunos. Isto porque, nas análises das resoluções, identificamos que a correspondência entre essas diferentes representações, especialmente da linguagem verbal com os demais registros empregados na resolução, constitui aspecto decisivo no êxito dos alunos. A comunicação matemática como dimensão fundamental do EEM pode influenciar esse aspecto, já que a linguagem que permeia as aprendizagens dos alunos nas diversas fases da aula significa elemento prioritário, também, nos relatórios de aula elaborados na disciplina de Instrumentalização.

Por outro lado, o estudo revela igualmente que a estratégia empregada inicialmente não determina o êxito ou o fracasso na resolução da questão, mas depende substancialmente dos procedimentos utilizados para encaminhá-la, e das representações que suportam os desdobramentos desses encaminhamentos. Além disso, os resultados também salientam que, mesmo em soluções/respostas erradas, identificam-se estratégias promissoras ao processo pedagógico, o que ratifica a relevância de práticas pedagógicas e avaliativas que priorizam o(s) processo(s) de resolução em detrimento da análise exclusiva da resposta final. Igualmente, apontam que a consideração apenas da solução final pode dizer pouco ou nada em relação ao efetivo conhecimento relacionado ao conteúdo em questão, em nosso caso, a análise combinatória. Neste sentido, nosso estudo sugere a relevância da mudança de foco nos processos avaliativos, seja no processo pedagógico em sala de aula ou em avaliações sistêmicas, quando se intenta identificar efetivamente o que os estudantes sabem (e o que não sabem), em detrimento de práticas que só servem à evidenciação de desconhecimentos.

A continuidade da investigação com outros grupos de alunos, com características semelhantes aos envolvidos neste estudo, envolvendo campos e conteúdos diversos da Matemática, pode confirmar estes indícios inicias.

Agradecimento

À Fundação Araucária e à Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa da Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR pelo auxílio financeiro que suportou este estudo.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte. *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Buriasco, R. L., Ferreira, P. E. A., & Ciani, A. B. (2009). Avaliação como prática de investigação (alguns apontamentos). *Boletim de Educação Matemática*, *22*(33), 69-95.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Cavalcanti, C. (2001). Diferentes formas de resolver problemas?. In K. S. Smole, & M. I. Diniz. (Orgs.), *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática* (pp. 121-149). Porto Alegre: ArtMed.

Chapman, O., & Heater, B. (2010). Understanding change through a high school mathematics teacher's journey to inquiry-based teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(6), 445-458.

Cyrino, M. C. C. T. (2016). *Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática*: *elaboração e perspectivas*. Londrina, Brasil: EDUEL.

D'Ambrosio, B. S. (1989). Como ensinar matemática hoje? *Temas e Debates, 2*(2), 15-19.

Dostál, J. (2015). Theory of problem solving. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *174,* 2798-2805.

Escheverría, M. D. P. P. (1998). A solução de problemas em Matemática. In J. I. Pozo. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender* (pp. 43-65). Porto Alegre: ArtMed.

Guberman, R., & Leikin, R. (2013). Interesting and difficult mathematical problems: changing teachers' views by employing multiple-solution tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), 33–56.

Musser, G. L., & Schaughnessy, J. M. (1997). Estratégias de resolução de problemas na matemática escolar. In S. Krulik, & R. E. Reys. *A resolução de problemas na matemática escola* (pp. 188-201). São Paulo: Atual.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

Oliveira, H., & Carvalho, R. (2014). Uma experiência de formação, com casos multimédia, em torno do ensino exploratório. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 465-490). Lisboa: IEUL.

Oliveira, H., & Cyrino, M. (2013). Developing knowledge of inquiry-based teaching by analysing a multimedia case: one study with prospective mathematics teachers. *SISYPHUS – Journal of Education, 1*(3), 214-245.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 19-53.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM mathematics Education*, *39*, 419–430.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 13-30). Lisboa: IEUL.

Posamentier, A. S., & Krulik, S. (2015). *Problem-solving strategies in mathematics.* Singapura: World Scientific.