

Desenvolvimento de Professores e Aprendizagem dos seus Estudantes¹

Teacher Development and Student Learning

Analúcia D. Schliemann^{a*}; David W. Carraher^b; Montserrat Teixidor-i-Bigas^a

^aTufts University, USA.

^bTERC Institute, USA.

*E-mail: ana.schliemann@tufts.edu

Submetido em: mar. - 2017

Aceito em: ago. - 2017

Resumo

Este estudo descreve e avalia o impacto de um programa para o desenvolvimento de professores de matemática que (a) enfatiza álgebra, funções e suas várias representações como elementos de integração e aprofundamento de tópicos do currículo de matemática, (b) salienta a integração entre a notação algébrica, a representação gráfica e as relações entre quantidades físicas e (c) promove o ensino de conceitos e representações matemáticas através de discussões em sala de aula, a partir do raciocínio e representações intuitivas propostas pelos alunos. A contribuição do programa é analisada em termos de mudanças em sala de aula e resultados dos alunos em testes padronizados de avaliação no estado.

Palavras-chave: Desenvolvimento de Professores. Álgebra. Funções. Ensino Fundamental. Álgebra Inicial.

Abstract

This paper describes and evaluates the impact of a mathematics teacher development program that (a) highlights algebra, functions, and their representations as a thread that unifies and deepens the content of the mathematics curriculum, (b) emphasizes the integration among algebra notation, graphical representation, and relationships between physical quantities, and (c) promotes the teaching of mathematical content and representations through classroom discussions, taking into account the reasoning and intuitive representations proposed by students. The contribution of the program is analyzed in terms of changes in classroom teaching and students' results in state mandated standard tests.

Keywords: Teacher Development. Algebra. Functions. Middle School. High School. Early Algebra.

1 Introdução

O programa para o desenvolvimento de professores de matemática do Instituto Poincaré de Educação Matemática baseia-se numa ideia simples, isto é, que o conceito de funções e suas representações fazem parte, de forma implícita ou explícita, da maior parte do currículo de matemática para o Ensino Fundamental e Médio e constituem um recurso poderoso, em potencial, para a melhoria do ensino da matemática. Ressaltamos a expressão, “em potencial” visto que a simples inclusão do tópico de funções no currículo não garante a melhoria do ensino. O que propomos é que as funções prometem contribuir, não como um novo conteúdo curricular, mas sim como uma lente através da qual o professor e os alunos podem reinterpretar os tópicos do currículo atual, desde a aritmética até a álgebra. Para tal, será necessário que o professor esteja preparado para introduzir novas atividades em sala de aula e promover discussões de acordo com essa nova visão dos tópicos da matemática, de forma a engajar os

alunos levando em consideração suas formas de raciocinar e representar relações entre quantidades físicas e eventos.

Como tentaremos mostrar, o apelo das funções consiste em: (1) unificar representações e tópicos que têm sido tradicionalmente tratados de forma isolada, (2) apoiar à criação de problemas e atividades que evoquem generalizações matemáticas por parte dos alunos—sobretudo generalizações passivas de representações gráficas e algébricas e (3) estabelecer, desde o início, vínculos claros entre a aritmética e a álgebra.

Neste estudo descrevemos os fundamentos teóricos e empíricos do programa e avaliamos seu impacto sobre a forma de ensinar dos professores e sobre o desempenho de seus alunos em testes de matemática.

Há várias décadas, pesquisadores em Educação matemática vêm propondo que funções, parte central da álgebra, devem ser incluídas no ensino de álgebra (Dubinsky & Harel, 1992, Schwartz & Yerushalmy, 1992). Booth (1988),

¹ Este estudo faz parte do Poincaré Institute for Mathematics Education, projeto financiado pela National Science Foundation (NSF) através do auxílio #0962863, concedido a Tufts University, TERC e nove distritos escolares nos Estados Unidos. Agradecemos a John Zuman, Mary Caddle, Corinne Glennie e o grupo de pesquisa do Poincaré Institute por contribuições na coleta e análise de dados. Opiniões, conclusões e recomendações dos autores não refletem, necessariamente, as ideias da NSF. Uma versão anterior desta análise foi apresentada no 13th International Congress of Mathematical Education, em Hamburgo, Alemanha, julho de 2016.

Kaput (1995), Carraher, Schliemann & Brizuela (2005) e Schoenfeld, (1995) enfatizam que uma abordagem para o ensino de matemática, inclusive da aritmética, com base em funções e suas representações, pode enriquecer e promover a aprendizagem e compreensão da matemática através de todos os anos do Ensino Fundamental, minimizando dificuldades provavelmente criadas por abordagens centradas em procedimentos sintáticos de computação para a aritmética e a álgebra.

Em estudos longitudinais anteriores sobre a introdução de conceitos algébricos a partir do que corresponde, nos Estados Unidos, ao terceiro ano do Ensino Fundamental, constatamos a viabilidade e os resultados positivos de intervenções em sala de aula coerentes com a abordagem da matemática como álgebra, funções e suas múltiplas representações (Brizuela & Schliemann, 2004, Carraher & Schliemann, 2007, 2016, Carraher, Schliemann & Brizuela, 2005, Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008, Carraher, Schliemann, Brizuela & Earnest, 2006, Schliemann & Carraher, 2016; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007, 2012, Schliemann, Carraher, Goodrow, Caddle, & Porter, 2013).

No entanto, mudanças curriculares coerentes com a abordagem que propomos exigem uma preparação dos professores diferentes do que tradicionalmente se encontra nas Universidades. Como documentado por Hohensee (2017), participantes em um curso de preparação de professores enfrentam desafios conceituais em tarefas de identificação de relações funcionais em expressões algébricas e têm dificuldade em distinguir variáveis de valores fixos desconhecidos, em reconhecer raciocínio algébrico expresso sem uso da representação algébrica e em criar situações que correspondam a expressões algébricas que incluam subtração.

O programa que desenvolvemos, em colaboração com pesquisadores em Matemática e em Física, visa preparar professores para um ensino que promova a aprendizagem e compreensão de matemática através de todos os anos do Ensino Fundamental e Médio. O programa baseia-se no estudo do conteúdo matemático sob a perspectiva de funções e nas atividades em sala de aula implementadas e descritas em nossos estudos longitudinais sobre a introdução de conceitos algébricos a partir do terceiro ano do Ensino Fundamental I (ver descrição das atividades, em português, em Schliemann & Carraher, 2016).

Do ponto de vista pedagógico, o programa baseia-se na teoria de desenvolvimento cognitivo de Jean Piaget e nas ideias de Vygotsky sobre o papel de instrumentos, práticas culturais e interação social no desenvolvimento e aprendizagem. Coerente com esta posição, o programa enfatiza atividades em sala de aula que, inicialmente, solicitam dos estudantes que considerem, representem e discutam situações ou problemas verbais que descrevem relações entre quantidades físicas em situações científicas ou da vida diária. A partir das propostas dos estudantes, novas representações e procedimentos

matemáticos são introduzidos e discutidos, de forma a possibilitar sua apropriação e compreensão.

2 O Programa

A colaboração entre matemáticos, pesquisadores em educação matemática e pesquisadores em física (Teixidor-i-Bigas, Schliemann, & Carraher, 2013) e discussões com professores e administradores em distritos escolares culminou com o desenvolvimento de três cursos de pós-graduação, oferecidos ao longo de três semestres escolares pelos Departamentos de Matemática e de Educação da Universidade de Tufts, em Medford e por TERC, instituição de pesquisa em Cambridge, ambas no estado de Massachusetts, como parte do Instituto Poincaré para a Educação Matemática. Os cursos incluem tópicos do currículo escolar, como operações aritméticas, fração, razão, e proporção, com ênfase no raciocínio algébrico e em relações funcionais e suas representações, aspectos centrais para a integração entre os tópicos.

2.1 Implementação e conteúdo do programa

De 2011 a 2015, o programa ofereceu os três cursos a professores de matemática da quinta à nona série (equivalente no Brasil a desde o fim do Ensino Fundamental I até o início do Ensino Médio). Três grupos de 60 professores cada, em nove distritos escolares no Nordeste dos Estados Unidos (cinco em Massachusetts, três in New Hampshire, e um em Maine). A partir do segundo semestre de 2015 os cursos vêm sendo oferecidos a professores terceira à décima série em outros distritos.

Após um encontro face-a-face de dois dias de trabalho intensivo no campus da Universidade, os cursos são oferecidos online e através de encontros mensais. Durante cada semestre, os professores participam de discussões em linha e de encontros semanais em suas escolas. Os grupos de discussões em linha, de oito a 10 professores de diferentes escolas, contam com a participação de um instrutor do projeto que analisa as respostas aos problemas propostos para cada semana e levanta questões que visam contribuir para a reflexão e progresso dos participantes. Instrutores do projeto também visitam as escolas uma vez por mês para discussões sobre entrevistas e atividades em sala de aula planejadas por grupos de três a cinco professores e implementadas individualmente.

Os professores dedicam cerca de 10 horas por semana às atividades dos cursos, lendo e discutindo material escrito, analisando vídeos, demonstrações eletrônicas e exemplos de lições, resolvendo problemas de matemática, entrevistando estudantes, discutindo como os estudantes interpretam e representam conceitos matemáticos, e planejando, implementando e analisando o resultado de atividades em sala de aula.

O material dos cursos baseia-se em funções e suas representações como elemento unificador de tópicos do

currículo escolar, tanto do ponto de vista matemático como da perspectiva do ensino e aprendizagem. Isto requer um enfoque sobre as relações entre conjuntos de quantidades, em lugar da computação de resultados de operações sobre valores numéricos isolados. A análise de relações entre conjuntos de quantidades leva ao uso de tabelas de dados e à adoção de variáveis para qualquer valor possível em uma relação, mesmo entre estudantes do terceiro ano.

Os cursos enfatizam o uso de várias representações para uma mesma situação ou conceitos matemáticos, incluindo verbalizações, a reta numérica, tabelas de funções, gráficos no espaço Cartesiano e notação algébrica, com o objetivo de aprofundar a compreensão de operações aritméticas, frações, proporções, e procedimentos baseados na sintaxe da aritmética e da álgebra. Equações e inequações são representadas algebricamente e como a comparação entre duas funções, podendo ser solucionadas através de transformações dos respectivos gráficos no espaço Cartesiano.

O primeiro curso aborda frações e a ideia de número como representação de quantidades físicas até à concepção mais abstrata de número como objeto matemático. Os professores trabalham com frações ordinárias e decimais, com números racionais e irracionais e com as várias formas de representar números, por exemplo, como pontos na reta numérica ou como vetores. Textos e atividades em sala de aula abordam as operações aritméticas como funções. O segundo curso aborda transformações na reta numérica e no espaço Cartesiano como passos para a compreensão de funções e introduz a solução de equações como a comparação entre duas funções. O terceiro e último curso compara funções lineares e não lineares aprofundando o estudo de funções não lineares e da razão incremental e inclui a solução de sistemas de equações lineares em duas variáveis. Questões relacionadas à divisibilidade são incluídas no estudo dos números (curso 1) e na solução de equações de Diophantus e fatorização de polinômios (curso 2).

O programa enfatiza as relações entre conceitos e a compreensão de procedimentos de computação em lugar de pura memorização de algoritmos. Conceitos e representações matemáticas são desenvolvidos a partir da discussão sobre fenômenos científicos e do dia-a-dia. O uso de diferentes representações permite engajar estudantes em discussões, considerando suas próprias abordagens e dando relevo a aspectos diferentes dos conceitos e situações estudados.

2.1.1 Exemplos de material e atividades do programa

Os exemplos seguintes ilustram como o material, vídeos, demonstrações e atividades dos cursos são apresentados e discutidos pelos professores.

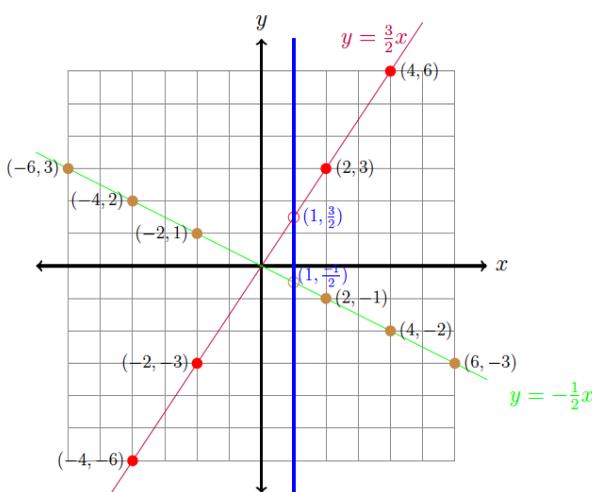
Primeiro exemplo: frações como inclinações de retas no espaço cartesiano.

O material escrito dos cursos discute frações e suas representações mais comuns, incluindo descrições verbais, pizzas, área, e barras, como também a representação de

frações equivalentes como pontos na reta numérica e como gráficos de funções lineares (ver Figura 1). Desta forma, desde cedo o estudo de frações está relacionado ao estudo de razões, proporções, funções, variáveis e álgebra.

A Figura 1 mostra, na reta numérica, $x = 1$, (ao invés do plano cartesiano), duas frações, uma equivalente a $\frac{3}{2}$ e a outra $\frac{1}{2}$. A fração $\frac{3}{2}$ corresponde a pontos na linha $y = \frac{3}{2}x$, por exemplo, $(1, \frac{3}{2})$. Identificando-se a linha (vertical), $x = 1$, com a reta numérica, o ponto de intersecção da linha $y = \frac{3}{2}x$ com a linha $x = 1$ leva ao ponto correspondente ao número $\frac{3}{2}$ na reta numérica. Isto põe em relevo a correspondência direta entre esta representação de frações como inclinação de gráficos e a representação mais tradicional de frações como um número real que corresponde aos pontos na reta numérica. Esta nova representação também permite interpretar frações a partir da correspondência entre a intersecção da linha com os pontos da grade unitária.

Figura 1 - Representação de frações equivalentes como gráficos de funções lineares no espaço Cartesiano.



Fonte: Os autores.

Este modelo permite discutir tópicos mais difíceis, como frações negativas e a ordem das frações. O mesmo modelo é utilizado em cursos posteriores na discussão de funções crescentes e decrescentes e na explicação das regras de sinais para a multiplicação de números (por exemplo, o produto de dois números negativos é positivo).

Os participantes dos cursos consideravam a seguinte propriedade de frações: Se duas frações são equivalentes, então a fração obtida pela adição dos numeradores e a adição dos denominadores é uma terceira fração equivalente às duas primeiras. O seguinte exemplo de uma situação onde a adição de numeradores e denominadores faz sentido constitui um dos problemas resolvidos pelos participantes nos grupos de discussão online.

Os alunos de um curso de artesanato são divididos em dois grupos. O grupo amarelo recebe uma sacola com contas que são divididas igualmente entre todos os participantes. O grupo vermelho recebe outra sacola e, da mesma forma, dividem as contas igualmente entre os alunos, não sobrando nenhuma conta. Acontece que cada aluno, no grupo vermelho ou no grupo amarelo, recebe

o mesmo número de contas. Percebe-se intuitivamente que, se os dois grupos de crianças fossem reunidos em um só grupo e se as contas nas duas sacolas fossem colocadas em uma única sacola, o número de contas recebidas por cada aluno seria o mesmo. Mostre de forma algébrica que este é na verdade o caso. Você pode explorar ideias iniciais utilizando valores específicos para o número de contas e de alunos em cada grupo e produzindo tabelas para exemplificar a situação. Mas no final gostaríamos de ver que você pode explicar a situação de forma geral, talvez utilizando variáveis em lugar de números.

Enquanto a maioria dos professores analisa esta questão utilizando valores específicos, muitos introduzem variáveis e álgebra em suas explicações. Uma das professoras incluiu este problema em uma aula para alunos do quinto ano como parte de um dos projetos de fim de curso desenvolvidos por grupos de três a cinco professores e implementado individualmente, com análise posterior de vídeos e propostas de alterações para futuras implementações.

Segundo Exemplo: Equações.

Um objetivo central do segundo curso era a consideração de equações como a comparação de duas funções. Na terceira unidade do curso, com base no estudo de transformações de funções e equações nas semanas anteriores, o material escrito e vídeos se concentravam neste objetivo.

Durante a semana os professores liam e discutiam exemplos sobre como interpretar cada passo das manipulações algébricas para chegar-se à solução do problema, em termos de transformações nos pares de gráficos representando as duas funções comparadas e de mudanças na situação descrita no problema.

Em um dos problemas a serem discutidos e resolvidos durante a semana, os professores consideram a seguinte situação:

Um caminhão de entregas da fábrica de sorvetes Leakit sai de Boston à meia noite dirigindo na direção de Maine a uma velocidade constante de 40 milhas por hora. No mesmo momento, o gerente da Leakit sai da fábrica em Providence, a 50 milhas a sul de Boston, a uma velocidade constante de 50 milhas por hora, seguindo também para Maine, via Boston.

Os professores devem escrever uma equação cuja solução é o número de horas desde meia-noite até o momento em que os dois veículos se encontram. Note que equação, por si, não representa tempo e sim posição. Eles também devem explicar o que os números na equação representam, resolver a equação utilizando a álgebra e comparar os gráficos de funções, mostrar como cada passo para resolver a equação corresponde a mudanças nos gráficos, identificando as funções obtidas a cada passo e relacionando cada um dos passos a mudanças na situação.

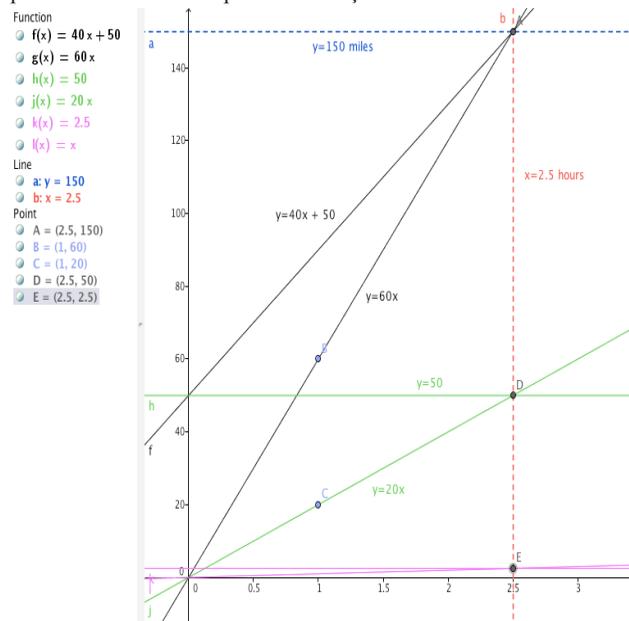
As respostas iniciais de cada professor em um grupo são colocadas no espaço online e discutidas pelo instrutor e participantes do grupo. Neste processo, cada um pode refinar suas respostas e desenvolver uma melhor compreensão sobre as relações entre a representação algébrica e gráficas e a

situação.

A Figura 2 mostra a representação gráfica da equação $60x = 40x + 50$, como também as equações intermediárias produzidas nos vários passos até chegar-se à solução, $x = 2.5$. Vários professores produziram representações semelhantes. A seguinte resposta de um professor ilustra como alguns deles descreveram a relação entre a situação no problema e as transformações das duas funções, transformações que levam a uma representação visual da solução para a equação:

Essentially, the first transformation takes away the distance that they both covered at the same rate: $40x$. Essencialmente, a primeira transformação retira a distância que ambos cobriram na mesma taxa: $40x$. What we did was to divide up the distance that the manager drove at 60 mph into two sections: one that he drove at 40 mph (which we then “matched up” or cancelled with the truck’s side), and then determine how long he would have to drive at 20 mph in order to cover the 50 extra miles that he would have to cover from Providence to Boston. O que nós fizemos foi dividir a distância que o gerente dirigiu a 60 mph em duas partes: uma em que ele dirigiu a 40 mph (que nós então fazemos corresponder ou cancelamos com o caso do caminhão), e depois determinamos quanto tempo ele iria ter que dirigir a 20 mph para cobrir as 50 milhas extras que ele teria que cobrir de Providence a Boston.

Figura 2 - Representação gráfica da equação $60x=40x+50$ e dos passos intermediários para sua solução.



Atividades pedagógicas.

Pedagogical activities related to solving equations as the comparison between two functions included examining a videotaped lesson (from previous studies on early algebraic reasoning; see Carraher, Schliemann & Schwartz, 2008) and implementing a classroom activity about the following problem: As atividades pedagógicas relacionadas à resolução de equações como a comparação entre duas funções incluíram a análise de uma aula gravada em vídeo (parte de estudos anteriores sobre o raciocínio algébrico precoce; (Carraher,

Schliemann & Schwartz, 2008) e a implementação de uma atividade em sala de aula sobre o seguinte problema:

Mike has some money in his wallet and \$8 in his hand. Mike tem algum dinheiro em sua carteira e US \$8 em sua mão.

Robin has 3 times as much money as Mike has in his wallet. Robin tem 3 vezes mais dinheiro do que Mike tem em sua carteira.

What can you say about the amounts of money Mike and Robin have? O que você pode dizer sobre as quantias de dinheiro que Mike e Robin têm?

Teachers adapt and implement this lesson and, depending on their students' grade levels, discuss the representation of the statements in the problem using variables, data table, graphs of the two functions, and equations. Os professores adaptam e implementam esta lição e, dependendo dos níveis de seus alunos, discutem a representação das afirmações no problema usando variáveis, tabelas de dados, gráficos das duas funções e equações. They then determine how much money could be in the wallet for Mike and Robin to have the same total amount, by inspecting the table and/or the graphs and/or by solving the equation $x + 8 = 3x$. Em seguida eles determinam quanto dinheiro a carteira de Mike poderia conter para que Mike e Robin tivessem a mesma quantidade total, inspecionando os dados da tabela, os gráficos e/ou resolvendo a equação $x + 8 = 3x$.

Planning for classroom activities. Planejamento de atividades em sala de aula.

The following excerpt exemplifies the kind of instructions teachers were given before preparing for planning and implementing a classroom lesson, a major assignment at the end of each course: O trecho a seguir exemplifica as instruções dadas aos professores antes de planejar em grupo e implementar individualmente, ao fim de cada curso, uma aula para seus alunos, sobre um tópico escolhido pelo grupo:

Together with participants in your group, decide on the focus of the learning activity you will be planning. Juntamente com os participantes do seu grupo, decida sobre o conteúdo da atividade que você estará planejando.

Designing a learning activity for this unit (transformations of the line and of the plane) will be more challenging than it was for the other two units (fractions and divisibility). Planejar uma atividade de ensino para esta unidade (transformações da linha e do plano) será mais desafiador do que era para as outras unidades (frações e divisibilidade). Transformations are most likely not topics in your curriculum. As transformações provavelmente não fazem parte do currículo da série em que você ensina. Therefore, you will need to make a special effort to connect them to something you do teach. Portanto, você precisará fazer um esforço especial para conectar esses tópicos aos do seu currículo. Remember also, you don't have to teach your students what transformations are. Lembre-se também que você não tem que ensinar a seus alunos o que são transformações. Think of your activity as one that will help students understand how mathematical operations can be represented visually or geometrically. Pense em sua atividade como uma lição que ajudará os alunos a entenderem como operações matemáticas podem ser representadas visualmente ou geometricamente.

Keep the following questions in mind from the very

start. Mantenha as seguintes perguntas em mente desde o início do seu trabalho.

(1) Will your activity and its questions engage students in trying to make sense of some mathematical question(s) of significance? (1) Sua atividade e suas perguntas envolverão os alunos na tentativa de entender algumas questões significativas de matemática?

(2) Will your activity lead students to make conjectures? (2) A atividade levará os alunos a fazer conjecturas? To wonder? Imaginar? Make distinctions? Fazer distinções? Try to show something is true or false? Mostrar que algo é verdadeiro ou falso? Compare their thinking to that of others? Comparar seu pensamento com o dos outros? Note patterns and relations in sets of data? Observar padrões e relações em conjuntos de dados? Make connections between one sort of representation and another (eg a statement, a graph, a table, a diagram...)? Fazer conexões entre um tipo de representação e outro (por exemplo, uma declaração verbal, um gráfico, uma tabela, um diagrama)?

(3) Will you learn something new about your students' reasoning that will help you in improving the way you teach this content? (3) Você vai aprender algo novo sobre o raciocínio de seus alunos que pode lhe ajudar a melhorar a forma como você ensina este conteúdo? Will the activity provide you with documented evidence of their reasoning that you can examine and share with others, as you discuss how to improve the activity? Será que a atividade vai fornecer exemplos de raciocínio que você pode examinar e compartilhar com os outros e discutir modos de melhorar a atividade?

2.2 Impacto do Programa

Avaliadores externos do Intercultural Center for Research in Education (INCRE) evaluated changes in classroom teaching by directly observing teachers as they each taught one lesson of their choice, at the start and at the end of the three course series. Avaliadores externos do Centro Intercultural de Pesquisa em Educação (INCRE – Intercultural Center for Research in Education) avaliaram mudanças no *ensino em sala de aula* observando diretamente cada professor ensinando uma lição de sua escolha, no início e no final da série de três cursos. They also observed a random sub-sample of teachers six months and a year after program completion. Os avaliadores também observaram uma amostra aleatória de professores seis meses e um ano após a conclusão do programa. Observations were ranked according to the Reformated Teaching Observation Protocol (RTOP) and included reliability-tested measures of (a) teachers' support for students' discussions and uses of multiple representations, (b) the in-class time teachers spent addressing students' mathematical reasoning, and (c) teachers' design and discussion of mathematics problems from various perspectives and representations. As observações foram classificadas de acordo com o Protocolo de Observação de Ensino Reformado (RTOP - Reformated Teaching Observation Protocol) e incluíram medidas testadas quanto à sua confiabilidade sobre (a) o apoio dos professores para as discussões e uso de múltiplas representações pelos estudantes, (b) o tempo em sala-de-aula em que os professores consideraram o raciocínio matemático dos estudantes e (c) a concepção e discussão de problemas matemáticos por parte

de professores a partir de várias perspectivas e representações.

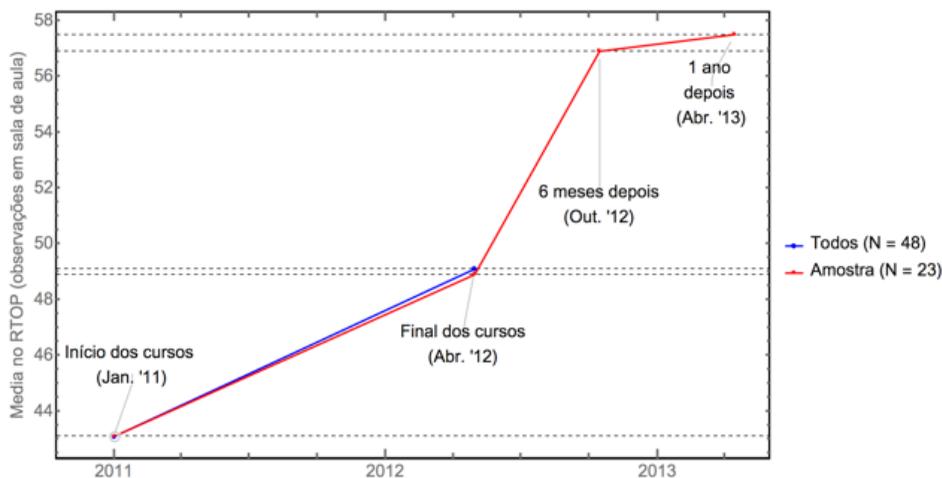
Student learning was analyzed in terms of changes in the percentage of proficient and advanced students of grades 5 to 8 in the Massachusetts Comprehensive Assessment System (MCAS) test, a standardized, state-mandated measure of mathematical proficiency. A *aprendizagem dos alunos* foi analisada em termos de mudanças na percentagem de alunos do quinto ao oitavo ano classificados como proficientes e avançados com base nos resultados de teste escrito do Sistema de Avaliação Compreensiva de Massachusetts (MCAS – Massachusetts Comprehensive Assessment System), uma medida obrigatória da aprendizagem de matemática no estado. Teachers in five Massachusetts districts started the courses in the spring of 2011. By the end of the 2013-2014 school year, 34% of those in grades 5 to 8 in the five target districts had completed the three courses. Os professores em cinco distritos de Massachusetts começaram os cursos na primavera de 2011. No final do ano escolar de agosto de 2013-2014, 34% dos professores atuando da quinta à oitava série nos cinco distritos participantes haviam completado os três cursos. Each of these districts was matched to five districts of similar number of students, demographic variables, and MCAS results in 2010-2011. Cada um destes distritos foi comparado a cinco distritos semelhantes em termos de

número de alunos, variáveis demográficas e resultados no teste aplicado em junho de 2011. We compared changes in the results of target districts from 2010-2011 to 2013-2014 to changes in similar districts and in the whole state over the same period. Comparamos as mudanças nos resultados dos distritos participantes, desde o ano escolar de 2010-2011 até o ano 2013-2014, com as mudanças em distritos de comparação e em todo o estado durante o mesmo período.

2.3 Mudanças na Sala de Aula

Systematic classroom observations (RTOP) by the external evaluators offer clear evidence that the first cohort of teachers in the program had improved their ways of teaching mathematics (Figure 1). Observações sistemáticas pelos avaliadores externos em sala de aula (Figura 3) revelaram que o grupo de professores participando do programa apresentou um aumento médio de 6.0 pontos nos scores do RTOP e um efeito significativo de tamanho (0,30, $p < .05$) ao final dos três cursos. Furthermore, the additional in-class observations revealed that RTOP scores improved six months after the teachers completed the program. Além disso, os dados coletados para um sub-grupo de 23 professoras revelaram escores ainda mais altos seis meses e um ano após os professores completarem o programa.

Figura 3 - Resultados médios no RTOP para um grupo de 48 professores participantes no início e no final dos cursos e, para uma amostra de 23 professores do mesmo grupo, seis meses e um ano mais tarde



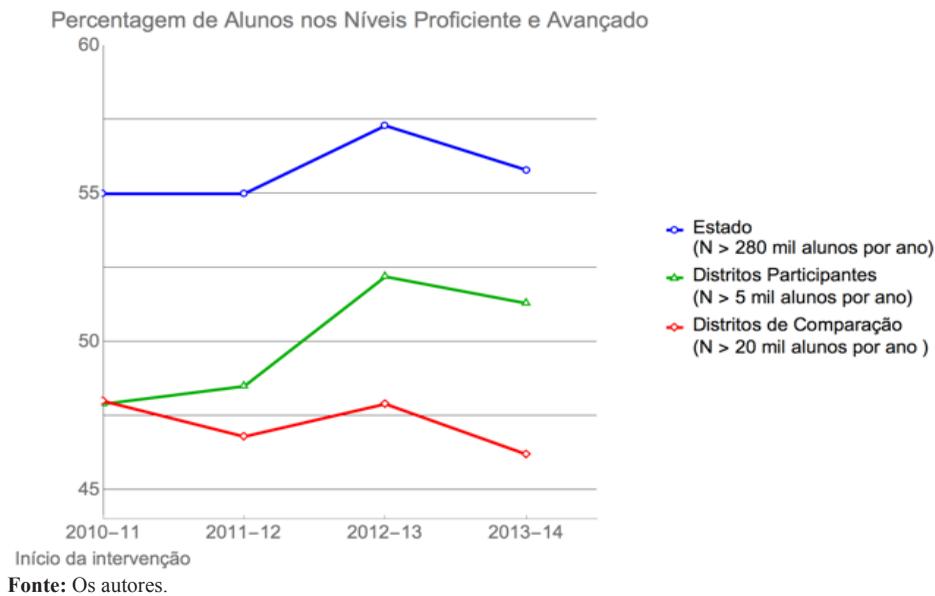
Fonte: Os autores.

2.4 Aprendizagem dos Estudantes

Concerning student learning, when the program started (spring of 2011, Figure 2), the percentages of students at the Proficient and Advanced levels in the target districts were similar to those of matched districts. Quando o programa começou (primeiro semestre de 2011), as percentagens de alunos nos níveis Proficiente e Avançado nos distritos participantes (Figura 4) eram semelhantes aos dos distritos de comparação. Three years later, target districts had narrowed the gap with regard to the state from 7.1 to 4.5 percentage

points and had surpassed matched districts by 5.1 points, with changes significantly higher than changes in matched districts ($W=144, z=2.68, p=.0037$). Três anos depois, os distritos participantes haviam reduzido a diferença em relação ao estado de Massachusetts de 7,1 para 4,5 pontos percentuais. Os alunos dos distritos participantes também haviam superado os alunos dos distritos de comparação em 5,1 pontos percentuais. A diferença entre as mudanças nos distritos participantes e nos distritos de comparação foi significativa ($W = 144, z = 2,68, p = .0037$).

Figure 4 - Percentagem de alunos nos níveis Avançado e Proficiente no teste MCAS.

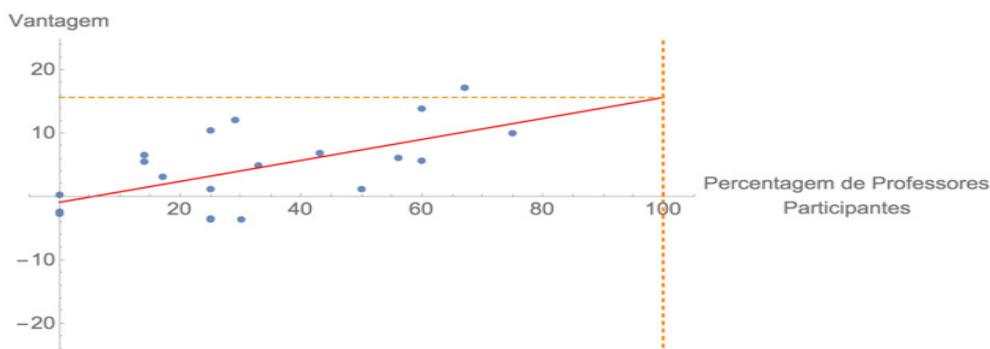


These results actually underestimate the impact of the program on students, given that target district results included all of their students, even if their teachers had not taken part in the program. Esses resultados na verdade subestimam o impacto do programa sobre os alunos, uma vez que os resultados dos distritos participantes incluíam todos os seus alunos, mesmo que seus professores não houvessem participado do programa. In fact, the districts varied in the percentage of teachers who had taken the three courses.

A percentagem de professores que haviam participado do programa variava entre os distritos e entre os anos escolares. This allowed investigating whether performance differences between target and matched districts varied as a function of the districts' percentages of teachers who completed the program. Isto permitiu investigar se as diferenças de desempenho entre os distritos participantes e os distritos de comparação, para cada ano escolar, variaram em função das percentagens dos professores que haviam completado o programa (Figura 5). The preponderance of data points in quadrant I of Figure 3 highlights the generally superior results of target districts as compared to the matched districts. A

preponderância de pontos no quadrante I da Figura destaca os resultados geralmente superiores dos distritos participantes em comparação com os respectivos distritos de comparação. The regression line shows that the advantage was, overall, directly proportional to the percentage of teachers who had completed the program, in each grade level, in each district. A linha de regressão mostra que a vantagem foi globalmente proporcional à percentagem de professores que completaram o programa, em cada ano escolar, em cada distrito: QWe found that the greater the percentage of teachers in a district, the greater the advantage in MCAS scores over matched districts (see Figure 3). Quanto maior a percentagem de professores em cada ano escolar de cada distrito participante, maior a diferença entre estes e os respectivos distritos de comparação. This advantage was significantly correlated with the number of teachers who had taken the courses (Spearman's $r = .54, p = .007$). Esta vantagem está significativamente correlacionada com o número de professores que tinham participado do programa (Spearman's $r = 0,54, p = 0,007$), evidência adicional de que as diferenças de desempenho entre os distritos participantes e os distritos de comparação resultaram da participação no programa.

Figure 5 - A vantagem dos distritos participantes em 2014 sobre os distritos de comparação, em função da percentagem de professores que completaram o programa. Each point represents one of four grade levels in five different districts (two points are hidden by other points). Cada ponto representa um dos quatro anos escolares (de 5 a 8) em cinco distritos diferentes (dois pontos estão ocultos por outros pontos).



2.2.1 Discussão

Even though the focus of the courses was on functions and algebraic reasoning, the impact of the program was found among teachers using a variety of textbooks across a wide range of grade levels and among students taking a test on all content areas of the grades 5 to 8 curriculum. OOOO impacto do programa foi encontrado entre os professores usando uma variedade de livros didáticos em todas as áreas do conteúdo de matemática do quinto ao oitavo ano escolar. This suggests that improving teachers understanding of mathematics using a functions approach to curriculum topics, promoting their understanding of students' ways of thinking and learning, and providing them with opportunities for jointly planning lessons and participating in discussions about mathematics and about classroom teaching leads to better teaching and student performance. Isso se deu através de um programa intenso e de longa duração, que aborda vários aspectos do conteúdo matemático e de recursos pedagógicos. É difícil determinar como diferentes aspectos do programa, tomados isoladamente, contribuíram para mudanças no ensino e na aprendizagem. O que parece provável é que os ganhos entre professores participantes e seus alunos resultem da integração, entre outros, dos seguintes aspectos.

1. *The length of the program* : Unlike most professional development initiatives, this program lasts for three 15 week semesters with an expected workload of 10 hours per week. 1. *A duração do programa*: Ao contrário da maioria dos programas de desenvolvimento de professores, este programa tem a duração de três semestres de 15 semanas cada, com uma carga de trabalho esperada de 10 horas por semana. This allows for teachers broader and deeper view of a large number of topics, for understanding and appropriation of new concepts and representations, and for changing their ways of teaching. Isso permite aos professores uma visão mais ampla de um grande número de tópicos, a compreensão e apropriação de novos conceitos e representações, e mudanças em suas maneiras de ensinar. As teachers themselves expressed to external evaluators, time to mature was important in their development. Como os próprios professores expressaram aos avaliadores externos, o tempo para amadurecer foi importante no desenvolvimento de novas formas de ensinar.

2. *The interconnection and depth of analysis of mathematical topics afforded by the algebra and functions approach* : This allowed for a deeper understanding of arithmetic operations, fractions, ratio, proportion, and geometry and appropriation of multiple mathematical representations. 2. *A interligação e a profundidade da análise dos temas matemáticos oferecidas pela abordagem de álgebra e funções*: Isto permitiu uma compreensão mais profunda de operações aritméticas, frações, razão, proporção e geometria e a apropriação de várias representações matemáticas.

3. *The integration of mathematics and pedagogical content* : Pedagogical materials and activities were presented in tandem with mathematics content and took into account students' ways of approaching specific topics and representing everyday and science situations they had access to. 3. *A integração da matemática e do conteúdo pedagógico*: Materiais pedagógicos e atividades em sala de aula foram apresentadas em conjunto com o conteúdo de matemática. A abordagem do conteúdo matemático com

base em funções e suas representações levou a formas de abordar temas específicos do currículo e a engajar os alunos no uso de várias representações para situações científicas ou do dia-a-dia. In their discussions and assignment reports teachers revealed their surprises about their students initial approaches and how questions they raised had helped their students. Os exemplos de nossos estudos anteriores baseados nas mesmas idéias ajudaram os professores a desenvolver lições que levavam em consideração as propostas iniciais dos alunos e onde, através de discussões, novos conceitos e representações eram introduzidos. Em suas discussões e relatórios, os professores revelaram surpresas sobre as abordagens iniciais dos alunos e sobre como as perguntas baseadas em ideias promovidas pelos cursos ajudaram seus alunos.

4. *The focus on concepts and understanding rather than algorithms and computations* : There was no attempt to teach how to write formal mathematics, as is the case for many mathematics courses developed for undergraduates. 4. *O foco em conceitos e compreensão ao invés de algoritmos e cálculos*: O programa não enfocou apenas o ensino da matemática formal, como é o caso de muitos cursos de matemática desenvolvidos para alunos de graduação. But teachers were made aware of the necessity to clarify their ideas and justify their assertions in a way that works in any situation rather than for specific numbers and of the need to be precise and clear in their assumptions. Em lugar de enfatizar procedimentos automáticos, os professores foram conscientizados sobre necessidade de esclarecer suas idéias e justificar suas afirmações e de ser preciso e claro em suas suposições. Preliminary data from ongoing analyses show that, in the post-assessment, teachers seem far more likely to give general arguments and use variables to justify a statement than they were in the pre-assessment. Dados preliminares de análises em curso mostram que, em testes escritos dados no fim do programa, os professores parecem muito mais propensos a desenvolver argumentos gerais e a usar variáveis para justificar uma afirmação, do que no teste inicial.

5. *Teachers interactions with their colleagues* : Throughout the courses, teachers held online and face-to-face discussions with their peers as they solved mathematical problems and as they planned, implemented, discussed, and evaluated lessons they taught. 5. *Interações entre professores*: Ao longo dos cursos, em discussões on-line e face-a-face com os seus pares, os professores resolveram problemas matemáticos e planejaram, implementaram, e avaliaram aulas que eles ministravam individualmente. In their written evaluations of the courses at the end of each semester, teachers highlighted this as one of the most important features of the program. Em suas avaliações escritas dos cursos no final de cada semestre, os professores destacaram esta como uma das características mais importantes do programa.

6. *The intense interaction with instructors* : Course assignments required a preliminary draft and at least one improved version, written after each teacher received feedback from instructors and colleagues. 6. *A intensa interação com instrutores*: Os cursos exigiam, em várias atitudes, a apresentação de respostas preliminares ou the um anteprojecto e, após feedback dos instrutores e colegas, pelo menos uma versão final aperfeiçoada. The amount of feedback provided by the group mentors was fairly high compared with more standard courses but, still, differed from group to group due to different instructors' styles. A quantidade de feedback fornecido pelos mentores do grupo foi bastante alta em comparação com cursos regulares mas, ainda assim, diferiu de grupo para grupo, devido aos diferentes estilos de instrutores. We are currently examining whether teachers in groups that received more feedback made more progress. Atualmente, estamos examinando se os

professores em grupos que receberam mais feedback fizeram mais progresso. This information is relevant and likely to be applicable to other on-line teaching, given its repercussion on the cost of this form of instruction in terms of number of required instructors. Esta informação é relevante e susceptível de ser aplicável a outros programas de ensino online, devido ao impacto do número de instrutores necessários sobre o custo desta forma de instrução.

We are aware of the need for further analyses to clarify how the different aspects of the program contributed to teacher and student performances. Estamos cientes da necessidade de novas análises para esclarecer como os diferentes aspectos do programa contribuíram para o desempenho dos professores e alunos. Our data on student assessment were taken from general reports by grade and by district. Nossos dados sobre a avaliação dos alunos foram retirados dos relatórios gerais por grau e por distrito. Issues of confidentiality prevented us from obtaining individual student reports and to analyze how their results related to their teacher's performance in course activities. Questões de confidencialidade nos impediram de obter relatórios individuais de alunos e analisar como seus resultados se relacionavam com o desempenho de seus professores nas atividades do curso. Fine grained analysis of teachers' online work, reports, program assessments, and classroom videos are currently underway and will provide further information on the matter. Análises mais detalhadas do trabalho on-line dos professores, relatórios, avaliações de projetos e vídeos em sala de aula estão em andamento e fornecerão mais informações sobre o o impacto do programa.

Referências

- Bautista, A. (Ed.) Teacher professional development: International perspectives and approaches. *Psychology, Society and Education*, 7(3).
- Booth, L. R. (1988). Children's difficulties in beginning algebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Ed.), *The ideas of algebra, K-12: 1988 Yearbook* (pp. 20-32). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Brizuela, B.M., & Schliemann, A. D. (2004). Fourth graders solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33-40.
- Carraher, D.W. & Schliemann, A. D. (2007) Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (ed.) *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Vol II. Charlotte, NC: Information Age Publishing, pp. 669-705.
- Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (2016). Powerful ideas in elementary mathematics education. In L. English & D. Kirshner (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education*. New York: Taylor & Francis.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Brizuela, B. (2005). Treating operations as functions. In D. Carraher & R. Nemirowsky (Ed.). *Monographs of the Journal for Research in Mathematics Education, XIII*.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Ed.). *Algebra in the early grades*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M., & Earnest, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *J. Res. Mathem. Educ.*, 37(2), 87-115.
- Desimone, L.M. (2009). Improving Impact Studies Of Teachers' Professional Development: Toward better conceptualizations. *Educ. Res.*, 38(3), 181-199.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (Ed.) (1992). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Levi, L. (2001). Capturing teachers' generative change: A follow-up study of professional development in mathematics. *Am. Educ. Res. J.*, 38, 653-689.
- Hill, H. C. & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's Mathematics Professional Development Institutes. *J. Res. Mathem. Educ.*, 35(5), 330-351.
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge. *J. Res. Mathem. Educ.*, 39(4), 372-400.
- Hill, H. C., Rowan, B., Ball, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *Am. Educ. Res. J.*, 42(2), 371-406
- Hohensee, C. (2017). Preparing elementary prospective teachers to teach early algebra. *J. Mathem. Teacher Educ.*, 20, 231-257.
- Kaput, J. (1995). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, MA.
- Mcmeeking, L. B., Orsi, R., & Cobb, B. (2012). Effects of a teacher professional development program on the mathematics achievement of middle school students. *J. Res. Mathem. Educ.*, 43(2), 159-181
- Saxe, G. B., Gearhart, M., & Nasir, N. S. (2001). Enhancing students' understanding of mathematics: A study of three contrasting approaches to professional support. *J. Mathem. Teacher Educ.*, 4, 55-79.
- Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (2016). O lugar da **álgebra** no Ensino Fundamental. In E, Martins, & S, Lautert (Ed.). *Diálogos sobre o ensino, a aprendizagem e a formação de professores*. Rio de Janeiro: Autografia Edição e Comunicação.
- Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Schliemann A. D., Carraher D. W., Brizuela B. M. (2012). Algebra in elementary school. In L. Coulange & J.-P. Drouhard (Ed.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire: Bilan et perspectives. Special Issue of Recherches en Didactique des Mathématiques* (pp. 109-124). France: La Pensée Sauvage.
- Schliemann, A.D., Carraher, D.W., Goodrow, A., Caddle, M., & Porter, M. (2013). Equations in elementary school. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Ed.). *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, pp. 161-168. Kiel, Germany: PME.
- Schoenfeld, A. (1995). Report of Working Group 1. In C. B.

Lacampagne (Ed.), *The Algebra Initiative Colloquium: Vol. 2. Working Group Papers* (pp. 11-18). Washington, DC: U.S. Department of Education, OERI.

Schwartz, J. & Yerushalmy, M. (1992). Getting students to function on and with algebra. In E. Dubinsky & G. Harel (Ed.). *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Washington: Mathematical

Association of America.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.

Teixidor-I-Bigas, M., Schliemann, A. D., & Carraher, D. W. (2013). Integrating disciplinary perspectives: The Poincaré Institute for Mathematics Education. *The Mathematics Enthusiast*, 10(3), 519-562.