How To Learn To Understand Mathematics?

Raymond Duval

Université du Litoral Côte d´Opale, França.
E-mail: duval.ray@wanadoo.fr
Submitted in: mar. - 2017
Accepted in: aug. - 2017

Abstract

The cognitive core process of mathematical activity is the recognition of a same object in two semiotic representations whose respective contents have nothing in common with each other. It is also the recurrent and insuperable difficulty of comprehension in learning mathematics and the main impediment to solving problems for most students. The theory of registers provides a cognitive analysis of the way of working and thinking in mathematics. It highlights the key cognitive factors to be taken into account in Mathematics Education for all students up to the age of 16. To give an insight into the theory this paper focuses on two topics. How to introduce letters and elementary algebra? How to learn to solve problems in mathematics? And to avoid the confusion of words arising in Mathematics Education whenever we talk about « theories », we shall show how to analyze in terms of registers the mathematical tasks related to these two topics. This allow us to identify the cognitive thresholds to be crossed to understand and to solve problems in mathematics. Analyzing mathematical activity in terms of registers is quite different from the prevailing mathematical view. This concerns the hidden face of mathematical activity and not its exposed face. We are broaching here the crucial issue about teaching mathematics to all students up to the age of 16. What should be its objectives and priority areas?

Keywords: Register. Transformation of Semiotic Representation. Conversion. Treatment. Discursive operation.

1 Introduction

La notion de *registre de représentation sémiotique* a été progressivement élaborée pour répondre à la question : comment apprendre à comprendre en mathématiques ? Dans le cadre d'un enseignement des mathématiques commun pour tous les élèves jusqu'à 16 ans, cette question reste la question cruciale, aussi bien pour les élèves que pour les enseignants. Au point de départ, la notion de registre s'était imposée comme une méthode d'observation et d'analyse des productions des élèves. Il s'agissait de voir si les élèves pouvaient reconnaître un même objet mathématique dans deux représentations sémiotiques différentes, soit à la fin d'une séquence d'enseignement et, plus encore après plusieurs mois ou à la fin d'un cycle d'enseignement. La première exploration avait porté sur deux types de représentations sémiotiques différents : les graphiques et les équations. Les élèves, pouvaient-ils passer facilement d'un type de représentation sémiotique à un autre, *non pas avant mais à la fin d'une séquence d'activité et plus encore à la fin d'un cycle d'enseignement* (Duval, 1988)?

Cette question, elle se pose évidemment partout et à tous les niveaux. En géométrie, où l'on deux types de représentation sont simultanément ou alternativement mobilisés : le langage des définitions et des théorèmes et les figures ou « dessins». On la retrouve surtout comme le premier pas à faire dans la résolution de n'importe quel problème. Autrement dit, avec cette question on touche à la manière mathématique de travailler. Les questions « comment apprendre à comprendre en mathématiques ? » et « comment travaille-t-on en mathématiques ? » sont finalement la même question.

La notion de registre de représentation sémiotique s'est avérée être un outil précieux pour répondre à cette double question. Car elle a permis de dégager les facteurs cognitifs qui déterminent la manière mathématique de travailler, et qui sont les premiers facteurs à prendre en compte pour organiser un enseignement des mathématiques au Primaire et au Collège. Cette notion a donné lieu à beaucoup d'incompréhension. Du syntagme nominal « registre de représentation sémiotique », on a retenu un seul mot. Soit le mot « représentation », et on a opposé les représentations sémiotiques qui seraient extérieurs aux représentations mentales qui seules seraient liées à la compréhension ! Soit le mot « sémiotique », et on a confondu la notion de registre avec les distinctions et les classifications de Peirce sur les signes et les *representamens.* On a aussi réduite la notion de registre à l'idée que pour introduire les concepts mathématiques, il faudrait utiliser plusieurs représentations différentes. Ce qui à l'expérience ne marche jamais, si on fait les observations à l'échelle de plusieurs mois ou d'un cycle ! Enfin, cette notion a suscité une certaine méfiance ou un même un rejet. Car si on entrait dans l'analyse sémio-cognitive de l'activité mathématique, que cette notion de « registre de représentation sémiotique » permet de mettre en œuvre « on ne ferait plus faire de mathématiques en classe aux élèves» !

Je vais donc commencer par expliquer la théorie des registres en prenant deux exemples d'analyse sémio-cognitive de l'activité mathématique : celui de l'introduction et de l'utilisation de lettres dans l'algèbre élémentaire et celui de la résolution de problèmes. Puis je décrirai les deux premiers seuils à d'abord faire franchir aux élèves pour introduire et enseigner l'algèbre élémentaire. Enfin j'expliquerai pourquoi l'activité mathématique présente deux faces totalement différentes et pourquoi l'objectif prioritaire de l'enseignement des mathématiques aux élèves de 6 à 16 ans devrait être le développement des manières de voir, de raisonner, de dire et d'explorer, qui sont spécifiques aux mathématiques et qui vont contre celles spontanément pratiquées en dehors des mathématiques.

2 Exemples D'analyse des Activités Proposées Pour Introduire les Lettres Dans la Résolution de Problèmes de Dénombrement ou D'arithmétique

L'algèbre enseignée aux élèves de 11 à 16 ans va de *l'introduction des lettres à la résolution d'équations du premier degré et du second degré*. Elle est associée à la résolution de problèmes. Et elle est aussi mise en relation avec les graphes cartésiens de fonctions linéaire. Autrement dit, pour introduire l'algèbre élémentaire, on recourt à des registres différents. La question didactique n'est pas de savoir quel est le registre le plus accessible pour les élèves, mais de voir la complexité semio-cognitive de l'articulation de deux registres de représentation, quels qu'ils soient. Car, d'une part, le registre de la langue naturelle est nécessairement pour poser des problèmes arithmétiques, ou pour donner soit la consigne d'une activité de dénombrement, soit l'objectif de l'activité. Et d'autre part, la résolution exige que l'on passe dans un ou dans deux autres registres pour résoudre le problème. Voici deux exemples.

1) Résolution d'un problème arithmétique : *Um jornal e seu suplemento custam 2 reais. O jornal custa 1 real a mais que seu suplemento. Quanto custa o jornal ?*
2) Généralisation du dénombrement des jetons d'une configuration polynomiale dans le contexte de son développement défini par une procédure d'accroissement.

Figure 1 - Tâche empirique de dénombrement de l'accroissement d'une configuration polygonale

Um procedimento de desenvolvimento de uma representação dada.			
Descrição de ***CADA Representação Obtida.***	**1**	**4**	**9**
Descrição numérica dos aumentos sucesivos	**1**	**+ 3**	**+ 5**

2.1 l'Analyse en termes de REGISTRES: trois niveaux totalement différents

Pour l'analyser toutes les activités proposées en vue d'introduire l'algèbre élémentaire, nous devons distinguer trois niveaux totalement différents différent dans toute production mathématique, que ce soit dans la recherche, dans les documents didactiques, dans le travail en classe ou dans le travail individuel des élèves : le niveau purement sémiotique, le niveau mathématique et le niveau cognitif.

2.1.1.1 Le niveau immédiatement observable des types de représentations sémiotiques

Trois types de représentations sémiotiques sont mobilisés en algèbre élémentaire : le langage naturel, les expressions symboliques qui ne peuvent que s'écrire, et les représentations cartésiennes. Mais il est important de voir que les expressions symboliques combinent trois types de « signes» : les chiffres, les lettres et les symboles d'opération et de relation.

Figure 2 - Trois registres de représentations sémiotiques.

Mots *Oral/ écrit* **Langage Naturel**	**Chiffres** (*écriture*) **Systèmes de Numération**	**Lettres** (*écriture*) **Alphabets**	**Symboles** d'opération et de relation **« Langage » Sy.**	**Points, droites, courbes** **Système de Coordonnées**

Les registres de représentation sémiotique des systèmes producteurs de représentations sémiotiques. Ici nous avons la langue naturelle qui permet d'énoncer des phrases (déclarations, questions, etc.) les écritures symboliques qui permettent de former des expressions incomplètes ((2 +2), (8/4), 2x) ou des expressions complètes (2 X 2 =4)) et les graphiques cartésiens (droites, courbes, surfaces).

2.1.1.2 Le niveau des objets et des propriétés mathématiques représentés

Il s'agit bien évidemment des propriétés et des objets mathématiques *tels que chacun de ces trois registres permettent de les représenter.* Nous pouvons donc ajouter une deuxième ligne au tableau ci-dessus.

Figure 3 - Représentations des propriétés et objets mathématiques dans les trois registres

Mots *Oral/ écrit* **Langage Naturel**	**Chiffres** (*écriture*) **Systèmes de Numération**	**Lettres** (*écriture*) **Alphabets**	**Symboles** d'opération et de relation **«Langage» Sy.**	**Points, droites, courbes** **Système de Coordonnées**
Qualifiant des : **1. nombres *par leurs propriétés*** **2. Quantités** ou **grandeurs** **3. *Relations*** *entre nombres*	**Désignant** **1. UN nombre** **2. UNE valeur**	**Statut de** : **1. Inconnue** **2. Constante** **3. Variable**	**Expressions complètes** ***formant*** une **Formule** ou une **Equation**	**Visualisation** de **Polynomes** qui sont ou ne sont pas **des Fonctions**

On peut faire une observation en comparant les deux lignes du tableau. Les «objets» mathématiques (propriétés, relations, nombres) peuvent être représentés dans les trois registres**.** Ainsi les termes de propriété de nombres qui relèvent du registre de la langue naturelle, par exemple « *pair* » ou « *impair* », sont important pour généraliser une procédure. Dans le registre des écritures symboliques, il faut utiliser une lettre ayant un statut de variabe pour pour généraliser, par exemple « *2x* » ou « *2x +1*». Et dans le registre des graphiques cartésiens il faut focaliser son regard sur *la pente de la droite tracée*. On voit tout de suite la première question qui se pose. *Est-ce que les élèves peuvent tout de suite reconnaître la possibilité de convertir chacune de ces trois représentations possibles dans l'une des deux autres ?*

2.1.1.3 Le niveau des opérations sémio-cognitives à faire pour pouvoir mettre en équation les données d'un problème.

Ce niveau est indépendant de celui des concepts et des contenus mathématiques enseignés. Ils concernent *les opérations sémio-cognitives* qui sont spécifiques à chacun de ces trois registres et *dont il faut avoir pris conscience pour pouvoir comprendre comment on travaille en algèbre*. Car le rapport — soit de compréhension soit de production — entre le premier et le deuxième niveau se fait à partir de la prise de conscience de ces opérations sémio-cognitives. Autrement dit, qu'il s'agisse seulement d'utiliser des formules littérales, ou au contraire de mettre en équations les données d'un problème d'une situation réelle, ou davantage encore, de résoudre une équation ou d'en trouver la ou les solutions, l'introduction de l'algèbre élémentaires doit d'abord viser la prise de conscience des différentes opérations sémio-cognitives. Nous pouvons donc ajouter une troisième ligne. Naturellement on aurait tout aussi bien la placer entre la première et la deuxième liste, ou même avant la première.

Figure 4 - La face exposée et la face cachée de l'activité mathématique.

MOTS *Oral/ écrit* **Langage Naturel**	**CHIFFRES** (*écriture*) **Systèmes de Numération**	**LETTRES** (*écriture*) **Alphabets**	**SYMBOLES** d'opération et de relation **«Langage» Sy.**	**Points, droites, courbes Système de Coordonnées**
Qualifiant des : **1. nombres *par leurs propriétés*** **2. Quantités** ou **grandeurs** **3. *Relations*** *entre nombres*	**Désignant** **1.UN nombre** **2. UNE valeur**	**Statut de** : **1. Inconnue** **2. Constante** **3. Variable**	**Expressions complètes** ***formant*** une **Formule** ou une **Equation**	**Visualisation** de **Polynomes** qui sont ou ne sont pas **des Fonctions**
Opérations discursives de Designation	***Calcul arithmétique***	**Condensation Semantique** *de listes de nombres* et **re-designation fonctionnelle**	**opérations de Substitution d'expressions *calcul formel* RESOLUTION**	**Opérations d' Extrapolation**

Les deux premières lignes correspondent à ce que nous avons appelé « la face exposée» de l'activité mathématique. La troisième ligne correspond au contraire à « face cachée » de l'activité mathématiques. Dans l'organisation des programmes comme dans les recherches, on privilégie le niveau d'analyse mathématique (ligne 2). Et dans l'organisation des recherches didactiques, on pris en compte d'y ajouter aussi la première ligne, puisque l'utilisation de représentations sémiotiques très différentes fait nécessairement partie de la face exposée des mathématiques. Mais on ignore sur la « face cachée », ou se trompe sur sa nature. Là, il n'y a ni concept, ni représentations mentales, ni connaissances, mais des opérations sémio-cognitives, c'est-à-dire des gestes intellectuelles qu'il faut s'être appriés. Sinon tout langage reste muet, toute figures reste aveugle, toute écriture de formule ou d'équation reste statique ou inerte. On ne sait pas quoi en faire et si on nous explique on ne peut comprendre pourquoi çà marche ou, au contraire, pourquoi ce qu'on croyait ne pouvait pas marcher.

2.2 Analyse du premier exemple d'activité : l'utilisation de lettres pour résoudre un problème arithmétique

Ce premier type d'activité mobilise le registre de la langue naturelle (Figure 4 col. 1) et celui des écritures symboliques (col. 2-4). Il s'agit de convertir ma description verbale des données en une expression symbolique qui utilise non seulement des chiffres mais des lettres. Les premières opérations sémio-cognitives sont donc ici *des opération de désignation des données du problèmes.* Nous avons trois types de désignation possible des données. Elles déterminent la marge horizontale du tableau ci-dessous. Mais l'utilisation d'une lettre pour pouvoir désigner deux valeurs inconnues, il faut recourir à la désignation fonctionnelle. Et *pour pouvoir écrire une égalité, il faut avoir deux désignations différentes d'une même valeur.*

Ce sont ces deux opérations discursives, sans lesquelles on ne peut pas « *mettre* les données d'une problème *en équation* », qui déterminent la marge verticale du tableau ci-dessous.

Figure 5 - Conversion des données verbales d'un énoncé en écriture d'une « équation »

	Designação Verbal Fig. 4. col. 1	**Designação** Numerica Fig. 4 col. 3	**Re-Designação Literal** Fig. 4. col 4
Designação **Direta**	***Custo do jornal*** ***Custo do suplemento*** ***Custo dos dois***	.. **?** .. … **?** … **2**	**a** **b** **(a + b)**
Designação Indireta ***descritiva*** (lingua **FUNCIONAL** (letras)	o jornal ***custa .. mais que*** o suplemento	**(… + 1)**	**(b + 1)**
Dupla Designação de um mesmo objeto	« ***um jornal e seu suplemento o custo dos dois***	**2**	**(b+1) + b** **E** **2**
Equivalência référencial (equações)			**2b +1 = 2**

On voit donc la complexité sémio-cognitive de la résolution d'un problème additif dont l'énoncé en langue naturelle est pourtant très simple. Pour éviter la difficulté de tous les énoncés en langue naturelle, on a cherché à les remplacer par des observations sur des configurations polynomiales comme dans le deuxième exemple d'activité (ci-dessus Fig. 1). Mais alors on se heurte non seulement à la difficulté de la désignation fonctionnelle, mais aussià celle de la reconnaissance des unités figurales (sous-figures de base) sur lesquelles le dénombrement doit porter (Duval 2011). Autrement dit, quel que soit le type d'activité choisi, on mobilise toujours au moins deux registres différents et le premier obstacle pour les élèves est la conversion des représentations. Comment apprendre à reconnaître dans un énoncé les syntagmes nominaux et verbaux, ou dans des configurations géométriques les unités figurales, ce qui va correspondre à une expression symbolique dans le registre de écritures symboliques (Fig. 4, col. 2-4) ? Vouloir introduire les lettres comme des inconnues, ou une généralisation d'observations, envoie la grande majorité des élèves dans le mur. Car les conversions requises dans toutes les activités mathématiques exigent que les élèves aient déjà pris conscience d'opérations sémio-cognitives qui ne sont pratiquement jamais mobilisées dans les autres disciplines. On ne peut donc pas espérer que les lettres introduites comme des inconnues dans le cadre d'un problèmes puissent devenir ensuite des variables. Et comment s'étonner que les élèves, à la fin d'un enseignement commun de l'algèbre au Collège, ne dépassent pas en fait le stade de l'utilisation de formules, comme en physique, *à condition que la présentation des données d'un problème soit congruente à la formule qui doit être utilisée.* Dans les évaluations PISA elle est donnée et il n'y a aucune équation à poser ou à résoudre !

La tâche empirique de dénombrement (ci-dessus, Fig.1) semble didactiquement plus simple que les problèmes dit « verbaux», puisqu'elle court-circuite la complexité du langage naturel. Mais elle s'avère vite être au moins aussi difficile. Car, non seulement elle exige l'opération discursive de re-désignation fonctionnelle (ci-dessus, Fig. 2, col. 3), mais le registre de visualisation géométrique, qui vient remplacer celui de la langue naturelle, soulève les mêmes difficultés de reconnaissance des sous-figures pertinentes que dans les problèmes de géométrie Duval (2011).

3 Les deux Premiers Seuils à D'abord Faire Franchir Aux Elèves Pour Introduire et Enseigner L'algèbre Elémentaire

Les deux registres clés pour l'algèbre élémentaire sont évidemment celui des écritures symboliques (Fig. 4, col. 32-3) et celui de la langue naturelle (col. 1), ne fût-ce que pour le vocabulaire mathématique concernant les ensembles de nombres et les propriétés des nombres. Les deux premiers seuils à faire franchir sont donc la résolution de problème et l'introduction de la désignation fonctionnelle pour les lettres en tant que variables.

3.1 La résolution de problème: apprendre comment on fabrique les problèmes en mathématiques pour pouvoir apprendre à les résoudre

La résolution de problème est le cercle vicieux de l'enseignement pour tous les élèves.

— d'une part, elle le type d'actitivité nécessaire pour apprendre et pour appliquer des connaissances mathématiques,

— d'autre part , les processus de résolution restent une

Boite Noire pour les élèves,

La résolution d'un problème type en classe *n'apprend pas à reconnaître quelle connaissance mathématique utiliser* dans la diversité hétérogène des situations de la réalité. Car la résolution de problème en mathématiques exige la mobilisation d'au moins deux registres, pour CONVERTIR la représentation des données d'un problème dans le registre où l'on peut effectuer LE TRAITEMENT *qui donne la solution mathématique.* Et la très grande majorité des élèves ne reconnaissent pas l'équivalence mathématiques des formulations, des expressions symbolique ou des figures possibles dans la présentation indéfiniment variable des données et des questions.

Ce cercle vicieux de la résolution des problèmes dans l'enseignement des mathématique exige don un renversent complet de point de vue :*il faut apprendre comment on pose* un problème en mathématiques *pour devenir capable de les résoudre*. Autrement dit, c'est le processus de fabrication d'un problème mathématique didactique qui permet de comprendre les processus de résolution de problème en mathématique. Ce processus de fabrication ne porte pas sur un problème particulier mais sur un CHAMP DE PROBLÈMES. Il comporte quatre étapes. Chaque étape se caractérise par un type de choix possibles pour la fabrication du problème.

3.1.1 Les deux premières étapes: deux choix faits dans le registre du traitement mathématique du problème

On ne part pas d'une situation et des données du problème qu'elle peut soulever, mais d'une connaissance mathématique permettant de résoudre beaucoup de problèmes dans des situations très hétérogènes. Et on on prend ce que nous appellerons la description complète du traitement mathématique que l'on peut effectuer en utilisant cette connaissance. Puis on supprime des termes dans cette description complète de manière à pouvoir les retrouver uniquement à partir des termes restant. C'est que nous appellerons la description minimale du traitement mathématique. Ainsi pour une description complète, il y a plusieurs descriptions minimales possibles. La suppression d'une donnée numérique entraîne la suppression de l'opération qui la relie à une autre donnée numérique. Le connecteur logique **"**ET**"** marque l'opération supprimée

Figure 6 - Fabrication mathématique d'un champ de problèmes

I. Description **complète** d'un traitement mathématique élémentaire	**(-2) + (+3) = 1** *Trois termes numériques*	**2 + (2 + 1) = 5** ***Quatre*** *termes numériques,*
II. Description **minimale** par suppression d'un ou deux termes numériques et d'un ou deux symboles d'opération	(–2) **ET** … = 1 une des TROIS descriptions minimales possibles	**… ET (… ET 1)** = 5 la description minimale la plus intéressante pour recourir à une lettre

Tout le monde aura immédiatement reconnu que le problème du coût du journal et de son supplément est l'une des descriptions minimales possibles d'une égalité numérique comprenant quatre termes numériques.

3.1.2 Les deux dernières étapes : des choix faits dans le registre de présentation des données du problème

Pour tous les problèmes additifs conduisant à l'introduction de lettres, le registre de présentation des données est évidemment celui de la langue naturelle. Mais là il y a une différence importante entre la troisième et la quatrième étape.

Dans la troisième étape, il faut convertir tous les termes des descriptions minimales en syntagemes nominaux et syntagmes verbaux. Ces syntagmes verbaux désignent le type de nombre ou la nature de l'opération représentés par les termes de la description minimale qui a été choisie. Ce sont ces syntagmes qui vont donner les informations nécessaires pour résoudre le problème additif, comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous.

Figure 7 - Conversion des descriptions minimales en syntagmes nominaux et verbaux.

Termes d'une description complète	Type des nombres et nature des opérations sémiotiquement représentés	**Conversion:** désignation dans la langue naturelle de ce que les termes de la description complète représentent
(-2)	Entiers relatifs : **(+)** **(-)** →	couples de **termes antonymiques :** *monter/descendre, avancer/reculer, acheter vendre, gagner/perdre,* etc…
ET	Opérations : addition ou soustraction →	Une expression chronologique, ou la succession de deux phrases
(+3)	(+) (–) →	**le même couple** de termes antonymiques
=	→	en tout, après, etc…
(+5)	(+) (–) →	**Choix de l'un des deux termes du couple antonymique choisi** pour le problème

Ainsi, pour la description complètes d'une égalité comprenant trois termes numériques, on a trois descriptions minimales différentes. Et la désignation en langage naturel de ce que représentent les termes de la description minimale choisie conduit à 16 possibilités différentes d'énoncés de problèmes. On voir donc que le passage du registre du traitement mathématique au registre de présentation des données d'un problème est très complexe d'un point de vue sémio-cognitif. Il exige que l'on propose des activités d'exploration pour que les élèves puissent prendre conscience de la complexité de cette activité de conversion. Or que demande-t-on aux élèves depuis plus de quarante non seulement avec les problèmes additifs ou multiplicatifs, mais aussi avec les problèmes fabriqués pour inciter les élèves à utiliser une lettre comme inconnue ? De faire les conversions inverses !!! On leur donne un énoncé et il doivent retrouver la description minimale qui est décrite dans l'énoncé.

La quatrième étape est le choix d'une situation concrète supposée intéresser ou motiver les élèves. On scénarise la description minimale choisie. Cela se traduit par le choix du couple antonymique. Le choix du couple antonymique gagner/ perdre, par exemple, renvoie à la situation concrète que l'on veut décrire.

Figure 8 - Présentation des données du problème dans le registre de la langue naturelle

III. Désignation en langue naturelle de ce que représentent les termes de l'égalité numérique	**(–2) ? = 1** **perd 2** ET… **en tout gagne 1**	**(… ET 1)** = 5 … **1 de plus que**… et **en tout.**
IV. Scénarisation d'une situation concrète. *expressions verbales relatifs à une situation concrète*	P. joue une *partie* et perd 2 *billes*. Il joue une deuxième partie. En tout il a gagné **1** *billes*. Que s'est-il passé à la *2ème partie* **?** **(–2) et …. = 1**	Un *journal* et son *supplément* coûtent 5 *reals*. Le journal coûte 1 *real* de plus que son *supplément*. Combien *coûte le journal* ? **b et (b +1)** = 5

La quatrième étape est évidemment un pur emballage cadeau. Ce sont les trois premières étapes qui sont importantes. Car elle permettent de prendre conscience du champ de tous les problèmes qui peuvent être résolus en utilisant un traitement mathématique élémentaire. Et elles permettent de reconnaître d'emblée toutes les situations possibles où cette connaissance peut être utilisée. Or, de manière surprenante, c'est la quatrième étape qui retient l'attention des enseignants et aussi celle des chercheurs, alors que les trois premières sont totalement ignorées.

Pour analyser la résolution de problème en termes de registres de représentation sémiotique, nous avons pris les problèmes numériques les plus simples. Mais nous aurions pu prendre tout aussi bien, des théorèmes de géométrie ou l'utilisation de formules (Duval 2013).

Les registres mobilisés et, par suite, les opérations sémio-cognitives

3.2 Comment introduire les lettres ?

Introduire les lettres dans le cadre de la résolution de problèmes, comme cela se fait presque toujours, est un piège didactique. Car les lettres sont d'emblées identifiée à des valeurs inconnue, c'est-à-dire à la donnée manquante d'un problème arithmétique, et elles ne pourront plus être des variables pour la majorité des élèves. *Il faut, au contraire, les introduire en dehors de toute activité de résolution de problème.* Les tâches qui permettent d'introduire d'emblée les lettres comme des variables doivent répondre aux deux exigences cognitives suivantes :

(1) Les lettres doivent être introduites pour désigner non pas un nombre inconnu, mais une liste indéfiniment ouverte de nombres

une lettre <> une liste ouverte de nombres

Autrement, dit les lettres doivent être introduites *pour condenser une liste de nombres et non pas pour généraliser* une observation dans le cadre d'une formule que l'on veut justifier mathématiquement.

(2) Les lettres doivent en même temps être pour effectuer une opération de re-désignation fonctionnelle d'une autre liste ouverte de nombres :

une lettre <> Deux listes ouvertes correlées de nombres

Les tâches qui répondent à ces deux exigences cognitives impliquent l'organisation des données numériques en deux listes parallèles. C'est d'ailleurs cette organisation qui est sous-jacente pour la résolution de la plupart des problèmes numériques ou de dénombrement fabriqués pour rendre nécessaire l'utilisation des lettres (Duval & alii 2015a, p.75-80)

Figure 9 - Activité d'introduction des lettres par condensation sémantique et double conversion Trois points sont essentiels dans l'organisation de cette activité.

I. Désignation des nombres dans **la langue naturelle** en fonction d'une propriété	Deux Nombres SUCCESSIFS		Un Nombre Pair		Un nombre Impair		Le Carre d'un nombre	
II. Ecriture d'un liste indéfiniment ouverte de nombres	1 2 3 4 5 …	**2** **3** **4** **?** **?** **…**	1 2 3 4 5 …	**2** **4** **6** **?** **?** **…**	1 2 3 4 5 …	**1** **3** **5** **?** **?** **….**	–2 –1 0 1 2 …	**4** **1** **0** **1** **?** **…**
III. Désignation par condensation semantique et re-designation fonctionnelle **littérale ou algébrique**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**

Tout d'abord, Il est essentiel que les élèves puissent trouver par eux-mêmes, les écritures littérales (x et x+1), etc. Pour cela ils doivent développer chaque liste jusqu'à ce qu'ils ce qu'ils aient le sentiment et qu'ils découvrent la nécessité d'un seul caractère pour condenser la liste entière des nombres. Cette tâche doit donc être une activité papier/crayon et ne pas se faire avec EXCEL. *Car l'objectif de cette tâche n'est pas d'obtenir la bonne réponse mais une réelle prise de conscience par chaque élève, et non pas seulement par des groupes d'élèves.*

Ensuite, cette activité de condensation sémantique et de re-désignation fonctionnelle est aussi une tâche de conversion. *Aussi, d'un point de vue cognitif, il est nécessaire de demander la conversion inverse.* Comment désigner les écritures littérales (2x), (2x +1) par la propriété d'un nombre (Fig. 9, III > I) ?

Enfin, pour les carrés, la liste corrélée doit commencer avec les nombres négatifs : – 4, –3, –2, etc. Car les élèves peuvent alors prendre conscience que *le nombre 4, en tant que carré, se décompose en deux produits possibles :* (2 x2) et (– 2x –2). Ainsi devant toute écriture du type $x^2 = 4$ ils acquièrent le réflexe de chercher deux racines et non pas une seule. Les lettres étant le titre d'une liste ouverte de nombres, elles peuvent alors désigner dans une équation la sous-liste des nombres de solution de l'équation (aucune, une, deux ...).

Les lettre doivent être introduites indépendamment de toute activité de résolution de problèmes. En revanche, la mise en équation des données d'un problème représente un obstacle insurmontable pour la plupart des élèves. Il est d'une autre nature que celui de l'utilisation des lettres comme des variable. Pour permettre aux élèves de le dépasser, il faut mettre en place un autre type d'activité (Duval et al., 2016).

Quand on suit régulièrement les élèves en classe, et à des niveaux différents, on ne peut que s'étonner de deux choses. Pourquoi accumule-t-on dans un même type d'activité l'introduction des lettres et la mise en équation ? Pourquoi la reconnaissance de ce qui est représenté sémiotiquement est-elle toujours subordonnée à l'acquisition de « concepts », ou pourquoi réduit-on l'analyse de l'activité mathématique à la résolution (mathématique et non pas empirique !) de problème ? Ces deux questions ne s'adressent pas aux enseignants, mais aux experts qui participent à l'élaboration des programmes, aux chercheurs qui proposent des « théories» d'apprentissage, et aux formateurs qui doivent préparer les enseignants à « diagnostiquer» les difficultés des élèves et à y « remédier ».

4 Les difficultés récurrentes d'incompréhension dans l'apprentissage et la méconnaissance de la face cachée de l'activité mathématique dans l'enseignement

La question qui résume le défi d'un enseignement commun des mathématiques pour tous les élèves jusqu'à 16 ans, « comment apprendre à comprendre en mathématique ? », renvoie à plus fondamentale. *Qu'est-ce que l'activité mathématique ?* En termes pratiques, que faut-il faire pour « faire des maths» ? Selon qu'on s'en tient au point de vue mathématique ou, qu'au contraire, on se place au point de vue cognitif, on est conduit à des réponses totalement différentes, parce que l'activité mathématique présente deux faces.

4.1 Le point de vue mathématique et la face exposée des mathématiques

La face exposée concerne *tous les traitements mathématiques* qui ont été élaborés et démontrés au cours de l'histoire des mathématiques : formules, opérations et leurs algorithmes, termes de propriétés condensant des définitions et des théorèmes. La face exposée des mathématiques recouvre maintenant un corpus de connaissances considérable.

S'en tenir à la face exposée des mathématiques pour les enseigner conduit à deux idées qui vont commander l'organisation de l'enseignement au bien en classe qu'à l'échelle du curriculum.

(1) Faire des mathématiques, c'est nécessairement utiliser l'une de ces connaissances pour résoudre des problèmes ou pour démontrer des conjectures.

(2) Apprendre des mathématiques c'est acquérir les unes après les autres, au Primaire puis au Collège, les connaissances élémentaires qui permettent de résoudre des problèmes.

Pour les introduire en classe, il faut élaborer une séquence didactique qui conduise à utiliser ou découvrir la connaissance que l'on veut faire acquérir. Pour cela on se réfère à des théories qui décrivent les processus d'acquisition des connaissances comme un passage progressif de l'empirique au théorique, du concret à l'abstrait, du particulier au général. Celle épistémologique de Piaget et celle sémiotique de Peirce sont celles dont les idées et les distinctions terminologiques sont encore les plus souvent reprises.

Aux yeux des élèves, et même des non-mathématiciens, les mathématiques (enseignées) apparaissent comme *un monde éclaté de connaissances locales*, qui sont très différentes les unes des autres. Elles portent sur des types de nombres difficilement distinguables (entiers, relatifs, décimaux, rationnels, etc., sur l'algèbre (formules ?, équations), sur la géométrie (plane et dans l'espace) les fonctions, les statiisques. En outre, il y a des exigences contradictoires dans la manière de justifier, lorsqu'on passe du Primaire au Secondaire.

Les recherches et les théorie en Education mathématique reflètent cet éclatement. Elle conduisent à multiplier des listes de « prérequis» mathématiques, de *«compétences»,* de *«savoir-faire»* qui deviennent à la fois des conditions et des objectifs d'apprentissage. En réalité, c'est la nature même de l'activité mathématique qui est l'obstacle, car elle exige des manières de voir, d'explorer, de dire et de raisonner qui sont radicalement différentes de celles qui sont mobilisées dans les autres science ainsi que dans tous les relations sociales.

4.2 Le point de vue sémiocognitif et la « face cachée » des mathématiques.

Les mathématiques se distinguent de tous les autres types de connaissance sur un point crucial. Les objets qu'elles étudient échappent à toute perception directe ou instrumentalement médiatisée. Ils ne sont accessibles que par la production de représentations sémiotiques. Mais les représentations sémiotiques produites sont de différents types, car les objets étudiés en sont d'une certaine manière indépendants. Autrement dit, d'un point de vue sémio-cognitif et épistémologique, l'activité mathématique consiste en la transformation de représentations sémiotiques en d'autres représentations sémiotiques soit de même type soit d'un type totalement différent (ci-dessus Fig. 1, 9). La théorie des registres commence avec la distinction des deux types de transformations qui sont explicitement ou implicitement mises en oeuvre dans toute activité mathématique, concrète ou théorique.

(1') Faire des mathématiques, c'est convertir (transformer) la représentation d'un objet produite dans un registre D en une autre représentation d'un registre A, pour ensuite la transformer par pas successifs en d'autres représentations du registre A (traitement).

Les conversions sont les premiers gestes intellectuels de l'activité mathématique. Le choix du registre d'arrivée dépend des possibilités spécifiques de traitement qu'il offre. Ainsi la langue naturelle, les écritures décimales, les écritures algébriques, les graphes cartésiens ou les figures géométriques n'offrent pas du tout les mêmes possibilités de traitement mathématique (Duval 2011). Mais cet aspect fondamental dépasse le cadre de cette brève présentation. Le premier apport de cette analyse de l'activité mathématique est de mettre en évidence la nécessité cognitive et didactique de développer l'articulation entre les différents registres mobilisés. Les conversions sont le premier seuil d'incompréhension, souvent infranchissable, dans l'apprentissage, quels que soient les contenus mathématiques enseignés. Pourquoi ?

Il y a un paradoxe cognitif des mathématiques. Il vient du fait qu'il n'y a pas d'autre accès possibles aux objets mathématiques que la production de représentations sémiotiques. Or deux représentations d'un même objet dans deux registres différents ont des contenus différents (ci-dessus, Fig. 1, 8, 9). Comment alors peut-on RECONNAÎTRE que deux représentations sémiotiques *dont les contenus n'ont rien de commun* peuvent représenter *le même objet ?* Cette reconnaissance doit être évidemment est rapide et ne pas demander 10 ou 15 minutes. Sinon, il y a abandon et, quand cela se répète, découragement. En dehors des mathématiques, il n'y a pas de paradoxe cognitif, puisqu'on peut toujours accéder perceptivement ou instrumentalement à l'objet représenté lui-même et donc comparer, au moins théoriquement ou virtuellement, chaque représentation avec l'objet lui-même. D'où l'équivoque du concret ou même du figuratif ! La compréhension en mathématiques commence avec cette reconnaissance qui repose sur une articulation cognitive d'au moins deux registres. Cette articulation interne qui permet de convertir spontanément les représentations sémiotiques est la « face cachée » de l'activité mathématique. La conversion ne présuppose l'acquisition de concepts mathématiques. C'est l'inverse qui se passe.

Il est impossible, pour la plupart des élèves, de franchir le premier seuil de compréhension. Il suffit d'ailleurs de consulter les enquêtes PISA ou les enquêtes nationales en fin de cycle, pour s'en convaincre (Duval *et al.* 2015). Cette situation ne changera pas tant qu'on introduira des tâches spécifiques pour que chaque élève puisse par lui-même prendre conscience comment deux registres se coordonnent et dépasser ainsi le paradoxe cognitif des mathématiques.

En réalité, c'est la question même de ce que doit être un enseignement des mathématiques pour tous les élèves jusqu'à 16 ans, et de ce qu'il peut apporter à leur formation, qui est posée (Duval, 2015b).

4.3 Quels devraient être les objectifs prioritaires de l'enseignement des mathématiques jusqu'à 16 ans ?

Quand on aborde cette question, il faut se rappeler que les enjeux d'enseignement ne peuvent pas être les mêmes avant et après 16 ans. Avant 16 ans l'enseignement s'adresse à tous les élèves d'une même classe d'âge. Après il s'adresse à des sous-populations d'élèves en fonction de pré-orientations professionnelles multiples. Mais, surtout, les élèves en plein, qui sont en période de développement, ont à prendre confiance en eux-mêmes et à acquérir leur autonomie intellectuelle.

Il est donc essentiel que les élèves puissent développer les coordinations entre les différents registres de représentations sémiotiques, qui constituent la face cachée de l'activité mathématiques. Seule cette coordination donne une autonomie intellectuelle en mathématiques, car elle se traduit par une prise de conscience des manières de voir, de dire et de raisonner qui sont spécifiques aux mathématiques.

Le grand problème de l'enseignement des mathématiques jusqu'à 16 ans est qu'il est uniquement organisé en fonction de la face exposée des mathématiques. Il suit un ordre de (RE-)CONSTRUCTION des connaissances, dont l'acquisition est l'objectif en fin de cycle, à partir de celles qui sont (mathématiquement) les plus élémentaires. Dans ce cadre comme on l'a vu, les manières de voir, de raisonner, de dire et d'explorer, qui sont spécifiques aux mathématiques, sont subordonnées à l'acquisition de chacune des connaissances fixées dans les programmes. Et, on outre, on postule que les processus d'apprentissage et de compréhension en mathématiques seraient fondamentalement les mêmes que dans les autres disciplines !!!

Le problème de l'enseignement des mathématiques jusqu'à 16 ans est celui du choix objectifs prioritaires d'un enseignement commun pour tous les élèves. Etant donné les seuils infranchissables de compréhension auxquels la majorité des élèves se heurtent, ils doivent être perceptibles aux élèves. Sur ce point l'argument d'utilité est à long terme dénué de sens, et à court terme, la plupart ne reconnaissent pas les situations dans lesquelles une connaissance peut être utilisée. Seule l'acquisition réelle de leur autonomie intellectuelle pour résoudre des problèmes peut les convaincre ou les passionner. Mais les objectifs choisis doivent également mettre en évidence ce que l'apprentissage des mathématiques apporte à la formation de l'esprit indépendamment et au delà de l'acquisition de connaissances mathématiques. Et là, seule le développement et l'appropriation des processus cognitifs sous-jacents à toute activité mathématique peut préparer à non seulement à « apprendre à apprendre» , mais apprendre à chercher … même en dehors des mathématiques.

Références

Duval, R. (2011). Graphiques et équations: L'articulation de deux registres). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT*, *6(2), 96-112*.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a Matematica de outra forma. I Entrar no modo matematico de pensar: os registros de representações semioticas*. São Paulo: Proem.

Duval, R. (2013). Le problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? *REVEMAT, 8(1),145*. doi: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n1p1

Duval, R., Campos, T. M .M., Barros, L.G., & Dias, M.A., (2015a). *Ver e ensinar a matemática de outra forma.* II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo: Proem

Duval R. (2015b). Mundanças, em curso e futuras, dos sistemas educationais: Desafios e marcas dos anos 1960 aos anos … 2030! *REVEMAT, 10(1),1-11*. doi: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2015v10n1p1