Crianças de Anos Iniciais Levantando Espaços Amostrais: Relações Entre Pensamentos Combinatório e Probabilístico

Children in Initial Schooling Raising Sample Spaces: Relations between Combinatorial and Probabilistic Thinkings

Rute E. S. Rosa Borba

Universidade Federal de Pernambuco. PE, Brasil.
*E-mail: resrborba@gmail.com
Submetido em: maio - 2017
Aceito em: ago. 2017.

Resumo

Estudos em Educação Matemática têm apontado conhecimentos que crianças de anos iniciais já possuem e suas dificuldades com alguns conceitos em particular. Nesse texto são discutidos quatro argumentos. 1) Crianças em início de escolarização já possuem conhecimentos básicos de alguns conceitos mais complexos, tais como os associados à Probabilidade e à Combinatória. 2) Em situações de jogo, com uso de recursos adequados e por meio de estratégias próprias, as crianças evidenciam noções sobre aleatoriedade, independência de eventos e equiprobabilidade, bem como demonstram compreensão de situações combinatórias variadas – produtos cartesianos, arranjos, combinações e permutações. 3) Trabalhar de modo articulado com a Probabilidade e a Combinatória – por meio do levantamento de espaços amostrais, por exemplo – constitui-se um modo eficiente de integrar conhecimentos matemáticos diversos. 4)Por demandarem formas mais complexas de pensamento, recomenda-se que se inicie cedo o estímulo ao desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico. Esses argumentos são aqui discutidos a partir de resultados de pesquisas e são apontadas implicações para o ensino escolar.

Palavras-chave: Crianças. Anos Iniciais. Espaços Amostrais. Raciocínios Combinatório e Probabilístico.

Abstract

Studies in Mathematics Education have pointed out knowledge that children in initial studying already have and their difficulties with some concepts in particular. In this text four arguments are discussed. 1) Children in initial schooling already have basic knowledge of some more complex concepts, such as those associated with Probability and Combinatorics. 2) In game situations, using appropriate resources and through their own strategies, children show notions about randomness, independence of events and equiprobability, as well as demonstrate understanding of varied combinatorial situations – Cartesian products, arrangements, combinations and permutations. 3) Working in an articulated way with Probability and Combinatorial – by means of raising sample spaces, for example – is an efficient way to integrate diverse mathematical knowledge. 4) Because they require more complex forms of thinking, it is recommended that the stimulus to the development of combinatorial and probabilistic reasoning be initiated early. These arguments are discussed from research results and implications for school teaching will be pointed out.

Keywords: *Children. Initial Schooling. Sample Spaces. Combinatorial and Probabilistic Reasoning.*

1 Introdução

Nesse texto explorarei algumas questões, tais como: a compreensão da Combinatória e da Probabilidade exigem raciocínios mais complexos? Se sim, de que natureza? De que modos os raciocínios combinatório e probabilístico se relacionam? Crianças de anos iniciais de escolarização são capazes de entender situações combinatórias e situações probabilísticas? Se sim, quais? Que suportes são necessários para que crianças novas se envolvam com sucesso na resolução de problemas de Combinatória e de Probabilidade?

O que desejo abordar, aqui, são as relações presentes em situações combinatórias e situações probabilísticas e a viabilidade de iniciar a discussão dessas situações com crianças em início de escolarização. Também objetivo defender que há estreitas relações entre a Combinatória e Probabilidade – como as relações presentes em levantamentos de espaços amostrais – e que essas podem ser exploradas com crianças desde cedo por intermédio de recursos adequados – tais como manipulativos, jogos e tecnologias digitais.

2 Relações Presentes em Situações Combinatórias

Em texto anterior (Borba, 2010), ressaltei que são duas as relações básicas a serem consideradas em problemas combinatórios, as quais se referem à *escolha* e à *ordenação* de elementos no levantamento de possibilidades. Outras relações se fazem presentes em problemas combinatórios condicionais (tais como as de proximidade e posicionamento, dentre outras), mas não serão foco desse texto. Discussão detalhada sobre relações de problemas combinatórios condicionais pode ser obtida em Borba e Braz (2012).

No que se refere à *escolha* de elementos que constituem as possibilidades, há dois tipos de problemas: aqueles nos quais a escolha se dá a partir de conjuntos distintos (os problemas denominados de *produto cartesiano* ou também conhecidos como *produto de medidas*) e aqueles nos quais a escolha ocorre dentro de um conjunto único (problemas de *arranjo*, de *combinação* e de *permutação*). Assim, em *produtos cartesianos* as possibilidades são compostas a partir de relações *um-para-muitos*, nos quais cada elemento de um conjunto é combinado com os elementos de outro conjunto (ou outros conjuntos, pois, nesse tipo de problema, podem ser envolvidos dois ou mais conjuntos). Em *arranjos* e *combinações* são formados subconjuntos, tais como quatro elementos escolhidos dentre cinco, e em *permutações* todos os elementos do conjunto compõem as possibilidades – que se distinguem apenas pela ordem de seus elementos.

Quanto à *ordenação* de elementos, as diferentes ordens dos elementos não constituem possibilidades distintas em *produtos cartesianos* e em *combinações*, mas a ordem determina possibilidades diferentes em *arranjos* e *permutações*. Os exemplos que seguem caracterizam as relações presentes nas situações combinatórias, ressaltando-se que a compreensão da Combinatória exige a coordenação dessas relações.

2.1 Produto cartesiano

Ex: Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por cinco saídas diferentes (E, F, G, H e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Nessa situação, é preciso combinar cada elemento do primeiro conjunto (dos portões de entrada: A, B, C e D) com cada elemento do segundo conjunto (das saídas: E, F, G, H e J) – sendo o par de elementos escolhidos de conjuntos distintos. Para cada um dos portões de entrada (A, por exemplo) há possibilidade de escolha de cinco diferentes saídas (A → E; A → F; A → G; A → H; A → J). Sendo quatro os portões de entrada, há, ao todo, 20 (4 x 5) maneiras diferentes de entrar e sair no parque.

2.2 Combinação

Ex: Márcia tem em casa seis frutas (mamão, manga, abacaxi, laranja, banana e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Para resolver esse problema é preciso levantar as possibilidades de combinação das seis frutas, duas a duas – escolhidas a partir do conjunto único das frutas discriminadas. Para a escolha da primeira fruta, há seis possibilidades e há cinco possibilidades de escolha para a segunda fruta, uma vez que uma das frutas já foi escolhida. O total obtido (6 x 5) deve ser dividido por dois, uma vez que a escolha (mamão e manga) e (manga e mamão) constituem a mesma escolha, ou seja, a ordem dos elementos não indica possibilidades distintas.

2.3 Arranjo

Ex: *Quatro crianças (Joaquim, Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?*

Semelhantemente ao problema de *combinação*, nesse problema de *arranjo* há um conjunto único, a partir do qual escolhas devem ser efetuadas. Requer-se o levantamento de possibilidades de duas das quatro crianças, mas, nesse caso, a ordem de escolha determina possibilidades distintas, pois Joaquim em 1º lugar e Pedro em 2º é diferente de Pedro em 1º lugar e Joaquim 2º. Dessa forma, problemas de *combinação* e de *arranjo* possuem a mesma relação de escolha (de elementos de um conjunto único), mas possuem relação de ordenação diferentes, já que em *arranjos* ordens diferentes constituem possibilidades distintas.

2.4 Permutação

Ex: *De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?*

Nessa situação também há um único conjunto de escolha. Entretanto, esse problema se diferencia dos outros dois anteriores no sentido de que todos os elementos do conjunto compõem cada uma das possibilidades a serem levantadas, quais sejam: 1) Maria, Luís, Carlos; 2) Maria, Carlos, Luís; 3) Luís, Maria, Carlos; 4) Luís, Carlos, Maria; 5) Carlos, Luís, Maria; 6) Carlos, Maria, Luís. Assim, em *permutações* é a ordenação dos elementos o que determina as distintas possibilidades.

Assim como há relações características das situações combinatórias, as situações probabilísticas também possuem relações próprias, necessárias à sua compreensão. A seguir, discutirei essas relações e mais adiante discutirei possíveis articulações entre situações combinatórias e probabilísticas.

3 Relações Presentes em Situações Probabilísticas

Bryant e Nunes (2012) defendem que a probabilidade é um conceito complexo que envolve o desenvolvimento de quatro exigências cognitivas:

1- Compreender a natureza e as consequências da aleatoriedade;
2- Formar e categorizar o espaço amostral;
3- Comparar e quantificar probabilidades;
4- Entender correlações.

Embora sejam colocadas como quatro compreensões diferentes, elas não são isoladas uma da outra. Essas exigências cognitivas são inter-relacionadas e a coordenação das quatro é necessária ao entendimento das situações probabilísticas.

3.1 Aleatoriedade

A primeira das compreensões apontadas por Bryant e Nunes (2012) se refere ao entendimento de que há certezas (em eventos determinísticos) e incertezas (em eventos aleatórios) no mundo que nos cerca. A aleatoriedade (também conhecida como o acaso) se faz muito presente em nosso cotidiano, como em sorteios, em lançamentos de moedas para escolha de quem inicia um jogo e em várias outras situações.

Desse modo, a aleatoriedade é entendida como uma condição incerta, ou seja, a possibilidade ao acaso de ocorrer determinado evento. Embora, em alguns casos, seja possível listar todas as possibilidades de ocorrência de um evento, não se tem certeza sobre o resultado. No lançamento de uma moeda, por exemplo, sabe-se que há apenas duas possiblidades de resultados (cara ou coroa) e, numa moeda 'justa' (não viciada), qualquer uma das possibilidades pode ocorrer. Diferentemente, em situações determinísticas, ou seja, não-aleatórias, os resultados são claramente definíveis, como, por exemplo, jogar uma moeda dentro de um poço. O resultado é previsível: a moeda cairá no fundo do poço.

3.2 Espaço amostral

A formação e categorização do espaço amostral também desempenha importante papel na compreensão de situações probabilísticas. O levantamento das possibilidades que compõem o espaço amostral é fundamental ao entendimento da probabilidade, já que o cálculo de probabilidade é baseado na análise do espaço amostral. Por exemplo, no lançamento de duas moedas (uma de 10 centavos e outra de 25 centavos), tem-se como espaço amostral: cara na moeda de 10 centavos e cara na moeda de 25 centavos; coroa na moeda de 10 centavos e coroa na moeda de 25 centavos; cara na moeda de 10 centavos e coroa na moeda de 25 centavos; e coroa na moeda de 10 centavos e cara na moeda de 25 centavos. A probabilidade de que as duas moedas tenham o mesmo resultado (duas caras ou duas coroas) é de 2 dentre 4 possíveis resultados, ou seja, a probabilidade é de ½, ou, ainda, é o mesmo que afirmar que há 50% de chance, no lançamento de duas moedas, de que o resultado seja duas caras ou duas coroas.

A partir dessa exigência cognitiva, observa-se que há uma estreita relação entre a Combinatória e a Probabilidade, pois, para o cálculo de uma probabilidade, é preciso pensar nas possibilidades de eventos – o que se dá por meio de levantamento, via raciocínio combinatório, do espaço amostral da situação. A partir do levantamento de possibilidades (por meio de raciocínio combinatório) pode-se levantar o espaço amostral e a partir dele se pode definir a probabilidade de ocorrência de um determinado evento.

3.3 Quantificação e comparação de probabilidades

Para atendimento à terceira exigência cognitiva – quantificação e comparação de probabilidades – torna-se necessário o raciocínio proporcional, podendo-se expressar a probabilidade em decimais, frações ou razões. Por exemplo, se em uma caixa há duas moedas de 10 centavos e oito moedas de 25 centavos e, em outra caixa, há quatro moedas de 10 centavos e 21 moedas de 25 centavos, é mais provável que se retire uma moeda de 10 centavos da primeira caixa, apesar da segunda caixa conter mais moedas de 10 centavos. Na primeira caixa há uma proporção de 2 moedas dentre 10 (1/5) e na segunda caixa a proporção é de 4 moedas dentre 25 (4/25, o que é menor que 1/5). Essa relação de proporcionalidade permite comparar as probabilidades e concluir que é mais provável que se retire uma moeda de 10 centavos da primeira caixa do que da segunda. Mais uma vez, observa-se a importância do entendimento do espaço amostral, pois é esse que permite verificar a totalidade de possibilidades e, assim, a quantificação e a comparação de probabilidades – sejam essas iguais ou diferentes.

3.4 Correlações

Por fim, a quarta exigência cognitiva, apontada por Bryant e Nunes (2012) refere-se às correlações, ou seja, associações de causa-efeito entre variáveis. Por exemplo, não há correlação no lançamento de duas moedas 'justas'. Se uma delas der cara, a outra tanto pode dar cara como dar coroa. Já outras situações envolvem correlação, tal como a água deslocada em função da massa da moeda lançada na água. Uma moeda de maior massa deslocará mais água do que uma moeda de menor massa. Há, assim, uma correlação entre massa e água deslocada. Isso nos leva a concluir que entre a certeza de situações determinísticas e a completa incerteza de situações aleatórias, há diferentes relações entre eventos, algumas das quais são correlacionais.

A seguir, apresento evidências, resultantes de pesquisas, de que crianças, desde pequenas, em início de escolarização, já possuem algumas noções básicas, a partir das quais podem desenvolver seus pensamentos combinatório e probabilístico. Em particular, centrarei as discussões no levantamento de espaços amostrais que é um construto que articula os modos de pensar presentes em situações combinatórias e o raciocínio probabilístico.

4 Crianças Novas e o Raciocínio Combinatório

Inhelder e Piaget (1955) argumentaram que apenas adolescentes e adultos teriam condições de responder corretamente problemas combinatórios. A justificativa dada por eles é a de que problemas combinatórios exigem um modo particular de pensamento – raciocínio hipotético dedutivo – o qual só é alcançado, segundo esses estudiosos, no período por eles denominado de operatório-formal (a partir dos 12 anos de idade). No entendimento desses autores, responder corretamente um problema combinatório é enumerar ou contar, direta ou indiretamente, todas as possibilidades, ou seja, levantar exaustivamente o espaço amostral.

Se considerarmos que a resolução de problemas implica em compreensões que podem responder parcialmente aspectos das situações dadas e progressivamente apropriar-se do entendimento da situação e dos conceitos nela envolvidos, defendo que, bem antes da adolescência, crianças – inclusive as da Educação Infantil – iniciam o desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios. As relações de *escolha* e de *ordenação* – básicas à compreensão das situações combinatórias – são gradativamente entendidas e há evidências de que essa compreensão inicia cedo.

Pessoa e Borba (2012) observaram crianças da Educação

Infantil resolvendo problemas combinatórios utilizando material manipulativo. Às crianças eram dadas figuras dos objetos citados nos problemas e a partir da manipulação e colagem dessas figuras em folhas de papel, as crianças resolviam problemas de *produto cartesiano*, de *arranjo*, *combinação* e *permutação*.

Na Figura 1 pode-se observar a resolução de uma criança, de cinco anos de idade, para o problema: No petshop havia 4 animais (cachorro, gato, papagaio e tartaruga). De quantos modos diferentes, João pode escolher 3 desses animais? Para a resolução do problema a criança recebeu figuras com fotos dos quatro animais citados, sendo as figuras dadas em quantidade maior do que o necessário para o levantamento das possibilidades. O objetivo de ter mais figuras que o necessário era o de permitir que a criança livremente determinasse o número total de possibilidades que ela julgasse respondesse à questão.

Figura 1 - Solução de um problema de combinação por uma criança de cinco anos.

Fonte: Dados de pesquisa.

Trata-se de um problema de *combinação* no qual se deve escolher três dentre quatro animais e, além dessa relação de escolha, para resolver o problema é preciso, também, atentar para a relação de ordenação. Nesse caso, sendo um problema de *combinação*, a ordem dos elementos não determina possibilidades distintas. Assim, escolher cachorro, gato e papagaio é a mesma escolha de papagaio, gato e cachorro. Salienta-se que, nesse caso, as possibilidades são iguais seis a seis, uma vez que permutar a ordem de três elementos resulta em seis possibilidades iguais.

Observa-se que a criança corretamente escolheu três animais no seu levantamento de possibilidades, mas teve dificuldades em não repetir possibilidades iguais e também não foi capaz de esgotar todas as possibilidades. A possibilidade (cachorro, gato e papagaio) foi repetida três vezes, mas outras possibilidades também foram levantadas: (tartaruga, gato e cachorro) e (tartaruga, cachorro e papagaio).

A criança, com apenas cinco anos de idade, evidenciou compreender a relação de escolha desse problema combinatório, pois todas as possibilidades levantadas incluíam apenas três dos quatro animais. Entretanto, a relação de ordenação não foi plenamente respeitada. Em alguns momentos, para a criança o pedido de 'modos diferentes' parece ter sido entendido como modos distintos de dispor as figuras, como no caso do trio (cachorro, gato e papagaio) que, ora apareceu na mesma ordem (porém com algumas das figuras espelhadas), ora apareceu em outra ordem (papagaio, cachorro e gato).

O esgotamento das possibilidades também não foi plenamente atendido, mas a criança se aproximou bem da resposta correta. Das quatro possibilidades (cachorro, gato e papagaio), (cachorro, gato e tartaruga), (cachorro, papagaio e tartaruga) e (gato, papagaio e tartaruga), a crianças indicou três possibilidades (embora uma delas tenha sido indicada três vezes).

Considero, portanto, que houve muitos acertos da criança nessa e em outras questões e, possivelmente, com pequena intervenção, a criança poderia compreender que ela havia indicado casos repetidos e que faltava ainda um caso a ser indicado. Sendo um estudo de sondagem, as crianças não foram questionadas sobre suas resoluções, mas apenas perguntadas: você listou todos os modos diferentes de escolha?

Esse padrão se repetiu, nos variados tipos de problemas combinatórios, com quase todos os participantes da pesquisa: as crianças selecionavam a quantidade certa de elementos, mas não conseguiam espontaneamente perceber a importância, ou não, da ordenação dos elementos. Elas possuíam ainda maior dificuldade em indicar todas as possibilidades, ou seja, em levantar exaustivamente os espaços amostrais.

Em outro estudo, Azevedo e Borba (2013) apresentaram resultados de crianças de anos iniciais resolvendo problemas combinatórios com uso de árvores de possibilidades – construídas em lápis e papel ou com auxílio de um software. Na pesquisa foram comparados desempenhos de crianças de 5º ano do Ensino Fundamental distribuídas em quatro grupos: GE1 (1º grupo experimental) que construiu árvores de possibilidades com auxílio de um software (Diagramas de Árbol); GE2 (2º grupo experimental) que construiu árvores de possibilidades com lápis e papel; GC1 (1º grupo controle) que resolveu problemas multiplicativos, com exceção dos combinatórios, por intermédio de desenhos; e GC2 (2º grupo controle) que não passou por nenhuma intervenção específica.

Observa-se que no pós-teste realizado imediatamente (poucos dias) após a intervenção, as crianças dos grupos experimentais (GE1 e GE2) demonstraram significativos avanços em seus desempenhos. Desse modo, as intervenções – tanto as construções no software quanto as construções em lápis e papel, de árvores de possibilidades, estimularam a ampliação do raciocínio combinatório das crianças.

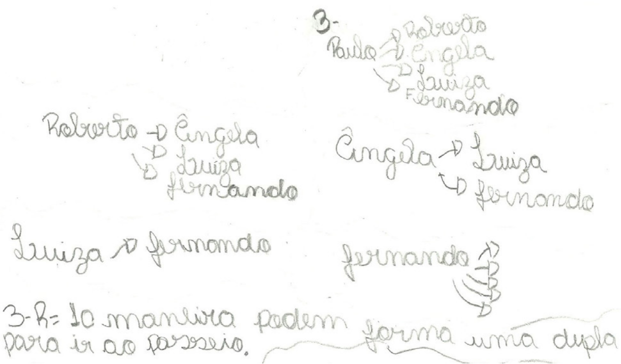
De modo diferente, as crianças dos grupos controle (GC1 e GC2) não avançaram ou até mesmo retrocederam em seus desempenhos. Esses resultados indicam a necessidade de intervenção específica para que as crianças avancem no desenvolvimento de seus raciocínios combinatórios. Trabalhar apenas com problemas multiplicativos, mas sem serem combinatórios, ou nenhuma intervenção específica, não são caminhos suficientes para garantir avanços em desempenhos na resolução de problemas combinatórios.

Surpreendentemente, as crianças dos grupos experimentais apresentaram ainda melhor desempenho no pós-teste posterior, realizado 9 semanas após as intervenções. Esse resultado evidencia que as crianças continuavam a demonstrar uma boa compreensão dos problemas combinatórios algum tempo após as intervenções.

A construção de árvores – virtuais, ou não – foi, assim, um recurso eficiente para auxiliar as crianças a ampliarem seus raciocínios combinatórios, pois experimentaram o quanto a sistematização em suas soluções era importante. Antes das intervenções, a falta de solução sistemática era uma das dificuldades mais frequentes das crianças. Muitas das crianças iniciavam corretamente suas soluções, listando ao menos uma possibilidade da situação posta, mas depois, por falta de sistematização, não conseguiam avançar na listagem de mais possibilidades. Após a intervenção, a preocupação em ser sistemático nas suas soluções levou as crianças a apresentarem avanços significativos em seus raciocínios combinatórios.

Na Figura 2 tem-se a solução apresentada, no pós-teste, por uma criança para o problema: Uma escola tem cinco professores (Paulo, Roberto, Ângela, Luiza e Fernando). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Figura 2 - Solução de um problema de combinação por uma criança de cinco anos.



Fonte: Azevedo e Borba (2013).

Observa-se que, após a intervenção, muitas crianças foram bastante sistemáticas em suas soluções. Iniciavam com um dos elementos dados e iam esgotando as possibilidades desse elemento para, em seguida, levantarem todas as possibilidades do segundo elemento. Nos pós-testes, as crianças dos grupos experimentais apresentavam suas respostas por meio do uso de árvores (que elas haviam aprendido a usar nas intervenções) ou de listagens (o recurso que elas preferiam usar no pré-teste). Desse modo, denota-se que as crianças aprenderam a responder os problemas de modo sistemático e não apenas a usar um recurso – as árvores de possibilidade.

A construção de árvores de possibilidades – sejam virtuais ou não – é, desse modo, um bom recurso que incentiva o levantamento de espaços amostrais e o desenvolvimento de modos de pensar, como o raciocínio combinatório. A partir das ideias inicialmente demonstradas pelas crianças, é viável o uso de recursos – como o da construção de árvores – para auxiliar crianças de anos iniciais no seu pensamento a respeito de situações combinatórias.

Esses resultados – de que crianças de Educação Infantil intuitivamente percebem algumas relações presentes em problemas de Combinatória – junto com resultados de outros estudos referentes a crianças em início de escolarização (Borba, Rocha & Azevedo, 2015), me leva a concluir que situações combinatórias simples podem ser concretamente trabalhadas com crianças novas e possibilita defender que o início mais cedo de resolução de problemas dessa natureza pode propiciar um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório.

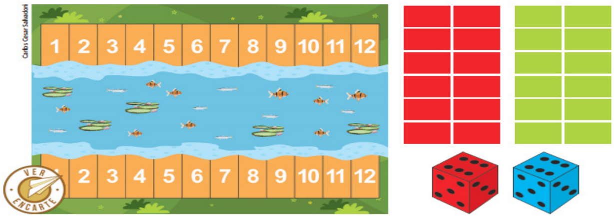
5 Crianças em Início de Escolarização e o Raciocínio Probabilístico

À semelhança da compreensão de relações combinatórias, há, também, evidências de noções intuitivas, por parte de crianças novas, referentes a relações probabilísticas, tais como: a *aleatoriedade*, o *espaço amostral,* a *comparação* de probabilidades, a *equiprobabilidade e* a *independência de eventos*, dentre outras. Destaco, ainda, que resultados de pesquisa têm mostrado também que a compreensão de relações combinatórias possui estreita articulação com o entendimento de relações probabilísticas, e vice-versa.

Batista e Borba (2015) investigaram o raciocínio probabilístico de crianças de anos iniciais de escolarização e um dos aspectos pesquisados diz respeito à relação entre pensamentos combinatório e probabilístico, particularmente, a partir da investigação da compreensão de espaços amostrais. Ressalto aqui um outro estudo, em andamento (Lima, 2016), que busca investigar relações entre raciocínios combinatório e probabilístico de adultos em início de escolarização. Assim, há pesquisas que têm procurado levantar noções intuitivas de crianças e de adultos, no que se refere à articulação entre formas de raciocínio, em particular no que diz respeito ao pensar presente na Combinatória e na Probabilidade.

A partir de jogos variados, Batista e Borba (2015), investigaram como crianças de 1º, 3º e 5º anos do Ensino Fundamental resolvem situações probabilísticas nas quais as exigências cognitivas apontadas por Bryant e Nunes (2012) se fazem presentes. Um dos jogos utilizados na investigação é o *Jogo Travessia do Rio*, como se pode observar na Figura 3, que é indicado no Caderno de *Jogos na Alfabetização Matemática*, do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa - PNAIC (Brasil, 2014, p.40). Esse e outros jogos são recomendados para a discussão da Probabilidade por permitirem a reflexão de conceitos centrais a essa área de estudo.,

Figura 3 - Jogo Travessia do Rio



Fonte: Brasil (2014).

No Travessia do Rio, um dos jogadores coloca as suas 12 fichas (vermelhas, por exemplo) em um dos 'lados' do rio e o outro jogador distribui as suas fichas (verdes) no outro 'lado' do rio. As fichas podem ser colocadas uma em cada espaço (numerados 1 a 12) ou mais de uma ficha em um único local (no espaço 12, por exemplo). Os jogadores, um por vez, jogam os dados e se o resultado da soma (dos números indicados nos dois dados) for o número colocado pelo jogador em um dos espaços, ele retira uma ficha neste espaço colocado e 'atravessa o rio', ou seja, deixa a sua ficha do lado do outro jogador. Vence o jogador que conseguir primeiro 'atravessar' todas as suas fichas para o lado oposto do rio.

Na pesquisa, as crianças eram questionadas sobre diferentes situações: referente aos possíveis resultados no lançamento dos dados; sobre a probabilidade de sair uma face ou outra, ao se jogar um dado; quanto à possibilidade de sair um mesmo número repetidas vezes; sobre o melhor local para deixar as fichas; dentre outros questionamentos. As crianças se amparavam em suas experiências recentes com o jogo quando eram perguntadas sobre situações hipotéticas referentes ao mesmo.

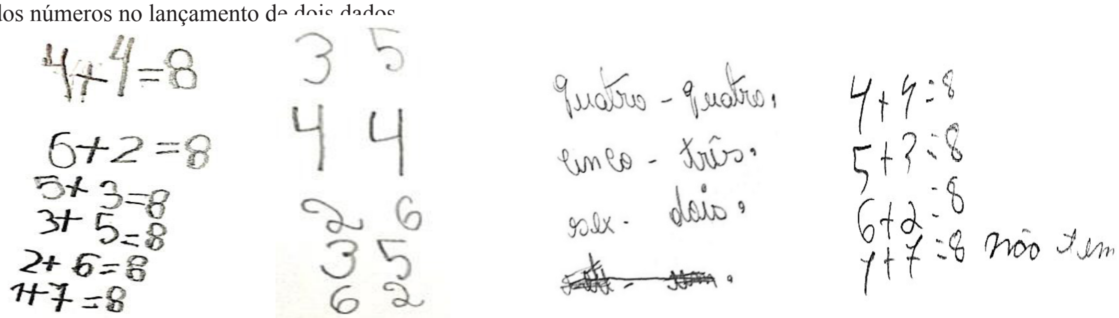
Em determinado momento da pesquisa, cada criança foi questionada sobre o caso de uma criança (João) colocar todas as suas fichas no número 1. Perguntou-se sobre a possibilidade de João ganhar o jogo dessa forma.

Jonas, uma criança do 1º ano do Ensino Fundamental, respondeu: "Não (João não poderá ganhar o jogo), porque tem dois dados. Se tivesse um dava para acertar no 1". Claramente a criança percebeu a impossibilidade do evento (tirar 1 como resultante da soma de dois dados lançados). Semelhantemente Ricardo, uma criança do 3º ano, respondeu: "Não, porque são dois dados e ele jogou todas as fichas só no 1. Nos dois dados dá 2, 6 e 10. Não dá 1 não". Essa criança avançou um pouco mais em sua resposta, ao apontar possíveis eventos do espaço amostral. Há, porém, certa limitação em sua resposta ao indicar apenas valores resultantes de números dobrados (1+1, 3+3, 5+5), mas Ricardo também evidenciou compreender, na situação de jogo, a impossibilidade de um evento (tirar 1 como resultado da soma de números indicados em dois dados).

Em outro momento, as crianças foram solicitadas a levantarem possibilidades de outro evento do espaço amostral, ao serem questionadas diante da situação: *Joao apostou todas as fichas no 8. Quais números podem sair para dar 8?* Na Figura 4 tem-se as soluções apresentadas por crianças de distintos anos escolares.

Observa-se que as crianças, amparadas em seus raciocínios combinatórios, efetuaram levantamento do espaço amostral. Curiosamente, as crianças mais novas listaram (2+6) e (6+2) como possibilidades distintas, o que de fato são, uma vez que são dois dados, claramente marcados por cores diferentes: um dado vermelho e outro azul. André, uma criança do 1º ano, listou as cinco possibilidades, mas, inicialmente, colocou uma impossibilidade (1+7=8). Quando questionado, ele percebeu que não era possível, uma vez que não há '7' em um dado. Já Antônio cometeu um pequeno equívoco, pois repetiu o evento (3,5) quando deveriam ser (5,3). As crianças do 5º ano não perceberam, nem mesmo quando questionadas, que (2,6) e (6,2) e que (3,5) e (5,3) são possibilidades distintas. Como o objetivo da pesquisa não era o de ensinar, mas o de sondar a compreensão inicial das crianças, não se discutiu mais com as crianças as suas respostas, mas acredita-se que muitas delas poderiam, a partir de maior contato com o jogo, perceber que 3 no dado azul e 5 no dado vermelho é diferente de 3 no dado vermelho e 5 no dado azul.

Figura 4 - Respostas de crianças referentes às possibilidades do evento *soma 8* do espaço amostral resultante da soma dos números no lançamento de dois dados



André – 1º ano Antônio – 1º ano Laura – 5º ano Maísa – 5º ano

Fonte: Batista e Borba (2016).

Em mais outro instante, as crianças foram questionadas: *Quem tem mais chance de ganhar: uma pessoa que apostou todas as fichas no 7 ou quem apostou todas as fichas no 11? Por quê?*. As crianças eram, assim, solicitadas a levantarem, por intermédio de raciocínio combinatório, as possibilidades dos eventos *soma 7* e *soma 11*, que fazem parte do espaço amostral da soma dos números no lançamento de dois dados. As possibilidades, nesse caso, são (1+6), (6+1), (2+5), (5+2), (3+4) e (4+3) para a *soma 7* e (5+6) e (6+5) para a *soma 11*. Mesmo sem realizarem o levantamento exaustivo das possibilidades, muitas crianças perceberam que havia mais chance da soma resultar em 7 e justificavam com alguns elementos do espaço amostral. Laura, criança do 5º ano, argumentou: "Foi uma resenha pra cair 11 aqui. 7 é mais fácil de cair o número em dois dados, porque pode cair 4, 3. Aí 11 não tem muita chance porque não cai muitos números. O 7 pode cair 5 e 2, 6 e 1". Mesmo Laura não indicando perceber que, no lançamento dos dois dados, (3+4) é diferente de (4+3), (5+2) é diferente de (2+5) e (6+1) é diferente de (1+6), ela percebeu que há mais chance da soma resultar em 7 do que em 11.

Os resultados aqui discutidos são evidências de que crianças novas possuem boas noções intuitivas a respeito de situações probabilísticas e que há articulação, em diversos momentos, de seus pensamentos combinatório e probabilístico. O uso de jogos também se mostrou um recurso adequado, possibilitando, desde cedo, um desenvolvimento mais amplo do raciocínio probabilístico.

6 Conclusão

Nesse texto me dispus a discutir algumas questões. Irei aqui buscar respostas plausíveis para cada uma das perguntas inicialmente levantadas.

Há, de fato, relações mais complexas envolvidas no entendimento de situações combinatórias e probabilísticas. Na Combinatória, para a diferenciação das situações, é preciso considerar relações de *escolha* e de *ordem*. Outras relações ainda se fazem presentes em situações combinatórias condicionais. Já na Probabilidade, há compreensões complexas inter-relacionadas: da *aleatoriedade*, de *espaços amostrais*, de *comparação e quantificação de probabilidades* e de *correlações*.

Além das relações específicas de cada área separadamente, observa-se que os raciocínios combinatório e probabilístico estão inter-relacionados entre si. Em particular, a compreensão do que seja e de como fazer o levantamento do espaço amostral de dada situação, possibilita a resolução de problemas probabilísticos, por meio de raciocínio combinatório.

Apesar de serem complexas as relações presentes em problemas combinatórios e probabilísticos, defendo que, por intermédio de suportes adequados, crianças novas podem iniciar discussões sobre situações de Combinatória e de Probabilidade. Resultados de pesquisas aqui discutidos mostram que crianças – desde a Educação Infantil - possuem ideias iniciais as quais podem ser tomadas como ponto de partida para o desenvolvimento de seus raciocínios combinatório e probabilístico.

A defesa de iniciar o estudo desses conceitos complexos bem antes, está amparado na ideia de que os raciocínios combinatório e probabilístico levam muito tempo para seus desenvolvimentos e iniciar cedo a discussão sobre os mesmos possibilita um mais amplo desenvolver posterior. O estudo da Combinatória e da Probabilidade junto a crianças novas é defendido aqui com uso de recursos e suportes representacionais adequados. O uso de material manipulativo, de jogos e de construção de árvores – virtuais ou não – têm se mostrado como meios eficientes para crianças pensarem em situações combinatórias e probabilísticas. Desse modo, pelo que apresento e discuto nesse texto, defendo que pesquisas trazem evidências de como se pode eficientemente integrar, desde o início da escolarização, conhecimentos matemáticos diversos, mesmo os que possuem certo grau de complexidade.

Referências

Azevedo, J., & Borba, R. (2013). Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software. *Alexandria Rev. Educ. Ciênc. Tecnol.*, 6(2), 113-140.

Batista, R. & Borba, R. (2016). No jogo é a moeda que diz, não é a gente que quer não: o que dizem crianças sobre a probabilidade. *VIDYA Rev. Eletrônica*, 36(2), 237-255.

Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM)*, Salvador (BA).

Borba, R., Rocha, C., & Azevedo, J. (2015). Estudos em raciocínio combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. *Bolema*, 29 (53), 1348-1368.

Borba, R., & Batista, R. (2016). O desenvolvimento do raciocínio probabilístico. *Rev.* Pátio, (80), 10-13.

Borba, R., & Braz, F. (2012). O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: *Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT)*, Fortaleza (CE).

Bryant, P., & Nunes, T. (2012). Children's understanding of probability: a literature review. *Nuffield Foundation*. Disponível em http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf.

Inhelder, B., & Piaget, J. (1955). *De la logique de l'enfant à la logique se l'adolescent*. Paris: Presses Universitaires de France.

Lima, E. (2016). Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA: investigando relações. In: *Anais do XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática (Ebrapem)*, Curitiba (PR).

Pessoa, C., & Borba, R. (2012). Do young children notice what combinatorial situations require? In: *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Taipei (Taiwan).