O Cenário do Surgimento e o Impacto do Teorema da Incompletude de Gödel na Matemática

The Emergence Scenario and the Impact of Gödel's Incompleteness Theorem in Mathematics

Rosemeire de Fatima Batistela[a]*; Maria Aparecida Viggiani Bicudo[b]; Henrique Lazari[b]

[a]Universidade Estadual de Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas. BA, Brasil.
[b]Universidade Estadual Paulista, Departamento de Matemática. SP, Brasil.
*E-mail: rosebatistela@gmail.com.

Resumo

Este artigo trata do panorama das discussões matemáticas mantidas entre os matemáticos à época em que Gödel apresentou à comunidade matemática seu teorema da incompletude. Argumenta-se que o Teorema da Incompletude de Gödel (TIG) é um teorema mais para a alma do que para as mãos dos matemáticos. Afirma-se ser ele importante porque mostra que a Matemática não pode comunicar (provar) todas as suas verdades. Porém, as provas de que a aritmética básica dos naturais é incompleta e incompletável e da impossibilidade de demonstrar a sua não contradição não impossibilita que a Matemática continue sendo produzida. A linha de argumentação exposta segue apresentando: o cenário matemático vigente no momento da publicação do TIG; o ponto de incidência deste resultado na Matemática, o impacto deste teorema nesta ciência, bem como, como ele foi compreendido e acolhido pelos matemáticos.

Palavras-chave: Teorema da Incompletude de Gödel (TIG). Problema da Compatibilidade da Aritmética. Programa de Hilbert. Método Axiomático.

Abstract

This article deals with the panorama of the mathematical discussions held among mathematicians at the time when Gödel introduced his incompleteness theorem to the mathematical community. It is argued that Gödel's Incompleteness Theorem (TIG) is a more theorem for the soul than for the hands of mathematicians. It is said to be important because it shows that Mathematics can't communicate (prove) all its truths. However, evidence that the basic arithmetic of the natural is incomplete and incomplete and that it is impossible to demonstrate its non-contradiction does not preclude mathematics from being produced. The line of argument exposed continues presenting: the mathematical scenario in force at the time of the publication of the TIG; The point of incidence of this result in Mathematics, the impact of this theorem on this science, as well as how it was understood and welcomed by mathematicians.

Keywords: *Gödel's Incompleteness Theorem. Hilbert's Second Problem. Hibert's Program. Axiomatic Method.*

1 O Cenário Matemático em que Surge o TIG

Em meados do século XIX, a área de estudos sobre os fundamentos da Matemática se constituía. Motivados por resultados advindos dos progressos havidos em cálculo, principalmente em geometria, e alavancados por resultados da teoria dos conjuntos, matemáticos direcionaram seus esforços para a criação de sistemas de axiomas para a Matemática, em especial para a aritmética, visando dar respostas às questões geradas pelos paradoxos[1], Da Costa (1977).

Os matemáticos davam-se conta do problema da consistência da Matemática, e seguiam ansiosos por não ser capaz de expressar uma solução. O anúncio de Gödel da existência de uma sentença indecidível no sistema formal da aritmética dos números naturais e que esse sistema não podia provar a sua própria consistência abalou principalmente a escola formalista que estava empenhada em completar o Programa de Hilbert e fundamentar a Matemática, apoiando-se na aritmética dos números naturais.

Contudo, a crença de encontrar fundamentos firmes para a Matemática se manteve viva, conforme se pode observar pela revisão do programa de Hilbert realizada após o TIG. Faz-se importante destacar que o logicismo e o intuicionismo, cada qual à sua maneira, havia tentado completar seus projetos de fundamentar a Matemática. O logicismo buscou reduzir a Matemática à lógica e deduzir todos teoremas da Matemática a partir de definições construídas em termos da lógica e por meio dos princípios da lógica. Os intuicionistas acreditavam que se poderia comunicar os entes matemáticos tão somente se pudesse construí-los mentalmente.

O TIG é posterior aos projetos de fundamentação da Matemática, porém, é relevante conhecermos esse momento histórico imediatamente anterior ao aparecimento deste resultado, dado que ele impõe obstáculos ao formalismo que seguia tentando fundamentar a Matemática, tendo como base

1 O forte desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos XVIII e XIX evidenciou alguns paradoxos que provocaram na lógica e na Matemática uma crise profunda, exigiram a reorganização da lógica moderna e instigaram discussões acerca dos fundamentos da Matemática. Destacam-se o Paradoxo de Cantor e o Paradoxo de Russell.

a aritmética básica dos números naturais.

Em relação aos matemáticos da época em que o TIG foi apresentado à comunidade matemática, Ferreira (2009, p.2) explana que os matemáticos acompanhavam os esforços das correntes filosóficas,

> O matemático "normal", mesmo que não estivesse envolvido diretamente em questões de fundamentação, conhecia as disputas e seguia-as com interesse, senão mesmo com paixão. Com os teoremas de Gödel, abateu-se sobre a comunidade uma espécie de exaustão.[2]

Ainda vale ressaltar que o TIG incidiu de modo distinto em cada uma das três escolas filosóficas: destruiu as esperanças dos formalistas de encontrar sistemas matemáticos formais completos e provas finitárias de consistência para a aritmética básica; frustrou a expectativa dos logicistas de que houvesse um sistema formal que englobasse a lógica. Já aos intuicionistas causou menos surpresa, embora tenha sido considerado importante, uma vez que a crença intuicionista na inesgotabilidade da Matemática por um sistema formal não inclui a necessidade de provas de consistência para a realização plena de seus constructos.

As doutrinas que se empenharam em fundamentar a Matemática "tinham em comum a metáfora que o conhecimento é um edifício e por isso deve ter seus fundamentos seguros, fidedignos e especificáveis" (Enciclopédia, 2006, p. 376), e tinham o comprometimento e a esperança da possibilidade dessa realização. Contudo, diferiam a respeito de pontos de vista sobre o que seria legítimo considerar na base da fundamentação.

2 O TIG e as Escolas Filosóficas: Logicismo, Intuicionismo e Formalismo

Em ordem cronológica, a primeira dessas doutrinas que se apresentou foi o logicismo. Iniciada por volta de 1884, alguns de seus defensores mais expressivos são Gottlob Frege (1848-1925), Giuseppe Peano (1858-1932), Bertrand Russell (1872-1970) e Alfred North Whitehead (1861-1947).[3]

As ideias centrais do logicismo giraram em torno das proposições analíticas da lógica, uma vez que estas eram tidas como o fundamento sobre o qual o conhecimento matemático poderia se justificar. Assim, a proposta logicista apresentava dois eixos importantes: a) os axiomas matemáticos são princípios da lógica; e b) a Matemática pode ser deduzida da lógica.

A realização do projeto dessa escola se deu por meio da produção da obra *Principia Mathematica*[4] (*Principia*) de Russell e Whitehead. Essa obra foi considerada um marco para a construção de uma teoria formal dos conjuntos. Na obra buscou-se mostrar que toda Matemática clássica poderia ser deduzida da teoria dos conjuntos e, ao final, mostrar que a Matemática clássica poderia ser escrita com as peças da lógica.[5] A figura 1 abaixo ilustra esse empenho.

Figura 1 - Logicistas. (Faz referência às ideias dos logicistas: mostrar que a Matemática clássica era parte da lógica.

Fonte: Snapper (1984, p.85).

No entanto, mostrar que a Matemática poderia ser deduzida da teoria dos conjuntos era equivalente a mostrar que os axiomas da teoria dos conjuntos pertenciam à lógica. A formulação do programa dos logicistas transformou-se mais uma vez. A tarefa então passou a ser a seguinte: demonstrar que os axiomas do *Principia* pertenciam à lógica. Como, neste caso, em vez dos axiomas do *Principia*, poderia se usar qualquer outra teoria formal dos conjuntos, e, a teoria desenvolvida por Zermelo e Frankel (ZF) é mais conhecida, utilizaremos a seguir, para exemplificar, os nove axiomas de ZF.

Restava demonstrar que os axiomas abaixo pertenciam à

2 Trata-se de um texto de comunicação intitulado "A lógica matemática como empreendimento fundamentador" apresentada à Sessão da Classe de Ciências da Academia das Ciências de Lisboa, em 15/01/2009, conforme informações do autor (http://webpages.fc.ul.pt/~fjferreira/fundamentador_acl.pdf.)

3 Convém notar que antes de Bertrand Russell o filósofo alemão Frege já havia apresentado as teses centrais do logicismo. Porém, talvez em virtude do simbolismo muito complicado por ele empregado, sua obra quase não foi lida, permanecendo praticamente ignorada, até que grande parte de suas idéias foram redescobertas, de modo independente, por Bertrand Russell. Por isso, devemos considerar Frege mais como um precursor do logicismo, não obstante a originalidade e a relevância de suas concepções. (Da Costa, 1977, p. 6).

4 Obra em três volumes, publicados em 1910, 1912 e 1913, nas quais tentou-se arrematar todas as verdades matemáticas baseando-se num arrolamento extremamente bem definido de axiomas e regras de dedução, usando uma linguagem lógico-simbólica própria. Da Costa (1977) afirma anteriormente, Russell já havia exposto suas teses em forma de livro, em *The Principies of Mathematics*, que apareceu em 1901. Mas foi somente com os Principia que o logicismo adquiriu maturidade completa.

5 Para Mondini (2008, p.4) o objetivo do movimento logicista era excluir da análise as intuições geométricas, substituindo-as por noções da Aritmética, ou seja, estabelecer a Análise como base para o sistema de números reais". Assim, o sistema de números reais pode ser construído a partir do sistema de números racionais, estes podem ser construídos a partir dos números inteiros, que por sua vez podem ser construídos a partir dos números naturais. Dessa maneira, a Análise estaria fundamentada no sistema de números naturais.

Lógica.

1) Axioma da extensionalidade: $\forall x, y\ (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$
(diz que dois conjuntos são idênticos se, e somente se, têm os mesmos elementos);

2) Axioma do conjunto vazio: $\exists x; \forall y\ (\sim(y \in x))$
(enuncia a existência de um conjunto que não tem nenhum elemento);

3) Axioma da formação de pares: $\exists x, y\ \exists z; \forall w\ (w \in z \leftrightarrow w = x$ ou $w = y)$
(enuncia que dados dois objetos x e y, existe um conjunto z cujos elementos são exatamente x e y);

4) Axioma da união: $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (z \in y \leftrightarrow \exists t\ (z \in t$ e $t \in x))$
(afirma que dado um conjunto arbitrário x, existe um conjunto y tal que os elementos de y são os elementos de x);

5) Axioma da infinidade: $\exists x; (\emptyset \in x$ e $\forall y\ (y \in x \rightarrow y \cup \{y\} \in x))$
(afirma a existência de um conjunto que contém os seguintes elementos
$\emptyset; \{\emptyset\}; \{\emptyset,\{\emptyset\}\}; \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}; \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}...$)

6) Esquema de axiomas de substituição: se $A(x, y, t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma fórmula com variáveis livres x e y com parâmetros $t_1, t_2, \ldots, t_n$, então $\forall t_1, t_2, \ldots, t_n$ ($\forall$x, $\exists$ *um único* y; $A(x, y, t_1, t_2, \ldots, t_n) \rightarrow \forall u\ \exists v$; $B(u, v)$) onde $B(u, v)$ designa a fórmula $\forall r\ (r \in v \leftrightarrow \exists s; (s \in u$ e $A(s, r, t_1, t_2, \ldots, t_n)))$.
(A fórmula A define uma função implícita de x em y. O axioma afirma que para qualquer conjunto u, existe um conjunto v, que é imagem de u através dessa função implícita;)

7) Axioma do conjunto das partes: $\forall x\ \exists y; \forall z\ (z \in x \leftrightarrow z \subset x)$
(enuncia que para qualquer conjunto x existe um conjunto y cujos elementos são os subconjuntos de x);

8) Axioma da escolha:
Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família não-vazia de conjuntos não-vazios, então, existe uma função
$f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tal que $f(i) \in A_i$. f é uma função escolha e equivale a:
Se $A_i \neq \emptyset$, $\forall_{i \in I}$, então $\sum_{i \in I} A_i \neq \emptyset$

9) Axioma da fundação: $\forall x\ \exists y\ (x = \emptyset$ ou $(y \in x$ e $\forall z\ (z \in x \rightarrow \sim(z \in y)))$.
(afirma que nenhum conjunto é um de seus próprios elementos (isso evita o paradoxo de Russell[6])).

Contudo, foi observado que o *axioma da escolha* e o *axioma da infinida*de não podem ser considerados proposições lógicas, pois a aceitação destes se dava em virtude de seus conteúdos e não de suas formas sintáticas[7], o que contrariava a definição de proposição lógica aceita pelos logicistas. O enunciado do *axioma da escolha* não especifica se a coleção de conjuntos não-vazios é finita ou infinita. Isso implica dizer que toda coleção finita de conjuntos não-vazios tem uma função de escolha. No caso de termos uma coleção de um conjunto, uma função de escolha corresponde a apenas um elemento. Este exemplo diz que todo conjunto não-vazio tem um elemento, mas isso é trivialmente válido. E, então, o axioma da escolha pode ser visto como afirmando a generalização dessa propriedade que já é evidente para coleções finitas. O *axioma da infinidade* aponta para a existência de conjuntos infinitos com os quais nos familiarizamos matematicamente, seja com os inúmeros conjuntos infinitos que conhecemos, seja com o conjunto de pontos do espaço euclidiano. Isso mostra que o aceitamos em virtude de seu conteúdo.

E, mais uma vez, por fim, a implementação do plano dos logicistas transformou-se e equivalia logicamente a demonstrar que os nove axiomas de ZF eram proposições lógicas, ou seja, que todas teriam generalidade completa e seriam verdadeiras em virtude de suas formas sintáticas, e não dos seus conteúdos. Mas isso não ocorreu, e como destaca Snapper (1984, p.86), pode-se dizer que a escola logicista fracassou em aproximadamente vinte por cento de seu esforço em dar fundamentos firmes à matemática".

A escola logicista fracassou devido à impossibilidade de ela própria mostrar concretamente que todas as proposições matemáticas poderiam ser expressas na terminologia lógica e, que todas as proposições matemáticas verdadeiras são as expressões verdadeiras para a lógica, salienta Machado (1991).

No entanto, o insucesso constatado nesse programa não caracteriza uma falta de importância para esta escola, principalmente pela influência que o *Principia* tem na história da Matemática e pelo tratamento lógico que possibilitou o desenvolvimento da Lógica Matemática Moderna. Isso ocorreu especialmente pela introdução da simbologia dos quantificadores $\forall$ (para todo) e (existe), criada por Frege em sua obra que objetivava formalizar as regras de demonstração, iniciando com regras elementares simples sobre as quais não houvesse dúvidas, a qual revolucionou a lógica pois proporcionou o desenvolvimento do cálculo de predicados (ou lógica de predicados).

Quando surgiu o TIG, o logicismo se encaminhava para ser um ramo técnico da Matemática, que atualmente conhecemos por lógica matemática moderna, seguindo o projeto de Frege, segundo Leary (2000). Por outro lado, outros matemáticos entendiam, diferentemente, que a Matemática necessitava ser colocada em bases seguras, partindo sempre da intuição, constituindo uma das principais correntes do movimento construcionista, o intuicionismo, conforme Mondini (2008).

6 Também conhecido popularmente como paradoxo do barbeiro diz de uma contradição descoberta por Russell em 1901, a qual podia ser derivada do sistema utilizado por Frege em seu livro *Leis fundamentais da aritmética*, o qual evidenciava a tentativa de reduzir a aritmética à lógica. O paradoxo diz: considere-se o conjunto y de todas as entidades que não são membros de si próprias, isto é, x y se, e só se x y. Deduz-se disso que se y y se, e só se, $y \notin y$.

7 Segundo Snapper: "A única maneira de avaliar o sucesso ou o fracasso do logicismo em efetuar sua tarefa é examinar todos os nove axiomas de ZF e verificar se cada um deles se enquadra no conceito logicista de proposição lógica. Isso exigiria um artigo separado, e seria interessante para leitores totalmente familiarizados com ZF. Assim, em vez disso, afirmamos simplesmente que pelo menos dois desses axiomas, ou seja, o axioma da infinidade e o axioma da escolha não podem ser considerados proposições lógicas. Por exemplo, o axioma da infinidade diz que existe conjuntos infinitos. Porque aceitamos este axioma como verdadeiro? A razão é que todos estamos muito familiarizados com inúmeros conjuntos infinitos, por exemplo, o conjunto dos números naturais, ou o conjunto de pontos do espaço euclidiano tridimensional. Portanto, aceitamos este axioma baseados em nossa experiência do dia-a-dia com conjuntos e isso claramente mostra que o aceitamos em virtude de seu conteúdo e não em virtude de sua forma sintática. Em geral, quando um axioma afirma a existência de objetos com os quais nos achamos familiarizados devido à nossa experiência do dia-a-dia, é quase certo que não se trata de uma proposição lógica no sentido do logicismo (Snapper, 1984, p. 86-87).

Para a escola intuicionista, o alicerce eram os números naturais. A crença na intuição natural (Machado, 1991) de todos os seres humanos em relação aos naturais amalgamava o método de construção que se iniciava no número 1 e seguia um por um até *n*, *n* natural.

A construção intuicionista era efetiva (uma vez completada a construção de um número, ele era considerado integralmente) e indutiva (para construir o número n, deve-se percorrer todos os passos mentais de construção desde o 1 até o n). A Matemática era concebida, então, como uma atividade mental, consistindo em realizar construções mentais efetivas e indutivas uma após a outra, ou seja, constructos, um após outro. O mesmo que vale para os números vale para as demonstrações, para os teoremas e para as definições. A Figura 2 faz referência aos projetos dessas escolas.

Figura 2: Intuicionismo e Formalismo. Figura representativa do intuicionismo e do formalismo. Cada escola a seu jeito, construíam o que acreditavam que seria a base do edifício da Matemática: a intuição e a formalização, respectivamente.

Fonte: Snapper (1984).

Os teoremas intuicionistas em especial, por sua vez, tornaram-se muito longos. Ao serem feitos de maneira construtiva eram desprovidos da elegância[8], engenhosidade e brevidade presentes em provas dos mesmos realizadas ao modo da Matemática clássica. A escola intuicionista tem em Brouwer a síntese de formação e fundação no ano de 1908. As consequências mais importantes da definição intuicionista de Matemática são: a Matemática é construtiva e ela não pode ser reduzida a nenhuma outra ciência. Nessa segunda consequência, reside o embate fundamental entre o logicismo e o intuicionismo: os intuicionistas não aceitam as leis lógicas as quais entendiam como combinações de palavras sem sentido, e sendo assim não podiam ser construídas pela mente humana (Snapper, 1989). A isso se deve, por exemplo, a sua não aceitação da lei do terceiro excluído aceito pelos logicistas.

Os intuicionistas estavam seguros em relação a não terem reconstruído toda a Matemática clássica, mas apenas a parte que para eles era considerada Matemática, já que a compreendiam como a ciência das construções possíveis por meio de constructos e da intuição. Enquanto os logicistas objetivavam, em seu projeto de fundamentação, justificar toda a Matemática clássica, os intuicionistas objetivavam "dar uma definição válida de Matemática para ver que matemática surgirá dela" (Snapper, 1989, p. 89). Assim para eles, a Matemática que não pudesse ser definida dessa forma não era considerada Matemática.

Dado o modo como os intuicionistas trabalharam, isto é, por meio de constructos, a Matemática intuicionista era desprovida de contradições e em termos de fundamentos da Matemática essa corrente filosófica oferece uma solução satisfatória. Seu insucesso, porém, se deve: i) à ocorrência de teoremas clássicos que não são compostos de constructos, e portanto, não podem ser demonstrados pelo modo intuicionista[9]; ii) os que podem ser demonstrados tanto da maneira clássica quanto da maneira intuicionista e, iii) os que são demonstrados como verdadeiros no intuicionismo e como falsos na Matemática clássica. Sobre o exposto no item ii), incidem as rejeições em relação ao tamanho e a *deselegância das demonstrações*, como afirmavam os matemáticos clássicos. Sobre os itens i) e iii), incide a simples recusa por entenderem que a aceitabilidade das demonstrações intuicionistas é em razão delas serem "[...] de natureza emotiva, baseadas em um sentimento profundo do que seja realmente a Matemática [...] o fracasso da escola intuicionista foi em não tornar o intuicionismo aceitável, pelo menos para a maioria dos matemáticos" (Snapper, 1984, p. 89-90).

Focando a terceira escola filosófica aqui tratada por nós, o formalismo, Leary (2000, p.3) afirma que o plano de Hilbert era refutar a visão intuicionista, segundo a qual grande parte da Matemática estava sob suspeita por não ser obtida por constructos[10] finitistas. Assim, ele se comprometeu a provar que toda Matemática clássica era consistente, valendo-se métodos finitários, também usados pelos intuicionistas, pois, sendo assim, tinha certeza de que sua prova seria aceita por Brouwer e seguidores.

Atribui-se à Hilbert o conceito moderno de formalismo[11]

8 Da Silva (2007) afirma que a elegância em Matemática, como em qualquer contexto, se define como o máximo de efeito (ou consequências desejáveis) com o mínimo de recursos. Entendemos elegância como a intersecção entre usar a menor quantidade possível de recursos da teoria e obter o caminho da prova mais curto possível.

9 Por exemplo, o teorema assim enunciado "Existem pelo menos dois números irracionais distintos *a* e *b* tais que *a.b é um número racional", para valores de ab*, pode ser provado no formalismo, mas para os intuicionistas este teorema não estaria provado, pois eles não aceitavam a regra de inferência Redução ao Absurdo, o Princípio do Terceiro Excluído e a Lei da Dupla Negação.

10 Um constructo, de acordo com os intuicionistas, é toda construção mental efetiva e indutiva e pode ser reconhecida por todos os seres humanos.

11 Snapper (1984) afirma que embora seja Hilbert considerado o fundador do formalismo, na obra *Grundgesetze* der *Aritmetik*, Frege já se refere contrariamente a eles. Em *Grundgesetze der Arithmetik* (Leis básicas da Aritmética), publicado em 1903, Frege expõe um sistema lógico, no qual Bertrand Russell iria encontrar uma contradição, que ficou conhecida como o paradoxo de Russell.

e a criação da escola formalista por volta de 1910. Esse autor concebia a Matemática como um sistema puramente formal, consistindo de símbolos desprovidos de significado ou de interpretação, cuja manipulação por meio de regras precisas e mecanismos finitários conduziriam à prova da veracidade ou falsidade de todas as expressões que pudessem ser formuladas em tal sistema. Fazer isso era mostrar que a axiomática não levava a contradições. Assim, por meio de uma linguagem artificial com a manipulação de símbolos destituídos de significação, os formalistas conduziam a edificação que mantinha acesa a chama da esperança de que a Matemática seria o único ramo do conhecimento capaz de ostentar o privilégio de fundamentar-se a si mesmo. O propósito dos formalistas era trazer para as teorias matemáticas um conjunto de regras bastante definidas e explícitas, acompanhado de uma simbologia, e criar mecanismos para operar os algoritmos.

Para os formalistas, a tarefa era formalizar a Matemática clássica. Foi isso que Hilbert fez em *Fundamentos da Geometria*, (Hilbert, 1950), obra em que ele apresenta uma fundamentação para os *Elementos* de Euclides (axiomatizada desde cerca do século III a.C.), objetivando tornar formalizada a Geometria Euclidiana e deixando claros possíveis pressupostos que estavam não explicitados na obra de Euclides, como a continuidade da linha, por exemplo.

Note-se que axiomatização e formalização são processos distintos. A primeira se dá por um processo que envolve escolha de entes primitivos e de um número pequeno de axiomas (que são relacionados aos entes e aceitos como verdadeiros sem que seja necessário demonstrar suas veracidades), relacionando as definições e os axiomas, por meio de regras de inferência, para finalmente deduzir e demonstrar os teoremas. A segunda, a formalização de uma teoria como a proposta por Hilbert, implica a designação de uma linguagem lógica de primeira ordem,[12] por meio da qual se faz a formalização dessa teoria. A escolha dessa linguagem é composta por cinco itens: i) escolha de uma lista enumerável de símbolos para as variáveis; ii) escolha de símbolos para os conectivos da linguagem comum; iii) escolha para o sinal de igualdade; iv) escolha de um símbolo para os quantificadores "∀" (para todo) e "" (existe); e v) escolha de um símbolo para cada signo não definido da teoria em questão.

Dessa forma, acreditavam os formalistas que ao formalizar as teorias matemáticas livrariam a Matemática de contradições, bem como de possíveis paradoxos, pois seriam eliminados pelo processo de reescrita da mesma com demonstrações rigorosas em um sistema formal. Assim, na teoria formalizada não existiria sentença para a qual se tivesse uma prova de verdade e de falsidade, simultaneamente. Logo, pensavam, provariam que as teorias matemáticas são completas e consistentes no âmbito da sua própria axiomática.

Com o resultado do TIG, o que cai por terra, em 1931, é a possibilidade de demonstrar a compatibilidade dos axiomas da aritmética em um sistema que inclua a aritmética. A repercussão do resultado atingiu também o projeto de Hilbert e impôs a determinação da não possibilidade de efetivação do projeto, dada a impossibilidade de provar a consistência da aritmética dentro da própria aritmética.

Changeux e Connes (1996, p.176) explicam isso nas seguintes palavras:

> No início do século, os matemáticos buscaram precisar o que é uma demonstração no campo da matemática. Hilbert construiu uma linguagem artificial baseada em um alfabeto finito, um número finito de regras de inferência lógica e de proposições que se supõem verdadeiras ou axiomáticas. A partir de um tal sistema, ou linguagem formal, um algoritmo universal permite decidir sobre a validade de uma demonstração formulada nessa linguagem. Podemos assim, pelo menos em teoria, estabelecer a lista de todos os teoremas demonstráveis em tal linguagem formal. Hilbert esperava poder reduzir os teoremas matemáticos aos que são demonstráveis em uma linguagem formal adequada. O teorema de Gödel mostra que é impossível.

Gregory Chaitin (2001, p.163) compara o projeto de Hilbert de fundamentar a Matemática com o projeto de fundamento da Biologia. Neste caso, segundo esse autor:

> A Teoria Algorítmica da Informação é o verdadeiro fundamento matemático: Matemática lida com informação matemática contida em axiomas, exatamente como a informação biológica está contida nas sequências de DNA, que constituem o fundamento da biologia. Ao tentar encerrar a verdade matemática em um sistema formal rígido, Hilbert extraviou-se. Matemática, assim como a Biologia é dinâmica, encontra-se em transformação, e não pode ser dada de uma vez por todas ... Gödel e Turing são apenas a parte visível do *iceberg.* AIT fornece uma análise muito mais profunda sobre os limites do método axiomático. Ele fornece uma origem mais profunda da incompletude, uma explanação mais razoável de que nenhum conjunto finito de axiomas é completo.[13]

12 Eventualmente, poderia não ser de primeira ordem. Uma linguagem de primeira ordem é composta de símbolos lógicos e não-lógicos. Os símbolos lógicos são os seguintes: (i) conectivos proposicionais (a serem escolhidos); (ii) símbolos auxiliares: (os parênteses e a vírgula) (que dependendo do modo como se articulam as regras gramaticais, esses símbolos podem ser dispensados); (iii) uma coleção enumerável de variáveis individuais; (iv) eventualmente, o símbolo de igualdade, = (neste caso, a linguagem será uma linguagem de primeira ordem com igualdade); (v) quantificadores (o quantificador universal ou o existencial ou ambos). Os símbolos não-lógicos são de três tipos: (i) um conjunto qualquer de constantes individuais (eventualmente, esse conjunto pode ser vazio, ou seja, a linguagem pode não ter constantes individuais); (ii) símbolos de predicados, cada um de uma certa aridade, ou peso, $n > 0$ (n sendo um número natural), e (iii) símbolos funcionais, cada um de uma certa aridade $n > 0$. Isso que acima está descrito é uma espécie de 'esqueleto' geral do que seja uma linguagem de primeira ordem 'básica'. A expressão primeira ordem refere-se ao fato de que na linguagem assim denominada há unicamente variáveis individuais, mas não variáveis para predicados ou funções.

13 Do original: AIT is the true foundations of mathematics: Mathematics deals with mathematical information, which is what axioms contain, just as biological information is contained in DNA, which is the foundation of biology. Hilbert's attempt to entomb mathematical truth in a fixed, formal system was completely misguided. Mathematics, like biology, is dynamic, not static. At any moment in time our mathematical knowledge consists of only a finite amount of information, but the Platonic world of pure mathematics contains an infinite amount of information. Gödel and Turing were only the tip of the iceberg. AIT provides a much deeper analysis of the limits of the formal axiomatic method. It provides a deeper source of incompleteness, a more natural explanation for the reason that no finite set of axioms is complete. (Chaitin, 2001, p. 163).

Da Silva (2007), a respeito do horizonte de possibilidades atual frente aos resultados da tentativa de fundamentação da Matemática, afirma que o logicismo, o intuicionismo e o formalismo contribuíram sobremaneira para o projeto de fundamentação da Matemática, ainda que o sucesso total não tenha sido obtido. Ou seja, essas três correntes, cada qual ao seu modo, procuraram respectivamente mostrar as intersecções da Matemática com a lógica, procuraram "demonstrar quais conhecimentos matemáticos podem ser construídos partindo de ideias intuitivas e, por fim, para o caso do formalismo, estabelecer a Matemática como a ciência dos sistemas formais" (Da Silva, 2007, p. 235-236).

Desta maneira, entendemos que o TIG é central aos empenhos de fundamentação da Matemática, mas ele não invalida parte alguma da Matemática já construída até o momento por nenhuma das três escolas. Ele conclui que toda teoria, que tenha enlaçado em seu sistema formal os axiomas de Peano, possui fórmulas que são verdadeiras e indemonstráveis e, como consequência disso, que essas teorias não são capazes de provar suas próprias consistências.

3 O Ponto de Impacto do TIG na Matemática: o Problema 2 de Hilbert

O TIG aparece no artigo[14] *Sobre proposições formalmente indecidíveis nos Principia Mathematica e sistemas correlatos*, publicado em 1931. Trata-se de um dos mais importantes resultados da lógica matemática e que recai sobre o método axiomático. Nos desdobramentos de suas conclusões, esse resultado apresenta que o método axiomático está sujeito a uma limitação fundamental no poder deste método, na medida em que indica a impossibilidade de se ter, simultaneamente, um conjunto consistente e completo de axiomas nem sequer para a aritmética de Peano.

Esse resultado repercute, em grande parte, da Matemática, na medida em que muitas de suas teorias se apoiam na aritmética dos números naturais.

Os *Principia Mathematica,* mencionados no título do artigo, são os três volumes do tratado de Russell e Whitehead sobre Lógica Matemática e fundamentos da Matemática. Gödel mostrou que o sistema com o qual os *Principia* trabalham ou qualquer outro sistema, no âmbito do qual a aritmética de Peano possa ser desenvolvida, é essencialmente incompleto.

O TIG provocou um abalo no projeto matemático de vida de Hilbert. O programa de Hilbert foi um programa que objetivava construir uma teoria rigorosa capaz de descrever toda a Matemática. Em outras palavras, propunha "formalizar as teorias matemáticas (ou, melhor ainda, toda a Matemática), e demonstrar por meios finitários que essas teorias (ou, melhor ainda, toda a Matemática formalizada) eram consistentes" (Da Silva, 2003, p. 33).

O resultado da incompletude incide pontualmente sobre o *problema 2*[15] de Hilbert, que é o segundo da lista dos 23 problemas apresentados por ele no Congresso Internacional de Matemática ocorrido em 1900, em Paris. Tratava-se de problemas ainda não resolvidos do século XX e o problema 2 solicitava a prova da consistência da aritmética dos números inteiros não negativos.

Na apresentação de seu segundo problema, Hilbert (2000) inicia esclarecendo que a investigação dos fundamentos de uma ciência passa pela escolha de axiomas para a criação de um sistema de axiomas que contenha uma descrição exata e completa das relações existentes entre as ideias elementares dessa ciência. Esses sistemas criados definem as ideias elementares que compõem essa fundação, da qual serão derivadas, por meio de um número finito de passos lógicos, declarações consideradas corretas. Assim, a prova da consistência da aritmética dos números naturais ou, semelhantemente, a prova da não contradição dos axiomas da aritmética de Peano ou, ainda, a prova da compatibilidade dos axiomas da aritmética básica, dizem de uma prova que demonstre que nenhum teorema derivado dos axiomas aritméticos, que compõem o sistema formal da aritmética, pode ser demonstrado como verdadeiro e como falso, simultaneamente.

No âmbito da lógica clássica, demonstrar a compatibilidade dos axiomas aritméticos é demonstrar que as conclusões geradas pelo conjunto desses axiomas não são contraditórias, ou seja, não são ao mesmo tempo verdadeiras e falsas.

Semanticamente, uma teoria é consistente se, e somente se, existir um modelo, isto é, se existir uma interpretação sob a qual todas as fórmulas são verdadeiras. A definição sintática diz que uma teoria é consistente se, e somente se, não existir nenhuma fórmula P, tal que, tanto P, como sua negação ~P, sejam demonstráveis a partir dos axiomas da teoria do sistema dedutivo, cujas fórmulas estão associadas.

A consistência se firmou como um problema para a comunidade matemática no século XIX, no período de grande expansão e intensificação da pesquisa em Matemática. Nagel e Newman (1973) explicam que a conclusão da impossibilidade lógica da solução dos problemas clássicos da Antiguidade produziu investigações profundas sobre a natureza do número, definições rigorosas para conjuntos numéricos, chegando a fundar um novo ramo da Matemática, como um valioso subproduto dessas demonstrações, qual seja, o campo da análise. Além disso, o episódio protagonizado por Carl Friedrich Gauss (1777-1855), János Bolyai (1802-1860), Nikolai Lobachevsky (1792-1856) e Georg Friedrich Bernhard

14 Nome original: Über *formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*, Divulgado na revista *Monatshefte für Mathematik und Physik*, p. 349–360.

15 Vale a pena lembrar que o problema 2 era uma questão matemática e ao mesmo tempo filosófica, dado que sua demonstração era peça chave para o sucesso do Programa de Hilbert.

Riemann (1826-1866) em torno da criação das geometrias não-euclidianas foi crucial junto a esse processo de abstração a que a Matemática estava se propondo. Resultados fecundos são obtidos quando se substitui o quinto postulado de Euclides por versões de suas negações nos casos dos surgimentos das geometrias não-euclidianas, e estes "solaparam a crença tradicional, sustentada pela geometria euclidiana, de que os axiomas da geometria poderiam ser estabelecidos por sua aparente auto-evidência". (Nagel & Newman, 1973, p.19).

Decorre disso uma compreensão da própria comunidade matemática a respeito de que o trabalho do matemático seria investigar se as conclusões matemáticas obtidas são consequências lógicas necessárias das pressuposições iniciais ao invés de averiguar se os postulados ou as conclusões assumidas são verdadeiros. Unindo-se essa compreensão à crescente abstração da Matemática, levanta-se a questão de saber se um dado conjunto de postulados tomados como fundamento de um sistema é internamente consistente. No caso da geometria riemaniana a questão sobre a consistência do conjunto de axiomas propostos por Riemann poderia ser formulada de forma a questionar se o conjunto de axiomas criado por Riemann não conduzia à teoremas contraditórios.

Por meio de modelos, vislumbrou-se que seria possível investigar se os axiomas conduziriam a teoremas contraditórios. No entanto, tão logo iniciadas as tentativas, pode-se discernir que elas apenas deslocavam o problema para outro domínio, pois a prova, por exemplo, da consistência da geometria de Riemann apelava para a consistência da geometria de Euclides. A tentativa de fazê-lo, por meio da geometria de coordenadas cartesianas, que transformava os axiomas de Euclides em verdades algébricas, mostrou-se vulnerável, pois a prova da consistência pelo método de descoberta de um modelo não era absoluta uma vez que transferia o problema para outro domínio, e então a geometria seria consistente se a álgebra o fosse, Nagel & Newman (1973).

Hilbert (2000) explica que a prova da compatibilidade dos axiomas da geometria pode ser efetuada por meio da construção de um corpo numérico adequado. Por isso, qualquer contradição nas deduções dos axiomas geométricos deveria, posteriormente, ser reconhecível na aritmética deste campo de números. A prova da compatibilidade da geometria dependeria da prova da compatibilidade dos axiomas da aritmética. Tal intento solicitava um método direto de prova, pois seus axiomas são, basicamente, as regras conhecidas do cálculo, juntamente com o *axioma da continuidade*.[16] Hilbert (2000, p.414) afirma estar convencido de "ser possível encontrar uma prova direta para a compatibilidade dos axiomas aritméticos, por meio de um estudo cuidadoso e de modificação adequada dos métodos conhecidos de raciocínios na teoria dos números irracionais".[17]

A busca pela prova absoluta continuava como problema a ser resolvido pela Matemática e Hilbert novamente propôs a alternativa de fazê-lo "estabelecendo sistemas de consistência sem pressupor a consistência de outros sistemas, isso seguiria os passos de uma completa formalização de um sistema dedutivo" (Nagel & Newman, 1973, p. 31).

A respeito da importância da investigação dos fundamentos da Matemática, Hilbert (1950) explica que, nessa ciência, provar a existência de um conceito é sinônimo de provar que, por meio da aplicação de um número finito de processos lógicos, os atributos associados ao conceito não conduzem a uma contradição. Desse modo, a prova da compatibilidade dos axiomas aritméticos é, ao mesmo tempo, a prova da existência matemática do sistema completo de números naturais.

A resolução positiva do problema 2 de Hilbert forneceria a segurança necessária para a realização completa e satisfatória do programa de Hilbert. Ao mesmo tempo, faz-se importante dizer que as dúvidas expressas sobre a existência do sistema completo de números reais poderiam ser respondidas quando da prova da compatibilidade dos axiomas da aritmética, conforme se pode ver em Hilbert (2000), quando ele afirma acreditar que a existência de números cardinais e do *continuum* pode ser atestada pela prova da não contradição do sistema de axiomas da aritmética, enfatizando a importância fundamental dessa prova tão almejada.

Da Silva (2003) explica porque o problema da consistência é tão importante,[18] já que ele parece ter sido resolvido: a consistência da teoria axiomática dos números naturais é *evidentemente* uma teoria consistente, por ser a teoria de um domínio dado de números naturais. No entanto, sua consistência evidente está vinculada a uma intuição que pressupõe ter a capacidade de nos oferecer uma teoria verdadeira e, sendo verdadeira, a aritmética dos naturais, *a fortiori*, seria consistente. Contudo, "a aritmética formal,

16 O axioma da continuidade de Hilbert (1950) em *The Foundations of Geometry,* é o grupo V dos axiomas hilbertianos e torna possível a introdução da ideia de continuidade na Geometria. Esse grupo, é constituído por dois axiomas: 1) Propriedade Arquimediana: *Seja A_1 um ponto qualquer sobre a linha arbitrária entre os pontos A* e *B. Tome os pontos A_2, A_3, A_4,..., tal que A_1* se encontre entre *A* e *A_2, A_2* entre *A_1* e *A_3, A_3* entre *A_2* e *A_4, e assim por diante. Além disso, tome os segmentos AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., de modo que sejam iguais entre si. Então, entre as séries de pontos, sempre existirá um certo ponto A_n* tal que *B* fique entre *A* e *A_n*. Hilbert (1950) assevera que esse é um axioma linear. O segundo axioma deste grupo, pode ser assim expresso: 2) Axioma da Integralidade (ou Axioma da completude): *Em um sistema de pontos, retas e planos, é impossível adicionar outros elementos de tal maneira que o sistema assim generalizado forme uma nova Geometria obedecendo todos os cinco grupos de axiomas. Em outras palavras, os elementos de geometria formam um sistema que não é suscetível a extensões, se considerarmos os cinco grupos de axiomas como válidos*. Hilbert (1950, p. 15-16) afirma que de um ponto de vista teórico, o valor deste axioma é que ele leva indiretamente para limitar a introdução de pontos, e, portanto, torna possível estabelecer uma correspondência um-para-um entre os pontos de um segmento e o sistema de números reais.

17 Do original: I am convinced that it must be possible to find a direct proof for the compatibility of the arithmetical axioms, by means of a careful study and suitable modification of the known methods of reasoning in the theory of irrational numbers. (Hilbert, 2000, p. 414).

18 Vale a pena lembrar que o problema 2 era uma questão matemática e ao mesmo tempo filosófica dado que sua demonstração era peça chave para o sucesso do Programa de Hilbert.

entretanto, não é uma teoria de nenhum domínio pré-dado de objetos; logo, não é em nenhum sentido próprio, nem verdadeira, nem falsa. Cabe-lhe apenas descrever uma estrutura formal, cuja realidade está sub judice". (Da Silva, 2003, p. 29). Em outras palavras, *demonstração* da compatibilidade dos axiomas aritméticos, significa "demonstrar que a estrutura formal que a teoria descreve é uma estrutura possível, ou seja, é a estrutura de um domínio possível de objetos". Assim, *ser possível* diz de existir matematicamente, e sabemos que para Hilbert, "existir em matemática tem apenas um significado, estar livre de contradições" (Da Silva, 2003, p. 29).

A respeito da estrutura a qual a aritmética formal descreve, Da Silva (2003, p.30) afirma:

> A estrutura das sequências de tipo ω, ou sequências-ω. Uma sequência-ω é um tipo de sequência linear discreta de pontos, com primeiro, mas sem último elemento. Os axiomas da aritmética formal (axiomas de Dedekind-Peano) são simplesmente a descrição das propriedades características dessas sequências em uma linguagem formal apropriada. Eles nos dizem, com respeito a qualquer sequência-ω, que há um primeiro ponto, a todo ponto segue-se um outro ponto, o ponto sucessor desse, a operação de obtenção de pontos sucessores é injetiva e não há pontos que não sejam obtidos do primeiro ponto por uma iteração finita da operação sucessor (este é o axioma de indução completa). É precisamente a consistência dessa teoria formal que Hilbert pede que se demonstre.

Uma possibilidade de prova de consistência da aritmética seria dar uma interpretação para a teoria, ou seja, exibir uma sequência-, mas para isso haveria que novamente se apelar à intuição. Resta, então, mostrar a consistência de outro modo.

> Um modo direto de se demonstrar a consistência de um sistema axiomático formal é simplesmente mostrar que nenhuma demonstração formal no contexto desse sistema termina numa contradição manifesta [...], ou seja, nenhuma contradição será jamais um teorema do sistema. (Da Silva, 2003, p. 30).

Focando novamente o problema 2 de Hilbert, Da Silva (2003, p.31) explica com detalhes quando afirma que "uma solução do problema posto por Hilbert só pode ser dada no contexto de uma meta-teoria estritamente mais fraca que a própria aritmética formal. Hilbert chamava um tal contexto de *matemática finitária"* e afirmava que tal demonstração finitária da consistência da aritmética cumpriria papel fundacional de caráter matemático e epistemológico, visto que ofereceria a essas teorias um *fundamento finitário*. Essa fundamentação teria evidentemente função epistemológica, uma vez que limitaria à esfera finitária das possibilidades humanas a constatação da realidade de conceitos infinitários (Da Silva, 2003).

O TIG atinge como um golpe a aspiração de Hilbert "ao mostrar que demonstrações de consistência de teorias formais interessantes da matemática exigiriam recursos não finitários". (DA SILVA, 2003, p. 34-35). Assim, mostrou que a incompletude da matemática formal é irredutível e, desse modo, a impossibilidade de se formalizar *completamente* toda a Matemática, ou pelo menos as partes mais interessantes dela.

3 Compreendendo o Impacto do TIG na Matemática

Embora o TIG tenha evidenciado a impossibilidade de demonstração da consistência da aritmética na própria axiomática da aritmética, e isso tenha implicado a derrocada do programa idealizado por Hilbert e em execução por outros matemáticos, também, naquele momento histórico, Gödel se via como um dos matemáticos da nova geração intencionado a resolver os problemas propostos por Hilbert (2000), conforme salienta Guerrerio (2012).[19]

Algumas interpretações do papel de Gödel ao demonstrar este resultado que colocou fim aos planos dos formalistas de fundamentar a Matemática, apoiando-se na aritmética, o apresentam como um iconoclasta. O próprio Gödel expõe que seu empenho incidia sobre provar a consistência da análise matemática[20], pois ele precisava provar alguma coisa maior para obter o posto de *Privatdozent*[21] e ter acesso à carreira universitária na Universidade de Viena. Para isso, tomou o caminho de provar que a análise seria consistente se, e somente se, a aritmética o fosse, ao invés de atacar diretamente o problema da não contradição da análise, segundo Wang (1981).

A nosso ver, conforme em Batistela (2017), a atuação de Gödel pode ser compreendida como sendo próxima da de uma pessoa que prudentemente não acredita na opinião da maioria, aqui entendida como sendo a pertencente à escola de Hilbert, cujo trabalho era dedicado a formalizar, sem contradições, toda a Matemática, buscando, silenciosamente, provas contrárias a essa meta. Longe da ideia de Gödel como um iconoclasta, que, supostamente, nesse caso, trata-se daquele que quebra a "imagem" da Matemática, ou que não respeita as tradições e as concepções estabelecidas, ou, ainda, que se oponha a ver a Matemática com admiração, a interpretação do próprio Gödel sobre o TIG é que a Matemática é inesgotável, sendo de se esperar que ela não se deixasse circunscrever em um sistema

19 Gianbruno Guerrerio é autor dos textos sobre Gödel na edição da revista *Gênios da Ciência – Matemática*, a qual traz considerações sobre Poincaré, Gödel e Bourbaki. Ele é jornalista científico e autor da monografia *Kurt Gödel, paradossi logici e veritá matematica*, publicada na coleção *I grandi della scienza*, suplemento especial da revista *Le Scienze*.

20 Da Costa (1977) explicita que a análise matemática clássica é composta por vários ramos, pela aritmética, álgebra, cálculo diferencial e integral, teoria das funções etc. e fundamenta-se no conceito de número natural e dos conceitos e princípios lógicos. Por outro lado, Morais Filho (2010) afirma que o primeiro contato e a primeira noção do infinito vêm do conjunto dos números naturais. Entendemos a importância da prova da consistência da aritmética é tamanha pois essa prova é a demonstração da existência do objeto, uma vez que para os formalistas *existir* era sinônimo de *não contraditório*.

21 *Privatdozent* é um título universitário próprio das universidades de língua alemã na Europa. Um professor *Privatdozent* recebe uma habilitação para poder lecionar, mas não recebe a cátedra de ensino ou de pesquisa. Assim seu pagamento não é por parte do governo e sim pelos alunos que se matriculam e cursam a disciplina que ele oferece. Este título é uma passagem obrigatória antes de obter a cátedra.

único e total.

É importante considerar que o próprio Gödel anunciou que seria possível que houvesse procedimentos finitários que não fossem formalizáveis na aritmética formal. Dois anos após o resultado que golpeou o programa de Hilbert, em 1933, num artigo de uma página intitulado *Zur intuitionistischen* Arithmetik und Zahlentheorie,[23] Gödel definiu um mapeamento da aritmética clássica formalizada em primeira ordem na aritmética intuicionista, de tal modo que a cada teorema da aritmética clássica correspondesse, como teorema da aritmética intuicionista, a sua tradução, como nos conta Da Silva (2003). Como consequência, ele conclui que se a aritmética intuicionista fosse consistente, então, a aritmética clássica também o seria, pois se uma contradição fosse derivável na aritmética clássica, sua tradução, que também seria uma contradição, seria derivável na aritmética intuicionista, o que é contra a hipótese. Mas, no intuicionismo acreditava-se ter o direito de não duvidar da consistência da aritmética intuicionista... então, não se teria mais o direito de duvidar da aritmética clássica.

O formalismo e o intuicionismo, de Hilbert e de Brouwer, respectivamente, divergiam principalmente na concepção de existência em Matemática. Para Hilbert, existir é estar livre de contradição, porém para Brouwer existir é ser matematicamente verdadeiro, e "Brouwer acreditava que nenhuma demonstração da matemática clássica a fará verdadeira, pois a consistência mostra a possibilidade e não a realidade" (Da Silva, 2003, p. 36).

Gödel (1933) ressalta os caminhos para o programa de Hilbert após o surgimento do TIG. Daí que o golpe que este teorema representou ao programa de Hilbert pode ser considerado não fatal. E essa foi também a compreensão de Gödel sobre seu resultado. Na apreciação de Da Silva (2003, p.35):

> Seja como for, o programa de Hilbert certamente foi substancialmente enfraquecido pelos notáveis resultados de Gödel. Entretanto, não morreu, e o próprio Gödel contribuiu para uma versão modificada dele, a saber, estabelecer por meios construtivos apropriados (finitários, predicativos, intuicionistas, etc.) a consistência relativa de teorias formais nas quais partes da matemática clássica possam ser desenvolvidas.

Com isso, Gödel mostrou que os métodos finitários de Hilbert não são a única alternativa aos modos clássicos de raciocínio. Ele sugeriu que requerêssemos apenas que os argumentos metamatemáticos fossem de caráter construtivo, permitindo tratar com formas mais gerais de inferência.

A respeito do impacto do TIG na Matemática, Feferman, Dawson, Goldfarb, Parsons, Sieg, & Wilfried (1995) e Feferman (2006) apresentam uma afirmação de 1951 do próprio Gödel, sobre a impossibilidade da formalização de toda Matemática não oferece resistência ao trabalho do matemático em suas explorações. Eis:

> O fenômeno da inesgotabilidade da matemática decorre do fato de que a própria formulação dos axiomas [da teoria dos conjuntos sobre os números naturais] até um certo estágio dá origem à seguinte axioma. É verdade que na matemática de hoje os níveis mais altos dessa hierarquia são praticamente nunca utilizados. É seguro dizer que 99,9% da matemática atual está contida nos três primeiros níveis dessa hierarquia. (Feferman, 2006, p. 439, tradução nossa).[24]

Finalmente, o surgimento do TIG na Matemática clareia a compreensão da ciência Matemática no que se refere aos seus alcances e possibilita a noção da impossibilidade de essa ciência autofundar-se. No entanto, ao mesmo tempo em que aos poucos os matemáticos foram compreendendo o indecidível, uma atitude pragmática foi planejada: se o indecidível aparecesse o caminho deveria ser isolá-lo, buscando por sua origem e não permitindo que ele continuasse na teoria. O TIG implica não o fim do projeto hilbertiano, mas as limitações internas a que estão sujeitos os sistemas formais da Matemática. Ou seja, mostra que o sistema pode operar, porém com limitações internas, o que leva ao entendimento de que não são, simultaneamente, completos e consistentes.

Referências

Batistela, R. F. (2017). *O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática*. (Tese de Doutorado em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista).

Chaitin, G. J. (2001). *Exploring randomness: Discrete Mathematics and theoretical Computer Science.* London: Springer.

Changeux, J. P., & Connes, A. (1996). *Matéria pensante*. Lisboa: Gradiva.

Da Costa, N. C. A. (1977). *Introdução aos fundamentos da Matemática*. São Paulo: Hucitec.

Da Silva, J. J. (2003). O segundo problema de Hilbert. *Rev Bras Hist Matem, 3(5), p.29-37.*

Da Silva, J. J. (2007). *Filosofias da Matemática*. São Paulo: UNESP, 2007.

Enciclopédia Britânica. (1995). São Paulo: *Encyclopaedia Britannica do Brasil*.

Feferman, S. (2006). The impact of the incompleteness theorems on mathematics. *Not Am Mathem Soc, 53(4), p. 434-439, 2006.*

Feferman, S. Dawson, J. W., Goldfarb, W., Parsons, C., & Sieg, W. (1995). *Kurt Gödel: Collected Works*. Oxford: Oxford University.

Guerrerio, G. (2012). Gödel, um tímido iconoclasta. In Scientific American Brasil. *A vanguarda da matemática: e os limites da razão,* (pp.39-67). São Paulo: Duetto.

Hilbert, D. (2000). Mathematical problems. *Bull Am Mathem*

23 The Phenomenon of the inexhaustibility of mathematics follows from the fact that the very formulation of the axioms [of set theory over the natural numbers] up to a certain stage gives rise to the next axiom. It is true that in the mathematics of today the higher levels of this hierarchy are practically never used. It is safe to say that 99.9% of present-day mathematics is contained in the first three levels of this hierarchy. (Feferman, 2006, p. 439).

22 Tradução nossa: Para aritmética intuicionista e teoria dos números.

Soc, 37(4), p. 407-436.

Leary, C. C. (2000). *A friendly introduction to mathematical logic*. New Jersey: Prentice-Hall.

Machado, N. J. (1991). *Matemática e realidade*. São Paulo: Cortez.

Mondini, F. O logicismo, o formalismo e o intuicionismo e seus diferentes modos de pensar a matemática. In EBRAPEM, 12. 2008, Rio Claro. *Anais*...Rio Claro: PPGEM, 2008, p. 1-10.

Morais Filho, D. C. (2010). *Um convite à matemática: fundamentos lógicos, com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades*. Campina Grande: EDUFCG0.

Nagel, E., Newman, J. R. (1973). *Prova de Gödel*. São Paulo: Perspectiva.

Snapper, E. (1984). As três crises da matemática: o logicismo, o intuicionismo e o formalismo. *Humanidades*, 2(8), p. 85-93.

Wang, H. (1981). Some facts about Kurt Gödel. *J Symbolic Logic*, 46(3), p. 653-659.

Whitehead, A.N., & Russell, B. (1913). *Principia Mathematica*. v. 3. Cambridge: Cambridge: University Press.

Whitehead, A. N., & Russell, B. (1910). *Principia Mathematica*. v. 1. Cambridge: Cambridge: University Press.

Whitehead, A. N., & Russell, B. (1912). *Principia Mathematica*. v. 2. Cambridge: Cambridge: University Press.