DOI: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n2p160-171

O Fractal Árvore Pitagórica e Diferentes Representações: uma Investigação com Alunos do Ensino Médio

The Fractal Pitagórica Tree and Different Representations: an Investigation With Higt School Students

Veridiana Rezende[a]*; Mariana Moran[b]; Thais Michele Mártires[b]; Fabricia Carvalho Paixão[c]

[a]Universidade Estadual do Paraná. PR, Brasil.
[b]Universidade Estadual de Maringá. PR, Brasil.
[c]Universidade Estadual do Oeste do Paraná. PR, Brasil.
*E-mail: rezendeveridiana@gmail.com
Submetido em: mar. 2018; Aceito em: maio 2018

Resumo

A Geometria dos Fractais em sala de aula propicia diversas possibilidades de estudos de conceitos matemáticos, incentiva o uso de recursos tecnológicos, proporciona surpresas pela beleza e complexidade dos fractais. Apresentamos neste texto uma investigação acerca das possibilidades do uso de diferentes registros de representação semiótica aliado à Geometria dos Fractais, no que concerne ao ensino de matemática. E, para exemplificar estas possibilidades em sala de aula, relatamos uma situação de ensino, que foi implementada com quinze (15) alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do interior do Paraná, relacionada à construção do fractal Árvore Pitagórica. Como procedimentos metodológicos elaboramos cinco tarefas associadas ao fractal Árvore Pitagórica que tiveram por finalidade explorar diversos conceitos matemáticos emergidos no processo de construção deste fractal, nas quais foram contempladas as representações figural, numérica, algébrica e linguagem natural. As análises dos registros mostram que a implementação das tarefas possibilitou aos alunos: o estudo de diversos elementos matemáticos tais como: áreas e perímetros de quadrados e triângulos, teorema de Pitágoras, ângulos, congruência de triângulos, frações, potências, números decimais entre outros; as construções figurais da Árvore Pitagórica por meio de diferentes representações e a visualização das principais características de um fractal, bem como a compreensão de seu processo de construção.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Representação Semiótica. Geometria dos Fractais.

Abstract

The geometry of the fractures in the classroom provides several possibilities for studying mathematical concepts, encourages the use of technological resources, provides surprises for the beauty and complexity of the fractals. We present in this text an investigation about the possibilities of the use of different registers of semiotic representation allied to the Geometry of the Fractais, in what concerns the teaching of mathematics. And, to exemplify these possibilities in the classroom, we report a teaching situation, which was implemented with fifteen (15) students of the 3rd year of High School in a public school in the interior of Paraná, related to the construction of the Pythagorean Tree fractal. As methodological procedures we elaborated five tasks associated to the fractal Pythagorean Tree that had as purpose to explore several mathematical concepts emerged in the process of construction of this fractal, in which figural, numerical, algebraic and natural language representations were contemplated. The analysis of the registers shows that the implementation of the tasks enabled the students to study several mathematical elements such as: areas and perimeters of squares and triangles, Pythagorean theorem, angles, congruence of triangles, fractions, powers, decimals, among others; the figurative constructions of the Pythagorean Tree by means of different representations and the visualization of the main characteristics of a fractal, as well as the understanding of its process of construction.

Keywords: *Mathematics Teaching. Semiotic Representation. Geometry of Fractions.*

1 Introdução

O ensino das Geometrias propicia ao professor e ao estudante diferentes formas de pensar, compreender, descrever e interagir com o espaço no qual vivemos. É nesse sentido que Lorenzato (1995) expõe que não basta conhecer bem a Aritmética ou a Álgebra para conseguirmos resolver problemas de geometria euclidiana, é preciso desenvolver diferentes maneiras de raciocinar, explorar e descobrir.

No ano de 2008, o tópico noções básicas de geometrias não-euclidianas foi incluído nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica de Matemática do Estado do Paraná (DCE), como parte do conteúdo estruturante Geometrias (Paraná, 2008). No entanto, com base nas pesquisas de Lovis (2009), Caldatto (2011), Santos (2008), bem como de outros pesquisadores, vê-se que muitos professores desconhecem ou conhecem pouco das geometrias não-euclidianas, sentindo-se despreparados para ensinar tal assunto em sala de aula. Lovis (2009) observou em sua pesquisa que, quando questionados em relação a esses conteúdos, os professores confundem certos conceitos básicos buscando na geometria euclidiana uma explicação para as geometrias não-euclidianas. Para Kaleff (2004), a presença de termos homônimos aos do conhecimento euclidiano pode afetar o entendimento de novos significados geométricos quando se refere às geometrias não-euclidianas.

Este fato nos levou a investigar um processo didático que possa auxiliar na compreensão e na construção de conceitos relacionados às geometrias não-euclidianas. Damm (2003) afirma que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval pode ser pensada como uma maneira didática/ metodológica que o professor e/ou pesquisador podem utilizar, quando o objetivo é a aquisição do conhecimento; fato que também é mencionado por Duval (2011, 2013).

No texto das DCE é indicado que no Ensino Fundamental o aluno deve compreender: Geometria Projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte), Geometria Topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noção de Geometria dos Fractais (Paraná, 2008).

No Ensino Médio, deve-se aprofundar o estudo das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a Geometria dos Fractais; a geometria hiperbólica; e a geometria elíptica. Com relação à Geometria dos Fractal, as DCE recomendam explorar o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski (PARANÁ, 2008). De acordo com esse documento, o aluno deve ir além de observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, e refletir sobre eles.

Para Santaló (2006, p.22), nas últimas décadas, a Geometria Fractal tem

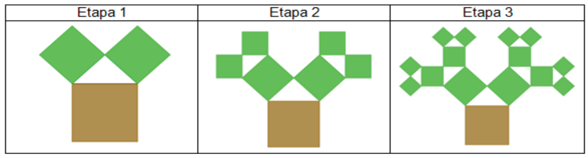
> despertado muito interesse pelo seu amplo espectro de aplicações, desde as artes plásticas até a física, a biologia e a astronomia, e que tem muitos vínculos com a computação e, também, com as teorias 'caóticas' que estão se desenvolvendo conjuntamente a partir da física e da filosofia.

A Geometria Fractal foi iniciada por Benoit Mandelbrot e se refere ao estudo de formas geométricas que, de acordo com Barbosa (2005), possuem propriedades principais de autossimilaridade, complexidade infinita e dimensão não inteira.

Barbosa (2005) explica que um fractal tem suas partes semelhantes ao seu todo sob alguns aspectos, consistindo em uma forma de autossimilaridade do conjunto total mesmo que aproximada ou estatística. Nascimento, Silva, & Maciel (2012) destacam que a autossemelhança exata é uma característica dos fractais construídos a partir de figuras geométricas como: curva de Koch, triângulo de Sierpinski, Árvore Pitagórica, entre outros.

A complexidade infinita dos fractais é expressa por meio de um procedimento recursivo ou iterativo (Barbosa, 2005), que não permite representar completamente um fractal haja vista que sempre haverá uma próxima iteração a ser realizada. A Figura 1 apresenta três etapas (ou iterações) do fractal Árvore Pitagórica, a partir da qual é possível observar que a cada iteração a quantidade de quadrados crescem exponencialmente, numa potência de base 2. Quanto mais iterações, maior o número de quadrados que surgem a cada etapa.

Figura 1 - Árvore Pitagórica em etapas.



Fonte: Os autores.

Com relação à estética, Mandelbrot (1983) afirma que os melhores fractais são aqueles que exibem o máximo de invariância, ou seja, nunca podem ter suas partes sobrepostas umas às outras, no entanto podem ser "sobreponíveis" num sentido estatístico e autossemelhantes considerando-se o fator de escala.

Barbosa (2005) defende que aprender Geometria Fractal é importante para a sala de aula, e explica que esta geometria faz conexões com outras ciências; que a Geometria Euclidiana traz deficiências para o estudo das formas da natureza; permite difusão e acesso aos computadores e tecnologias; desperta a existência do senso estético e permite uma sensação de surpresa diante da ordem encontrada na desordem. Logo, percebe-se que com a Geometria Fractal podemos desenvolver atividades por meio de recursos digitais, ou com materiais de construção manipuláveis, e também utilizando lápis, régua e compasso.

Deste modo, o trabalho com a Geometria Fractal na sala de aula pode proporcionar diversas competências e habilidades que permitem o aprendizado de conteúdos matemáticos de modo atrativo, sob diversas perspectivas metodologicamente inovadoras.

Sendo assim, objetivamos com este artigo apresentar uma investigação acerca das possibilidades do uso de diferentes registros de representação semiótica aliados à Geometria dos Fractais, no que concerne ao ensino de matemática. E, para exemplificar estas possibilidades em sala de aula, relatamos uma situação de ensino, que foi implementada em sala de aula, com alunos do 3º ano do Ensino Médio, relacionada à construção do fractal Árvore Pitagórica.

2 Os Registros de Representação Semiótica e Possibilidades de Articulação com a Geometria dos Fractais

Quando nos referimos à Matemática trabalhamos com entes que podem ser reconhecidos somente por meio de suas representações. Alguns objetos geométricos, por exemplo, quando baseados em sua definição por extenso, são impossíveis de visualizar sem o apoio de uma figura ou imagem. Neste caso, de acordo com as ideias de Duval (2012a), as representações semióticas auxiliam não somente como um suporte para as representações mentais - já que estas são limitadas - mas os registros externos formariam um meio de proporcionar a construção da aprendizagem.

Duval (2003) explica que as representações são fundamentais, porém é preciso ter atenção para que os sujeitos, especialmente em fase de aprendizagem, não confundam os objetos matemáticos com suas representações. Essa distinção é essencial para a conceitualização do objeto matemático. Tal comentário é resultante do paradoxo da compreensão em matemática escrito por Duval (2003, p.21): “Como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?” Daí a importância de se trabalhar com representações variadas e, além disso, com representações que não limitem a capacidade de compreensão e aprendizagem, já que esses objetos não possuem existência física.

A representação semiótica contribui para o desenvolvimento geral das capacidades de raciocínio, de análise e de visualização (Duval, 2003). Segundo Duval (2012ª, p.282), para que ocorra a aprendizagem de um conceito é necessário coordenar representações pertencentes ao menos a dois registros, referentes a um mesmo objeto matemático. “[...] Esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão”.

Para que uma representação seja considerada como uma representação semiótica, esta deve possibilitar, basicamente, três atividades cognitivas (Duval, 2009, 2012a):

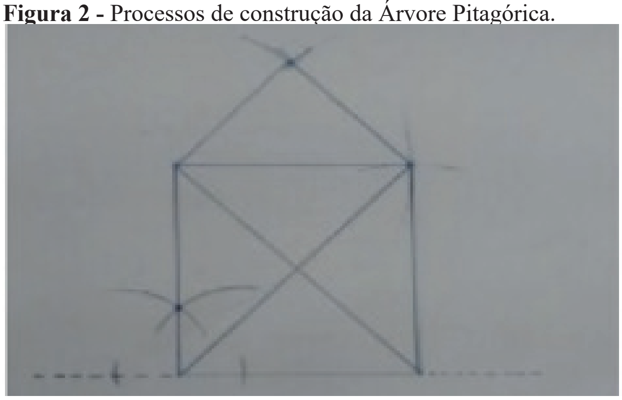
a formação de uma representação identificável no domínio de um registro, ou seja, permitir o reconhecimento do objeto representado, possuir regras de utilização com possibilidades para tratamentos;

o tratamento, isto é, a transformação desta representação internamente ao registro onde ela foi formada.

Para cada registro, existem regras de tratamento para se expandir uma representação. Essas regras, “uma vez aplicadas, resultam em uma representação de mesmo registro que a de partida” (Duval, 2009, p. 57).

Como exemplo de tratamento, apresentamos um tratamento figural realizado durante a aplicação da tarefa 1 proposta neste trabalho.

Figura 2 - Processos de construção da Árvore Pitagórica.



Fonte: Os autores.

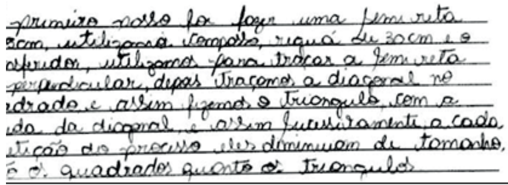
Neste exemplo, notamos que o quadrado inicial foi modificado no momento em que suas diagonais ficaram evidentes para que uma reflexão de um dos triângulos isósceles formados fosse feita para dar continuidade à construção da árvore pitagórica. Essa transformação de uma das subfiguras do quadrado inicial é de origem posicional, e é considerada um tratamento figural realizado.

a conversão é um outro tipo de transformação que Duval considera fundamental para a aprendizagem em matemática.

Ela é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento (DUVAL, 2012b) que implica na transformação de uma representação em outro registro, de modo que as propriedades e características do objeto sejam conservadas, no entanto reescritas em outro sistema semiótico.

Como exemplo de conversão encontrada na aplicação da tarefa 2 desta investigação, temos a mobilização do registro figural (a árvore pitagórica construída) para o registro da linguagem natural, conforme a figura 3 a seguir:

Figura 3 - Representação em linguagem natural do aluno A8.


primeiro passo foi fazer uma semi reta
com, utilizando compasso, riguá de 30cm e o
esquadro, utilizamos para traçar a semi reta
perpendicular, depois traçamos a diagonal no
quadrado e assim fizemos o triangulo com a
ajuda da diagonal e assim sucessivamente a cada
repetição do processo eles diminuem de tamanho,
tanto os quadrados quanto os triangulos

Fonte: Os autores.

Houve uma identificação explícita em linguagem natural das unidades figurais que formavam a figura, bem como uma descrição das propriedades que foram satisfeitas para legitimar as figuras geométricas que foram construídas. Tal fato, vem ao encontro das ideias de Duval (2011), quando ele afirma que os registros são sistemas semióticos criadores de novos conhecimentos que satisfazem, basicamente, duas condições:

1 - Produzem representações que permitem acesso e exploração a objetos inacessíveis perceptivelmente ou instrumentalmente.

2 - Permitem transformações em novas representações.

Deste modo, assim como Dann (2009) e Duval (2011, 2013), entendemos que como uma opção metodológica para a compreensão de conceitos, o professor pode utilizar em sala de aula diferentes representações para um mesmo objeto matemático.

Tratando-se da Geometria, “os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver” (Duval, 2012a). Duval (2012a) explica que os diferentes tipos de operações visuais dão às figuras potencialidades heurísticas. Deste modo, utilizar diferentes representações e realizar transformações entre elas pode proporcionar o entendimento efetivo do que se pretende ensinar.

Tanto a geometria euclidiana quanto às geometrias não-euclidianas constituem-se de conjuntos de regras passíveis de representações materiais na forma de objetos manipuláveis e construtivos, de representações numéricas por meio de dados extraídos das ações sobre os objetos e também de representações algébricas obtidas a partir de padrões observados repetidas vezes.

Dessa forma, Duval (2011), com enfoque teórico e metodológico, classifica os registros semióticos baseado em duas características fundamentais: os registros discursivos e os não discursivos. Os registros discursivos são aqueles que possibilitam transformações específicas dependendo de cada caso e situação desde que certas condições sejam satisfeitas. E os não discursivos são aqueles registros que permitem a identificação necessária por meio de uma apreensão simultânea do objeto. Duval (2011) também classifica os registros em multifuncionais e monofuncionais, como os que são utilizados fora da matemática e os que são próprios da matemática, respectivamente. O autor sintetizou essas informações no Quadro 1.

Quadro 1 - Classificação dos tipos de registros semióticos

Registros	**Discursivos** (Linearidade fundamentada na sucessão para a produção, apreensão e organização de expressões)	**Não Discursivos** (Apreensão simultânea de uma organização bidimensional)
Multifuncionais (Os tratamentos não são algoritmizáveis)	<u>As línguas</u>: três operações hierarquicamente incluídas (designação de objetos, enunciação e raciocínio). Duas modalidades de produção: oral/ escrita.	<u>Icônica</u>: produção à mão livre, conservação interna das relações topológicas, características das partes do objeto. Configuração geométrica: três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológicas, desconstrução dimensional das formas).
	<u>Representações</u> Auxiliares transitórias para as operações livres ou externas.	
Monofuncionais (As transformações de expressões são algoritmizáveis)	<u>As escritas simbólicas para as operações de substituições ilimitadas</u> (sistema de numeração, escrita algébrica, línguas formais). Uma modalidade de produção: escrita.	Junção entre os pontos ou nós e orientação marcada por flechas. Gráficos cartesianos: operação de zoom, interpolação, mudança de eixos. Esquemas.

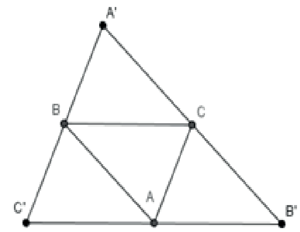
Fonte: Baseado em Duval (2011).

Independente dos registros serem discursivos ou não discursivos, a conversão de um registro a outro é uma operação cognitivamente não reversível (Duval, 2011). Ou seja, "A conversão direta e a conversão inversa são duas tarefas cognitivas tão diferentes quanto subir ou descer um caminho íngreme na montanha" (Duval, 2011, p.118). A conversão nos dois sentidos promove uma coordenação entre registros, cumprindo funções cognitivas de conhecimento.

Segundo Duval (2011) a conversão deve ser quase automática, e é essencial para o encaminhamento matemático, porém fatores como a variação de congruência ou não congruência entre os registros influenciam nessa mobilização. Por exemplo, o problema a seguir proposto por Duval (1999, p.154-155) a alunos que finalizavam o *troisième*[1]:

<u>1º caso</u>: A'C' e AC são paralelas, A'B' e AB são paralelas, B'C' e BC são paralelas. Provar que A é o ponto médio de B'C'.

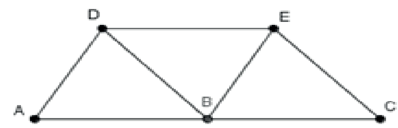
Figura 4 - 1º caso.



Fonte: Baseadas em Duval (1999).

<u>2º caso</u>: ABED e BCED são paralelogramos. Provar que B está na metade de AC.

Figura 5 - 2º caso.



Fonte: Baseadas em Duval (1999).

É possível fazer uma análise da congruência entre enunciado do problema e figura apresentados nos casos 1 e 2. Segundo Duval (1999), por fazer referência ao paralelogramo, do ponto de vista cognitivo, o segundo caso representa um problema mais simples do que o primeiro: "Isto quer dizer duas coisas: primeira, existe congruência entre as unidades figurais diretamente visíveis e aquelas que "inicializam" os tratamentos que permitem a resolução e, segundo, existe congruência entre as representações dos dois registros'.

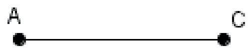
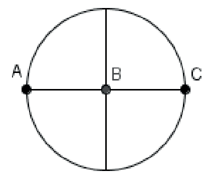
No primeiro caso, vê-se, espontaneamente, um triângulo pequeno, inscrito em um triângulo grande, já que o enunciado não se refere, em momento algum, a paralelogramos. Nesse caso, certas unidades figurais foram privilegiadas por conta da organização perceptiva do sujeito, já que não há congruência entre a figura e o enunciado.

Duval (2011) observa que os professores, em geral, têm a tendência de escolher os problemas em que as conversões a realizar são congruentes, deixando os casos de não congruência para trabalhar em forma de investigação, com alunos mais avançados. Segundo Duval (2011), as dificuldades das conversões se devem a dois motivos discriminados: o primeiro é o fato de que as conversões podem estar implícitas ou explícitas para a resolução de um problema, conforme o Quadro 2; o segundo se deve à distância cognitiva entre as representações de um mesmo objeto em dois registros diferentes. Em geral,

1 Nível escolar do sistema de ensino francês equivalente ao 9º ano do Ensino Fundamental.

Duval (2011) afirma que a distância cognitiva entre os registros discursivos e os registros não discursivos é sempre maior do que parece e, além disso, existe uma assimetria entre os dois sentidos de conversão, conforme o exemplo a seguir:

Quadro 2 - Assimetria dos sentidos das conversões quando a linguagem é um dos registros mobilizados.

Linguagem = Figura	Figura = Linguagem
1) Traçar um segmento de reta AC 	 1) B é o ponto médio de AC 2) Traçar um círculo de centro B, passando por A e C.

Fonte: Baseadas em Duval (2011).

É possível notar que, na primeira parte do quadro, há uma designação verbal (segmento) para uma unidade figural, enquanto na segunda há uma unidade figural para duas designações verbais (ponto médio e centro). Com esse fato, vê-se a assimetria de conversão entre linguagem → figura e figura → linguagem. Logo, as conversões de representações são operações cognitivas não reversíveis. Tal fato contribui ainda mais para a compreensão do objeto matemático por meio da diversidade de registros.

No entanto, de acordo com Kaleff (2004), os professores do Ensino Fundamental e Médio apresentam uma variedade de dificuldades relativas ao uso de diferentes representações em registros semióticos referentes ao estudo das Geometrias.

Desta forma, este texto apresenta a utilização e a mobilização entre representações pertencentes a dois registros de representação semiótica para o trabalho com a Árvore Pitagórica: o figural e o simbólico. Além disso, a representação em linguagem natural também foi explorada em uma das tarefas propostas aos sujeitos da pesquisa.

Segundo Duval (2011), os registros figurais são sistemas semióticos que permitem abstrações cognitivas utilizáveis em resolução de problemas ou em reconhecimentos de propriedades geométricas representadas. Para este trabalho, utilizamos o *software* GeoGebra para representar a Árvore Pitagórica e seus elementos geométricos já que este permite uma mobilidade de operações com as figuras, como, por exemplo, o arrastar de um vértice, a construção de polígonos, a criação de ferramentas de comando, entre outras interações.

Duval (2011) defende que três características concedem um poder cognitivo específico às figuras: o seu valor intuitivo, o reconhecimento quase que imediato dos objetos representados e a possibilidade de construção com régua, compasso ou com *software*.

Na implementação relatada na sequência deste texto, utilizamos o *software* GeoGebra, os instrumentos régua e compasso e material manipulável (recortes de papel representando etapas da Árvore Pitagórica) para representar registros figurais. Em relação aos *softwares* e uso de computadores, Duval (2011) esclarece que eles não constituem um novo registro de representação, afinal as representações exibidas pelos computadores são as mesmas que aquelas produzidas graficamente no papel para uma apreensão visual. No entanto,

> eles constituem um modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos. Eles exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação com as possibilidades da modalidade gráfico-visual. Obtemos, imediatamente, muito mais que tudo o que poderíamos obter à mão livre após, talvez, vários dias de escritas e cálculos ou constrição de figuras (Duval, 2001, p.137).

Por este motivo, relacionado ao dinamismo que o *software* GeoGebra pode proporcionar em relação à representação figural, optamos por contempla-lo na proposta de nosso trabalho. Além disso, por considerarmos que a construção com lápis, papel, régua e compasso e materiais manipuláveis também proporcionam reflexões diferentes em relação ao GeoGebra no que diz respeito aos processos de construção de figuras geométricas, também optamos por iniciar a construção do fractal Árvore Pitagórica por meio da construção com estes instrumentos de desenho geométrico.

Como representação numérica consideramos a escrita numérica (registro simbólico), seja na forma fracionária ou decimal, dos dados obtidos por meio do fractal construído.

Já a representação algébrica, também pertencente ao registro simbólico, foi utilizada para representar a generalização dos cálculos numéricos. A representação algébrica permite chegarmos às conclusões generalizadas para casos não observáveis visual e numericamente. O quadro a seguir, traz um resumo dos registros, representações e o modo como estes foram abordados neste trabalho.

Quadro 3 - Registros de Representação Semiótica contemplados neste trabalho.

	Registros de Representação Semiótica			
	Figural	Simbólico		Linguagem Natural
		Numérico	Algébrico	
Modo de abordagem neste trabalho	Imagem da construção da Árvore Pitagórica por meio de: i) Software (GeoGebra); ii) Instrumentos de Desenho Geométrico; iii) Material Manipulável.	Cálculos numéricos relacionados a área e perímetro de figuras geométricas (formas fracionária e decimal).	Fórmulas de área e perímetro de figuras planas e generalizações de cálculos numéricos.	Descrição dos passos de construção da Árvore Pitagórica (construída pelos alunos por meio de instrumentos de Desenho Geométrico).

Fonte: Os autores.

Em se tratando de registros de representação semiótica, Duval (2003) acredita que os fracassos ou bloqueios dos alunos, independentemente do nível de ensino, tem uma estreita relação com os monorregistros[2]. Segundo o pesquisador, "[...] existe um "enclausuramento" de registro que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes" (Duval, 2003, p.21). Para o pesquisador, este fato também impede o aluno de utilizar seus conhecimentos prévios e consequentemente de adquirir novos conhecimentos.

Ao fazer referência a objetos geométricos é possível considerá-los em diversas representações ou sistemas semióticos (Duval, 2003, p.21). A necessidade de trabalhar a transformação de registros semióticos para o conteúdo de Geometria nasce do fato da não existência física de seus objetos e principalmente da dificuldade de compreensão deste conteúdo estruturante. Bonete (2000) e Cabariti (2004) afirmam que o ensino de Geometria muitas vezes não é apresentado nem nos cursos de formação de professores de Matemática, dificultando ainda mais seu ensino nas escolas.

A importância do uso da variação de representações no ensino da Geometria é justificada, também, pelo uso da conjectura de que quando há uma mudança de representações durante o aprendizado, no caso da Geometria, o aluno não mais confunde a representação ao objeto propriamente dito (Duval, 2011). Talvez isso se deva ao fato de o aluno estar apreendendo o conceito do objeto também por meio de suas várias representações, e, deste modo, ele não fica atrelado a uma única representação ou ideia.

Enfim, com este trabalho propomos o estudo da Geometria dos Fractais não somente explorando seu aspecto estético e visual mas, principalmente, matemático, proporcionando aos alunos o aprimoramento de seus conhecimentos já adquiridos em outros momentos da escolarização, bem como a ampliação de seus saberes em relação às diferentes representações dos conceitos e processos de construção relacionados ao Fractal em questão.

Para exemplificar como os registros de representação semiótica podem colaborar metodologicamente com os professores de Matemática no sentido de selecionarem para as suas aulas tarefas matemáticas que explorem as diferentes representações de um conceito matemático, apresentamos a seguir a descrição e análise de uma implementação de tarefas matemáticas, elaboradas pelas autoras deste trabalho.

3 Procedimentos e Análises da Implementação de Tarefas sobre a Árvore Pitagórica

Como procedimentos metodológicos adotados para a elaboração das tarefas sobre a árvore pitagórica, nos baseamos em Duval (2011, 2013) e Dann (2003), que entendem que teoria dos registros de representação semiótica pode respaldar metodologicamente as aulas dos professores. Neste sentido, as tarefas matemáticas utilizadas na implementação descrita a seguir foram elaboradas buscando articular diferentes registros de representação semiótica, a saber: registro figural, linguagem natural e simbólica.

Para a implementação das tarefas em sala de aula, nos respaldamos na perspectiva de Guy Brousseau, que entende que o aluno aprende adaptando-se a um meio (sala de aula), que é um fator de contradições, dificuldades, desequilíbrios.

Segundo Brousseau (1996), as tarefas propostas aos alunos devem provocar as adaptações desejadas, e os alunos precisam aceita-las, de modo que os levem a agir, falar, refletir e evoluir por si próprio. Além disso, para Brousseau (1996), no momento em que o aluno está envolvido com a tarefa, na busca pela solução, o professor não deve intervir propondo conhecimentos ou direcionamentos para a resolução da tarefa. É preciso deixar o aluno, de preferência trocando informações com os colegas, refletir em busca do caminho para a solução desejada.

Sendo assim, seguindo os pressupostos e dialéticas de Brousseau (1996), para a implementação das tarefas em sala de aula, os alunos foram organizados em grupos de dois ou três alunos para que eles resolvessem cada uma das tarefas, refletissem e criassem as suas próprias estratégias de resolução (situação de ação). Na sequência, os alunos puderam trocar informações com os colegas, explicitaram suas estratégias em linguagem natural (oral e/ou escrita) (situação de formulação); testaram seus modelos de resoluções, debateram e buscaram validar suas resoluções com os colegas (situação de validação).

Durante estas três fases de implementação, as pesquisadoras e professora regente foram mediadoras da situação em sala de aula, buscaram devolver as perguntas dos alunos com outros questionamentos, de modo a levá-los a refletir sobre suas estratégias e possíveis erros, não disponibilizando a resposta aos estudantes. Na sequência, as pesquisadoras e/ou professora regente assumiram a quarta fase proposta por Brousseau, a dialética de *institucionalização*: momento em que o professor deve explicitar o conteúdo abordado, resolvendo cada uma das tarefas na lousa considerando a participação dos alunos, formalizando o conteúdo.

A escolha pelo fractal Árvore Pitagórica ocorreu após várias pesquisas realizadas pelas autoras, a respeito do ensino dessa geometria. Na sequência desses estudos, buscamos por um fractal diferenciado em relação às diversas possibilidades para o ensino de matemática, e dentre os disponíveis na literatura em língua portuguesa. Dentre as possibilidades, o fractal que nos despertou a atenção foi a Árvore Pitagórica que, de acordo com Barbosa (2005), pode ser construída a partir de um triângulo retângulo cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (3, 4 e 5), de um triângulo isósceles, de um triângulo isósceles obtusângulo, ou ainda por um triângulo equilátero. Ressaltamos que Barbosa (2005) não apresenta os passos dessas construções, este autor

2 Monorregistros, para este pesquisador, é a não mobilização simultânea entre registros.

apenas mostra a imagem das árvores pitagóricas, seguidos de breves comentários.

Assim, partindo das imagens das árvores pitagóricas disponíveis em Barbosa (2005), e estudos matemáticos realizados sobre as potencialidades destas árvores, optamos por elaborar tarefas matemáticas referente a Árvore Pitagórica construída a partir de um triângulo retângulo isósceles. As tarefas elaboradas tiveram o propósito de explorar diversos conceitos matemáticos tais como área e perímetro de quadrados e triângulos, medida do lado dessas figuras planas, contagem das figuras que surgem em cada etapa de construção do fractal, potência, semelhança de triângulos, simetria, dentre os conteúdos que surgem direta ou indiretamente como soma, divisão e multiplicação de frações, números decimais etc.

Além disso, as tarefas foram elaboradas pensando nas diferentes representações e possibilidades de construção desse fractal: com régua e compasso, com o auxílio do *software* GeoGebra e com material manipulável.

Após elaboradas pelas pesquisadoras, as tarefas foram apresentadas a uma professora de um colégio público do interior do Paraná, que prontamente se disponibilizou em implementa-las juntamente com as autoras desse trabalho, em uma turma de 3º ano do Ensino Médio. A professora se envolveu com a implementação das tarefas e nos auxiliou a todo momento, inclusive indicando as melhores possibilidades de resolução e institucionalizando as tarefas junto aos alunos. Gatti, Barreto e André (2011) destacam que essa aproximação entre os programas de formação e as demandas da Educação Básica no âmbito das instituições públicas tem como objetivo assegurar uma educação de qualidade que considera as características dos alunos e as necessidades regionais e locais, oportunizando aprendizado para ambas os níveis.

As tarefas foram desenvolvidas com quinze alunos do 3º ano do Ensino Médio, durante sete aulas de matemática, no período vespertino, com a maioria dos alunos oriundos da zona rural, em uma escola pública do interior do Paraná. A implementação teve duração de sete aulas, sendo cinco aulas de quarenta minutos e duas aulas de cinquenta minutos. Na sequência, apresentaremos cada uma das tarefas, juntamente com a descrição e análises da implementação.

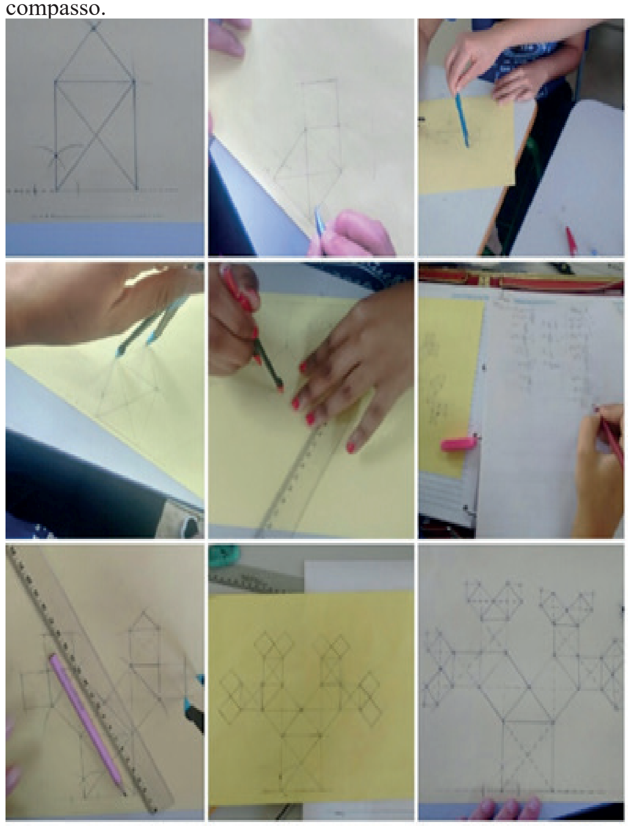
1ª Tarefa: Construção da Árvore Pitagórica com Régua e Compasso

A primeira tarefa proposta aos alunos refere-se a construção com o auxílio da régua e compasso de iterações da Árvore Pitagórica. Partindo de três etapas da árvore pitagórica no registro figural (Figura 1), as pesquisadoras construíram junto com os alunos o fractal em questão. Esta construção pertence ao registro multifuncional figural, e a transformação realizada diz respeito ao tratamento figural, uma vez que as etapas posteriores dependem de modificações figurais ocorridas nas etapas anteriores.

Entendemos que uma tarefa como esta, relacionada à representação figural do fractal, propicia aos alunos o manuseio com os instrumentos de desenho geométrico (régua e compasso), reflexões a respeito da construção e propriedades das figuras geométricas planas quadrado e triângulo retângulo.

Para a construção deste fractal, as autoras deste artigo e a professora regente auxiliaram os alunos com o manuseio dos instrumentos de desenho geométrico, que não tinham familiaridade com estes instrumentos. Todos os alunos realizaram esta construção, sendo que treze alunos construíram até a etapa 3, um aluno realizou até a etapa 4, e um aluno até a etapa 2. A Figura 6 apresenta algumas construções realizadas pelos alunos.

Figura 6 - Etapas da Árvore Pitagórica construída com régua e compasso.



Fonte: Os autores.

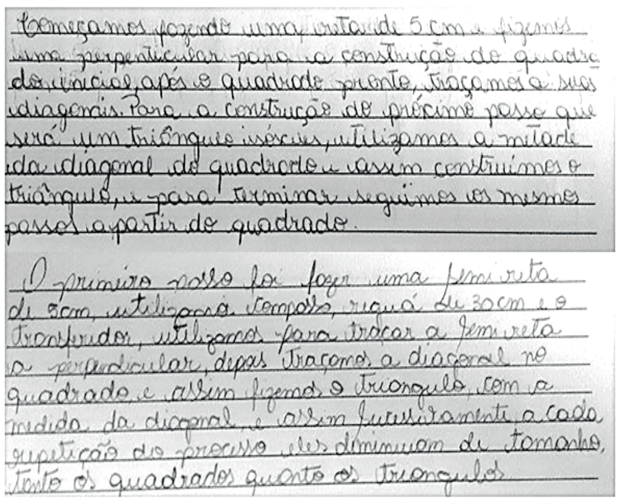
2ª Tarefa: Descrição dos passos de construção da Árvore Pitagórica

Após a construção com régua e compasso, a segunda tarefa solicitava aos alunos descreverem com suas palavras os passos seguidos por eles para a construção do fractal. Esta tarefa também foi pensada com a possibilidade de explorar a representação na linguagem natural (registro multifuncional) para o fractal em questão. Afinal, do ponto de vista de Duval (2012a), quando um problema exige o uso da língua natural na sua resolução, este proporciona uma forma de raciocínio no modo natural ainda que com a intenção de substituir ou associar uma linguagem formalizada já que solicita uma regra de organização do discurso.

Com esta tarefa tivemos a intenção de proporcionar aos alunos a conversão do registro figural (construção do fractal com régua e compasso) para a linguagem natural, ou seja, uma mobilização de um registro não-discursivo (figural) para um registro discursivo (linguagem natural). Entendemos que existe congruência entre as unidades figurais diretamente visíveis já que a descrição em linguagem natural requerida na tarefa remete às figuras e unidades figurais representadas durante a construção do fractal com régua e compasso.

Desse modo, entendemos que esta tarefa trata-se de um importante exercício de reflexão para os alunos, pois para escreverem os passos de construção, é preciso que os alunos retomem todo o procedimento de construção, pensem nos conceitos matemáticos e processos adotados e organizem suas ideias para transmitirem para o papel, em linguagem natural, os passos seguidos, conforme dois exemplos de respostas dos alunos apresentados na figura 7.

Figura 7 - Representação em linguagem natural do aluno A2 e A6


Começamos fazendo uma reta de 5 cm e fizemos
uma perpendicular para a construção do quadra
do inicial, após o quadrado pronto, traçamos as suas
diagonais. Para a construção do próximo passo que
será um triângulo isósceles, utilizamos a metade
da diagonal do quadrado e assim construímos o
triângulo, e para terminar seguimos os mesmos
passos a partir do quadrado.

O primeiro passo foi fazer uma semi reta
de 5cm, utilizando compasso, regua de 30cm e o
transferidor, utilizamos para traçar a semi reta
a perpendicular, depois traçamos a diagonal no
quadrado e assim fizemos o triangulo, com a
medida da diagonal, e assim sucessivamente a cada
repetição do processo eles diminuem de tamanho,
tanto os quadrados quanto os triangulos

Fonte: Os autores.

Dentre os quatorze alunos que realizaram esta tarefa, oito descreveram corretamente, com detalhes e em ordem, os passos de construção da árvore pitagórica; sete alunos apresentaram dificuldades, indicando os passos fora de ordem ou mencionando os passos de construção sem explicar o processo, sinalizando que este tipo de tarefa provavelmente não faz parte das aulas de matemática destes alunos.

Destacamos que, para transformar o figural em linguagem natural, é necessário utilizar a produção mental para uma produção escrita. Nestes casos, Duval (2011) explica que é necessário, por parte do sujeito, um controle das produções escritas, que é gerado por meio de um circuito de atividade cognitiva bem mais amplo e mais potente que o constituído pelas produções orais e mentais.

Nesse contexto, além de a mobilização para a produção escrita possibilitar a tomada de consciência do que antes o sujeito não tinha consciência (DUVAL, 2011), sua análise por uma terceira pessoa permite reconhecer a organização conceitual e cognitiva do indivíduo, permitindo refletir sobre suas apreensões, objetivo deste trabalho.

3ª Tarefa: Cálculo de Área e Perímetro dos quadrados formados em cada etapa da Árvore Pitagórica

A terceira tarefa consistiu no preenchimento do quadro 1, e solicitava aos alunos calcularem a quantidade de figuras e as medidas de área e perímetro dos quadrados que surgiram em cada uma das etapas, considerando a medida do lado do quadrado inicial de 1cm. Entendemos que esse quadro diz respeito ao registro simbólico, nas representações numérica e algébrica, referente a algumas etapas da Árvore Pitagórica, bem como a sua generalização.

A tarefa 3 propicia aos alunos a realização de uma conversão entre o registro figural e o registro simbólico (numérico e algébrico). Além da conversão, a tarefa 3 também possibilita a realização de tratamentos simbólicos, por meio das transformações realizadas na representação numérica e também da representação numérica para a algébrica, porém, permanecendo no mesmo registro de representação - simbólico.

Quadro 4 - Cálculos de área e perímetro de quadrados formados em etapas da Árvore Pitagórica

Etapa	N. de quadrados em cada etapa	N. total de quadrados	Lado de cada quadrado (cm)	Área de cada quadrado (cm²)	Perímetro de cada quadrado (cm)
0	$1 = 2^0$	$1 = 2^1 - 1$	$1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^0$	1^2	1.4
1	$2 = 2^1$	$3 = 2^2 - 1$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1$	$\frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^1.4$
2	$4 = 2^2$	$7 = 2^3 - 1$	$\frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2. 4$
3	$8 = 2^3$	$15 = 2^4 - 1$	$\frac{\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3.4$
4	$16 = 2^4$	$31 = 2^5 - 1$	$\frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$	$\frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$	.4
:	:	:	:	:	:
N	2^n	$2^{n+1} - 1$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$	$\frac{1}{2^n}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.4$

Fonte: Os autores.

Em relação ao preenchimento deste quadro, notamos que os alunos não manifestaram dificuldades no que se refere ao número de quadrados formados em cada etapa e número de quadrados formados no total. Contudo, as dificuldades surgiram no momento em que tiveram que determinar as medidas do lado, área e perímetro de cada quadrado, pois a maioria não percebeu que era necessário utilizar o teorema de Pitágoras para determinar as referidas medidas. Além disso, notamos que apesar de os alunos participantes cursarem o 3º ano do Ensino Médio, percebemos suas dificuldades na realização dessas tarefas, incluindo conhecimentos elementares de matemática tais como operações entre frações, números decimais, raízes entre outros. Tal fato ficou evidenciado na construção da tabela apresentada na figura 8, pois essa foi a resposta mais completa coletada dentre os alunos participantes. Ainda assim, o aluno A11, embora tenha preenchido a tabela, não a deixou completa, o que demonstra certa dificuldade em fazer generalizações matemáticas.

Ao refletir a respeito dos motivos dessa dificuldade apresentada, de um modo geral por todos os alunos, nos deparamos com a possibilidade de fazer uma análise a respeito da congruência entre figura e registro simbólico. Ao fazer referência entre a figura e suas medidas (dos lados, área, perímetro) observa-se que não existe congruência entre as unidades figurais diretamente visíveis de modo a possibilitar a representação numérica do comportamento da figura, bem como fazer generalizações a seu respeito. Duval (2011) atribui à não congruência boa parte das dificuldades das conversões de registros de representação.

Figura 8 - Resposta do aluno A11.

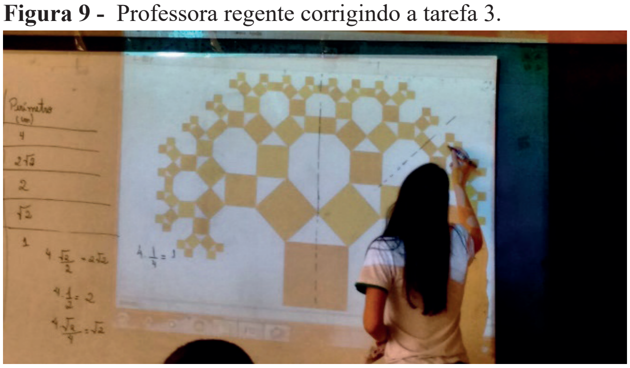
Etapa	Número de quadrados formados em cada etapa	Número de quadrados formados no total	Medida do lado de cada quadrado (cm)	Área de cada quadrado (cm²)	Perímetro de cada quadrado (cm)
0	1	1	1		
1	2	3	$\sqrt{\frac{2}{2}}$	$\frac{1}{2}$	
2	4	7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
3	8	15			
4	16	31			

Fonte: Os autores.

As dificuldades apresentadas pelos alunos foram motivos de preocupação das pesquisadoras e professora regente. Assim, nesta tarefa, após os alunos fazerem suas escolhas sobre as possibilidades de cálculos para os valores solicitados na tabela, levantarem dúvidas, formularem hipóteses, trocarem informações com os colegas e verificarem a validade de suas asserções, a professora regente foi até a lousa, e fez explicações dos saberes em questão, formalizando, juntamente com a interação dos alunos, todo o procedimento de resolução da tarefa.

Para este procedimento, foi projetado na lousa a figura da Árvore Pitagórica (Figura 9). Até este momento o software ainda não havia sido utilizado pelos alunos, a figura projetada na lousa foi construída pela professora que a utilizou como recurso para auxiliar na explicação aos alunos. Durante o processo de institucionalização, os alunos se demonstraram participativos e interessados pela correção da tarefa.

Figura 9 - Professora regente corrigindo a tarefa 3.



Fonte: Os autores.

Os valores numéricos encontrados em cada uma das etapas da construção do fractal estão indicados no quadro 4. Notamos que ao analisarmos os valores encontrados em cada etapa, existe um padrão matemático que se repete, e que nos permite generalizar os cálculos realizados na representação numérica para a representação algébrica. Ressaltamos que aos alunos, participantes desta pesquisa, foram propostos os cálculos até a etapa 4 da construção do fractal, não sendo realizada a generalização dos padrões, juntamente com os alunos.

No entanto, apresentamos o quadro 4 aos leitores com o intuito de oficializar os valores obtidos com a realização dos cálculos matemáticos, e especialmente para apresentar a possibilidade desta tarefa com a articulação entre três representações matemáticas, a saber, as representações figural (imagem de construção da Árvore Pitagórica), numérica (cálculos e valores numéricos) e algébrica (generalização). Assim, seguindo os pressupostos de Duval (2012a), entendemos que esta tarefa, que permite ao aluno articular três representações matemáticas para um mesmo objeto (Árvore Pitagórica), propicia ao aluno aprendizagens no sentido de permitir a não confundir o objeto com uma única representação.

4ª Tarefa: Construção da Árvore Pitagórica com o GeoGebra

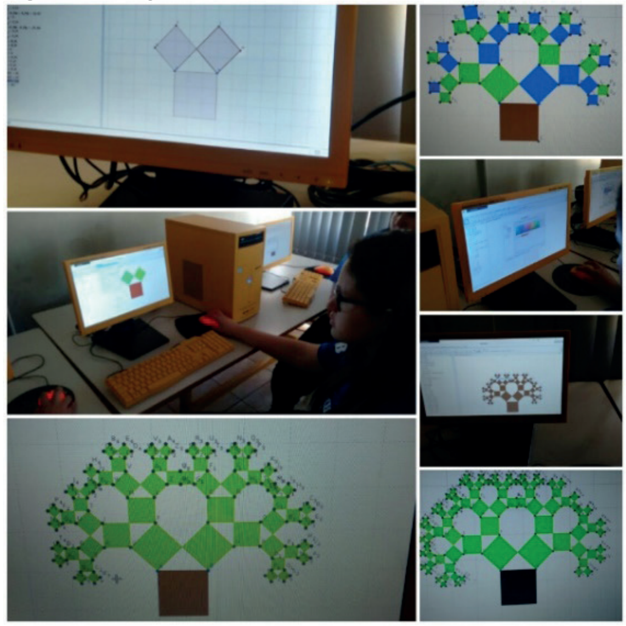
Dando sequência às tarefas, realizamos a construção da Árvore Pitagórica com o *software* GeoGebra, no laboratório de informática do colégio.

Optamos por desenvolver a mesma tarefa com o *software* GeoGebra, pois este possibilita a representação do objeto preservando suas dimensões e oportunizando grande quantidade de experimentações com claras identificações dos elementos figurais, já que no momento da construção se faz necessário conhecer as unidades figurais para acionar o comando no *software*. Além disso, possibilitou aos alunos participantes da pesquisa o conhecimento de um *software* de geometria o que contribui para mudanças, novas descobertas e progressos de seus conhecimentos (Borba, 1999). A aula teve duração de 50 minutos, e estavam presentes 15 alunos. O laboratório possui 18 computadores, todos funcionaram bem e tinham o *software* GeoGebra instalado, e a tarefa foi desenvolvida individualmente pelos alunos. Para auxiliar no processo, elaboramos um tutorial[3] com os passos da construção do fractal Árvore Pitagórica no *software* GeoGebra, e três questões para os alunos responderem, relacionadas a esta construção, e os passos de construção foi projetado por meio do Data Show na parede do laboratório. Enquanto era realizada a construção no *software* por uma das pesquisadoras, os alunos acompanhavam a projeção e, na sequência, realizavam os passos em seus computadores. As Figuras 10 e 11, mostram algumas imagens referentes à distribuição dos alunos no laboratório de informática e à construção do fractal no Geogebra.

Figura 10 - Alunos no laboratório**.**

Fonte: Os autores.

Figura 11 - Alguns fractais.



Fonte: Os autores.

Para esta tarefa, ressaltamos a motivação e o interesse dos alunos pelas figuras que surgem na construção da árvore, na beleza do fractal conforme aumentam as iterações, a percepção de padrões, a interação com os colegas e com as professoras presentes. Algumas dificuldades foram percebidas em relação ao uso do *software*, como manuseio do mouse, busca pelas ferramentas na janela do GeoGebra, mas que foram superadas no decorrer da aula.

Para a construção deste fractal, primeiramente constrói-se um triângulo isósceles, de modo que os lados deste triângulo servem como base para a construção de três quadrados respectivos a estes lados. Por último, criamos uma ferramenta que auxilia nas iterações desejadas para este fractal.

5ª Tarefa: Construção da Árvore Pitagórica com material manipulável

Como última tarefa proposta, realizamos a construção, juntamente com os alunos, da árvore pitagórica utilizando materiais manipuláveis.

Consideramos essa etapa final, uma etapa importante haja vista que as operações figurais a serem realizadas com materiais advindas de recortes, colagens, translações, rotações, comparações, entre outros, permitem um trabalho menos formal. Além disso, colocam em prática representações mentais oportunizando uma materialização das construções realizadas até o momento, mesmo que esta materialização não ultrapasse sua posição de representação do objeto a ser construído.

A árvore foi colada na parede da sala de aula dos alunos, conforme ilustra a figura 12. Para agilizar o processo, levamos

3 O tutorial com os passos para a construção da árvore pitagórica no GeoGebra, bem como as tarefas matemáticas desenvolvida com os alunos estão disponíveis em: XXXXXX - o endereço da web será incluído após a avaliação e aprovação do artigo, pois ele está identificado com o nome das autoras.

para os alunos os papéis laminados recortados na forma de quadrados em diferentes tamanhos, condizentes com a construção da árvore. Antes de iniciarmos a colagem, nós, pesquisadoras, os questionamos oralmente: *O que acontece com o tamanho do quadrado em cada etapa? Como podemos classificar os triângulos que surgem em cada etapa? E ao compararmos os triângulos de uma etapa com outra, o que podemos concluir? Em relação aos ângulos de cada triângulo, o que podemos afirmar?* Os alunos foram participativos ao responder a estes questionamentos, respondendo que os triângulos que surgem em cada etapa são isósceles e congruentes, e que cada triângulo possui dois ângulos de 45º e um de 90º.

Figura 12 - Árvore Pitagórica construída com papel laminado.

Fonte: Os autores.

4 Conclusão

Com a pesquisa aqui relatada, tivemos como objetivo apresentar possibilidades para as aulas de matemática relacionadas ao uso de diferentes registros de representação semiótica aliados à Geometria dos Fractais. Nosso propósito em articular os registros de representação à Geometria dos Fractais emerge das ideias de Duval (2012a), o qual defende que os registros externos formam um meio de proporcionar a construção da aprendizagem. Ainda, para Duval (2011), o "enclausuramento" de registro impede os alunos de reconhecerem um mesmo objeto matemático em outras representações.

É nesse sentido que defendemos que os fractais geométricos, assim como o exemplo relatado acerca da Árvore Pitagórica, podem ser explorados em sala de aula por meio dos quatro registros elencados por Duval (2011): i) Figural, explorados neste artigo pelos recursos *software* de geometria dinâmica (GeoGebra), instrumentos de desenho geométrico (régua, compasso, transferidor) e materiais manipuláveis (neste caso, foram utilizados recortes de papel que correspondem às etapas do fractal Árvore Pitagórica); ii) Simbólico, explorado nesta pesquisa por meio das representações numérica (cálculos de área e perímetro das figuras planas envolvidas) e algébrica (fórmulas das figuras planas e generalizações dos cálculos numéricos); iii) Linguagem Natural, que nesta pesquisa foi o recurso utilizado para os alunos descreverem os passos de suas construções da Árvore Pitagórica com régua e compasso; iv) Gráfico, que embora não tenha sido contemplado nas tarefas propostas neste trabalho, inferimos que o Registro Gráfico também pode ser articulado aos estudos envolvendo Geometria Fractal. Como exemplo, citamos as generalizações dos cálculos de área, perímetros e quantidade de figuras formadas nas etapas do fractal que podem ser plotados em um gráfico no sistema cartesiano, inclusive por meio do uso do GeoGebra, e realizados os estudos pertinentes tais como limites, infinito, crescimento e decrescimento das funções etc.

Para confirmar esta possibilidade para o ensino de matemática no que diz respeito à Geometria Fractal articulada aos diferentes Registros de Representação Semiótica em sala de aula, relatamos neste artigo uma tarefa que foi implementada em sala de aula de matemática do Ensino Médio, relacionada à construção do fractal Árvore Pitagórica, na qual foram contempladas as representações figural, numérica, algébrica e linguagem natural.

A implementação das tarefas em sala de aula além de explorar diferentes registros também permite explorar diversos conceitos matemáticos tais como área e perímetro de figuras planas, diferentes figuras geométricas, funções, trigonometria, progressão aritmética, progressão geométrica, limites, simetrias, operações com frações e números decimais, teorema de Pitágoras, semelhanças de triângulos, ângulos entre outros.

Além da exploração destes conceitos matemáticos, as construções figurais por meio de régua e compasso e do *software* GeoGebra possibilitaram aos alunos sujeitos desta pesquisa o conhecimento a respeito destas construções e manuseio dessas ferramentas pedagógicas, pois eles demonstraram poucos conhecimentos prévios acerca do manuseio dos instrumentos com régua e compasso, conforme relatado pelo aluno A1: *Senti dificuldade para mexer no compasso e fazer as marcações*.

Outro ponto de destaque das tarefas implementadas foram as aulas realizadas no laboratório de informática, pois estas possibilitaram aos alunos utilizarem pela primeira vez os computadores como ferramenta pedagógica, além de permitir conhecer e visualizar o comportamento de um fractal, no caso, da Árvore Pitagórica. De imediato, pôde-se perceber o fascínio dos alunos pelas figuras que surgiam na construção do fractal Árvore Pitagórica. Os alunos, ao manipularem o *software* e no decorrer das construções, perceberam características importantes do fractal como a auto similaridade e a complexidade infinita dos fractais. A exploração da Geometria dos Fractais por meio do GeoGebra encantou os alunos pela beleza que os fractais apresentam e, quanto mais iterações do fractal surgiam, mais os alunos queriam construí-las. Além disso, o uso de meios tecnológicos otimizou o tempo em relação à construção com régua e compasso. No entanto, consideramos ambas as construções (régua e compasso e GeoGebra) importantes por proporcionarem análises e modos de raciocínios diferenciados.

Destarte, considerando que as tarefas foram elaboradas envolvendo diferentes Registros de Representação Semiótica, e considerando que os alunos apresentaram bom desempenho nas tarefas, podemos concluir, com base em Duval (2012a), que houve a compreensão do processo de construção do fractal Árvore Pitagórica e dos conceitos matemáticos envolvidos.

Sendo assim, reconhecemos na Geometria dos Fractais a possibilidade de articulação com os diferentes registros de representação semiótica propostos por Duval (2012a) e, consequentemente, como uma forma de aprendizagem dos conceitos matemáticos envolvidos. Ademais, os conceitos e o nível de ensino a serem explorados ficam a critério do professor e de sua necessidade pedagógica, pois este dinamismo e possibilidades dessas escolhas também são propiciados pela Geometria Fractal.

Referências

Bonete, I. P. (2000). As Geometrias Não-Euclidianas em cursos de licenciatura: Algumas experiências. (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP/ Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO, Guarapuava, PR, Brasil.

Borba, M. C. (1999). Tecnologias informáticas na Educação Matemática e reorganização do pensamento. In M. A. V., Bicudo. Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas, pp.285-295. São Paulo: Unesp.

Barbosa, R. M (2005). Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Brousseau, G. (1996). Fundamentos e métodos da didática da matemática. In J, Brun. Didática das Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget.

Cabariti, E. (2004). Geometria Hiperbólica: uma proposta didática em ambiente informatizado. (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC, São Paulo, SP, Brasil.

Caldato, M. E. (2011). O processo coletivo de elaboração das Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Paraná e a inserção das Geometrias Não Euclidianas. (Dissertação mestrado). Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá, PR, Brasil.

Damm, R. F. (2003) Registros de representação. In S. D. A., Machado. Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: EDUC.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamento humano: Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales Colombia: Universidade del Valle.

Duval, R. (2003) Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In S. D. A. Machado. Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica, pp.11-33. Campinas: Papirus.

Duval, R. (2009). Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física.

Duval, R. (2011). Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas. In T. M. M. Campos. São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2012a). Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência *Rev Eletr Educ Matem,* 7(1), 118-138. doi: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Duval, R. (2012b). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensament. *Rev Eletr Educ Matem*, 7(2), 266-297. doi: http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266

Duval, R. (2013). Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. J. L. M., Freitas, & V. Rezende. Rev Paranaense Educ Matem, 2(3), 10-34.

Gatti, B. A., Barretto, E. S. S., & André, M. E. D. A. (2011). Políticas docentes no Brasil: um estado da arte. Brasília: Unesco.

Kaleff, A.M. (2004). Sobre o poder de algumas palavras e imagens quando se busca avançar além das noções euclidianas mais comuns. Boletim (45), 26-42.

Lorenzato, S. (1995). Por que não ensinar Geometria? Educ Matem Rev, 4(4), 3-13.

Lovis, K. A. (2009) Geometria Euclidiana e Geometria Hiperbólica em um Ambiente de Geometria Dinâmica: o que pensam e o que fazem os professores. (Dissertação Mestrado). Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá, PR, Brasil.

Mandelbrot, B. B. (1983). The Fractal Geometry of Nature. New York: W. H. Freeman and Company.

Nascimento, M., Silva, S. C. R., Maciel, N. A (2012). Uma proposta didática para o ensino da geometria fractal em sala de aula na Educação Básica. VIDYA, 32(2), 113-132.

Parecer DCE de 2008. Dispõe sobre as diretrizes curriculares do Estado do Paraná para a disciplina de Matemática.

Santaló, L. A. (2006). Matemática para não-matemáticos. In Saiz, I. & Parra, C. Didática da Matemática: reflexões psicopedagógicas. Porto

Santos, T. S. (2008) A inclusão das Geometrias não-euclidianas no currículo da Educação Básica**.** (Dissertação Mestrado). Universidade Estadual de Maringá, Maringá – UEM, Maringá, PR, Brasil.