Tarefas que Emergem em Atividades de Modelagem Matemática em um Ambiente Educacional de Cálculo Diferencial e Integral

Tasks Emerging in Mathematical Modelling Activities in an Educational Environment of Integral and Differential Calculus

Karina Alessandra Pessoa da Silva

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Matemática. PR, Brasil
E-mail: karinapessoa@gmail.com
Recebido em: jan. - 2017; Aceito em: jun. - 2017

Resumo

As reflexões apresentadas neste artigo são resultados de uma pesquisa em que identificamos tarefas que emergem em aulas com modelagem matemática quando desenvolvidas em uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Para isso, nos fundamentamos nos pressupostos teóricos da modelagem matemática compreendida como uma alternativa pedagógica cujos encaminhamentos seguem as fases da modelagem e nas abordagens de tarefas enquanto ações para o desenvolvimento de uma atividade. Analisamos atividades de modelagem matemática desenvolvidas por três turmas do curso de Licenciatura em Química de uma universidade federal do Paraná. A opção metodológica para as análises e a codificação dos dados é de cunho qualitativo e segue encaminhamentos propostos na Teoria Fundamentada. A partir da codificação e análise dos dados consideramos agrupamentos realizados no que diz respeito a tarefas que emergem das atividades desenvolvidas concluindo que estas se relacionam com a situação em estudo, com a matemática que dela emerge e com o uso da tecnologia, configurando uma teoria fundamentada.
Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas.

Abstract

The reflections presented in this article are results of a research in which we identify tasks that emerge in classes with mathematical modelling when developed in a discipline of Integral and Differential Calculus. For this, we based ourselves on the theoretical assumptions of mathematical modelling understood as a pedagogical alternative whose routing follows the phases of modelling and in the approaches of tasks as actions for the development of an activity. We analyzed mathematical modelling activities developed by three classes of the degree course in Chemistry of a federal university of Paraná. The methodological option for the analysis and the codification of the data is of qualitative character and follows directions proposed in the Grounded Theory. From the codification and analysis of the data, we consider groupings carried out with respect to tasks that emerge from the activities developed, concluding that they relate to the situation under study, to the mathematics that emerges from it and to the use of technology, forming a grounded theory.
Keywords: *Mathematics Education. Mathematical Modelling. Integral and Differential Calculus. Tasks.*

1 Introdução

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral em cursos nos quais esta disciplina é considerada de aplicação, de forma geral, apresenta alguns obstáculos devido às dificuldades dos alunos em associar os conteúdos abordados ao contexto em que estão inseridos. Nesse sentido, discussões com vistas à implementação de abordagens que articulem situações próximas ao contexto dos cursos têm sido recorrentes na área da Educação Matemática e argumentações sobre a importância de se incorporar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, bem como relatos de pesquisa têm sido o foco de vários pesquisadores da área (Almeida *et al*. 2015; Araújo & Campos, 2015; Barroso *et al*., 2013; Fecchio, 2010; Ferruzzi & Almeida, 2015; Igliori & Beltrão, 2015; Soares & Borba, 2012; Ustra & Ustra, 2015).

Dentre os aspectos que merecem atenção no que se referem ao uso e à implementação de atividades de modelagem matemática podemos destacar as tarefas que dela emergem com vistas ao estudo e aplicação de conteúdos matemáticos que fazem parte da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. E é nesse contexto que nossa pesquisa está inserida.

Entendemos que em atividades de modelagem matemática parte-se de uma situação inicial problemática e chega-se a uma solução que chamamos de situação final para a situação inicial. No encaminhamento da situação inicial para a final são definidos procedimentos e ações dos envolvidos com a atividade de modelagem, enquanto ‘coisas a fazer’. Segundo Ponte (2014), “o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno”, representa a tarefa a ser proposta e/ou conduzida. Na realização da atividade, constituída por um sistema de tarefas, pode se configurar o aprender e aplicar conceitos matemáticos, essenciais ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Pesquisas que em alguma medida se remetem à proposta e à condução de tarefas em aulas com atividades de modelagem matemática têm sido desenvolvidas por pesquisadores (Ärlebäck & Doerr, 2015; Borssoi *et al.* 2016; Oliveira & Oliveira, 2014, Trevisan *et al*., 2015).

De forma geral, os textos relatam tarefas que foram conduzidas em sala de aula (Oliveira & Oliveira, 2014), atividades que geraram modelos matemáticos generalizados para outras situações (Ärlebäck & Doerr, 2015), tarefas desencadeadas em uma atividade e que foram conduzidas por diferentes grupos de alunos (Trevisan *et al*., 2015) ou sugestões de tarefas que poderiam ser propostas e/ou conduzidas em uma atividade de modelagem desenvolvida (Borssoi *et al*., 2016).

No presente artigo trazemos resultados, ainda que parciais, de um projeto de pesquisa que investiga um ambiente educacional para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Um dos objetivos do projeto é a organização de tarefas que integrem o ambiente educacional almejado. Entendemos ambiente educacional, como um "conjunto de elementos, de ordem material ou afetiva, que circunda o educando, que nele deve necessariamente se inserir e que o inclui" (Troncon, 2014, p. 265). Dentre esse conjunto de elementos levamos em consideração aspectos pedagógicos e procedimentais das tarefas enquanto "elemento organizador da atividade de quem aprende" (Ponte, 2014, p. 14).

Neste contexto, nossa pesquisa tem como objetivo identificar tarefas que emergem em aulas com modelagem matemática no ambiente educacional de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Licenciatura em Química.

Subsidiamos nossas reflexões na análise de dados coletados por meio de registros escritos produzidos pelos alunos e gravações em áudio e vídeo de atividades de modelagem matemática desenvolvidas por grupos de estudantes de três turmas de um curso de Licenciatura em Química. As análises foram realizadas à luz da Teoria Fundamentada proposta por Charmaz (2009).

A partir dessa introdução, o texto apresenta aspectos relativos aos termos tarefa e atividade. Em seguida, tratamos de nosso entendimento para atividades de modelagem matemática na Educação Matemática. Na terceira seção definimos o contexto da pesquisa e os aspectos metodológicos que orientaram a codificação dos dados para, na seção seguinte, fazer uma descrição analítica codificando os dados relativos às tarefas que emergiram das atividades desenvolvidas em cada turma investigada. Finalizamos com o reconhecimento de proximidades e convergências nos códigos emergentes das atividades configurando a codificação focalizada por meio do agrupamento que remetem às tarefas que emergem em atividades de modelagem.

2 Tarefa e Atividade: Abordagens Utilizadas Neste Trabalho

Os termos tarefa e atividade podem ser utilizados em diferentes contextos do dia a dia. De forma geral, tarefa consiste em ações que uma pessoa ou um grupo de pessoas deve realizar para desenvolver uma atividade. Em um jogo de futebol, por exemplo, as posições que os jogadores ocupam determinam suas funções no campo para desenvolver o esquema tático e marcar gols. Nesse caso, o esquema tático é a atividade a ser realizada, em conjunto, pelos jogadores conduzidos pelas ações (tarefas) em suas posições, seja de goleiro, defesa, meio-campo ou ataque, seguindo procedimentos com o objetivo de marcar gols. Cada posição ocupada exige habilidades cuja meta é o toque de passe entre os jogadores.

No âmbito da Educação Matemática, os conceitos de tarefa e atividade são discutidos por pesquisadores fundamentados em diferentes pressupostos teóricos, com vistas à aprendizagem. Pesquisadores, fundamentados na Teoria da Atividade de Leontiev (1978), consideram que a atividade é orientada por meio de um sistema de ações planejadas, motivadas por fins a serem alcançados.

De forma geral, o conceito de atividade não se refere somente a ações físicas, mas também a ações psíquicas conscientemente controladas como a memorização ativa, o pensamento, a intenção. A atividade humana, no entanto, envolve ações externas e internas. Ao analisar a estrutura da atividade humana, Leontiev (1978) distingue três níveis de funcionamento: a atividade propriamente dita, as ações e as operações. Para esse estudioso, a atividade (como um todo) é orientada por um motivo; as ações são orientadas por metas e as operações consistem no aspecto prático, nos métodos para a realização destas ações e envolvem condições e procedimentos.

Nesse sentido, na prática, a atividade não é diretamente percebida pelos nossos sentidos, mas pode ser estabelecida pelas ações que a constituem com relação a um motivo, tanto material quanto ideal. Para Leontiev, uma atividade pode ser constituída por diferentes ações.

Todavia, podemos conjecturar que uma tarefa representa uma ação direcionada a certo objetivo, no caso o ensino e a aprendizagem da matemática, e pode emergir tanto por parte do professor quanto por parte dos alunos, dependendo de como e onde são utilizadas. As tarefas, de certa forma, estabelecem uma mediação entre o ensino e a aprendizagem da Matemática e podem mobilizar conceitos e procedimentos matemáticos. Para isso, se faz necessário considerar o ambiente educacional em que as tarefas são propostas e conduzidas, os conhecimentos dos alunos e a organização do trabalho desenvolvido por eles.

Assim, nosso entendimento sobre tarefa e atividade está fundamentado nos apontamentos supracitados e nas assertivas de Ponte (2014, p.15):

> Uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas. Mais importante, a atividade, que pode ser física ou mental, diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto. Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele)).

Doravante, podemos considerar que nos contextos educativos, a noção de atividade envolve as diferentes ações do aluno e o modo como se envolve nas situações apresentadas na sala de aula.

Levando em consideração que a atividade é permeada por uma ou mais tarefas realizadas no interior de um contexto em que a aprendizagem pode ocorrer é que voltamos nosso olhar para atividades de modelagem matemática. Além disso, corroboramos com Ponte (2014, p. 17), de que "é pela sua atividade e pela sua reflexão sobre essa atividade que o aluno aprende, mas é importante ter presente que esta depende de dois elementos igualmente importantes: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo professor". No caso da nossa pesquisa, a tarefa proposta emerge da atividade de modelagem matemática e a situação didática leva em consideração os encaminhamentos realizados pelo professor para orientar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

3 Sobre Atividades de Modelagem Matemática na Educação Matemática

Entendemos modelagem matemática na Educação Matemática como uma alternativa pedagógica em que é obtida uma solução para uma situação-problema que, de forma geral, é oriunda da realidade. Por meio da modelagem matemática é possível fazer uma interpretação, mesmo que parcial, com o apoio da Matemática de fenômenos existentes no mundo ou na vida.

A busca de solução para uma situação-problema é orientada por um conjunto de procedimentos. Almeida e Tortola (2014, p.115) elencam esses procedimentos, como:

> a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a construção de um modelo matemático e seu uso para a análise da solução, a interpretação dessa solução bem como a sua comunicação para outros.

Entendemos que os procedimentos elencados pelos autores supracitados configuram-se em ações para o desenvolvimento de uma atividade. Nesse sentido, "uma atividade de Modelagem Matemática abarca a atividade propriamente dita, um conjunto de ações e um conjunto de operações" (Almeida & Ferruzzi, 2011, p. 3), com vistas à solução de um problema. Para tanto, se faz necessária a dedução de um modelo matemático que é um "conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto matemático" (Bassanezi, 2002, p. 20).

Blomhøj e Kjeldsen (2011) afirmam que a dedução de um modelo matemático é uma ação que objetiva responder um problema inicialmente determinado e, para tanto, é necessário que os alunos sejam expostos a situações que os levem à reflexão sobre o processo de modelagem e à função dos modelos em diferentes contextos.

Na literatura, o encaminhamento de uma atividade de modelagem matemática segue o que pesquisadores da área chamam de fases da modelagem matemática (Almeida *et al*., 2012; Borromeo Ferri, 2006; Sekerák, 2010; Stillman *et al*., 2010, 2015). Em nossa pesquisa, nos fundamentamos nas fases propostas por Almeida *et al*. (2012), quer sejam inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação.

A *inteiração* corresponde ao primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar. É a busca por informações que possibilitarão vislumbrar o problema a ser estudado bem como as metas que orientam a sua resolução. Com a situação-problema identificada e estruturada, busca-se a elaboração de uma representação matemática, ocorrendo uma transição de linguagens; o problema, que inicialmente está escrito em linguagem natural, passa a ser escrito em linguagem matemática e, para isso, lança-se mão da formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificação da situação. Daí que a segunda fase da modelagem matemática é caracterizada por *matematização*.

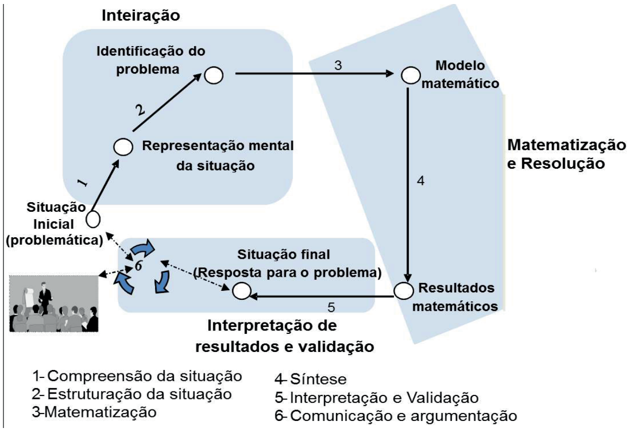
A *resolução* compreende a construção de um modelo matemático que tem a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes desta situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e, mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

A *interpretação dos resultados* indicados pelo modelo matemático implica na análise de uma solução para o problema. A análise da solução constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica em uma *validação* da representação matemática associada ao problema.

As "fases da Modelagem Matemática" caracterizadas por Almeida *et al*. (2012) constituem procedimentos necessários para a realização de uma atividade de modelagem e podem ser representadas por meio de um ciclo, conforme apresentado na Figura 1. Pesquisadores, de forma geral, utilizam "o ciclo de modelagem como um meio de comunicar o que parece estar acontecendo na atividade e o nível cognitivo do estudante durante a modelagem" (Stillman *et al.,* 2015, p. 94).

As fases podem não ocorrer de forma linear, pois a dinamicidade deste tipo de atividade possibilita movimentos de ida e volta. Além disso, uma fase pode ser antecipada em detrimento de especificidades do estudo. Stillman, Brown e Geiger (2015, p. 95) afirmam que a antecipação é uma "previsão do que será útil matematicamente nas transições entre as fases do processo de modelagem", envolvendo pressupostos e *feedbacks* entre as fases. Isso possibilita a tomada de decisão e a realização de ações do que será feito na dedução de um modelo matemático.

Figura 1- Fases da modelagem matemática



Fonte: Almeida *et al*. (2012, p. 19).

Levando em consideração que as fases orientam o desenvolvimento de atividades de modelagem é que nos propomos identificar tarefas que delas emergem quando desenvolvidas em sala de aula na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 em um curso de Licenciatura em Química.

4 Contextos da Pesquisa e Aspectos Metodológicos

Nossa pesquisa foi realizada em uma universidade federal do estado do Paraná na qual atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas com alunos de três turmas do primeiro período (regime semestral) de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 durante os anos de 2015 e 2016. Neste artigo denominamos *Primeira turma* (T1) às atividades que foram desenvolvidas pelos alunos do primeiro semestre de 2015; *Segunda turma* (T2), às atividades desenvolvidas no segundo semestre de 2015; *Terceira turma* (T3), às atividades do primeiro semestre de 2016. De forma geral, as turmas eram constituídas por 44 alunos que se organizaram em grupos de quatro ou cinco integrantes.

Para trabalhar com atividades de modelagem matemática em sala de aula, a professora das turmas realizou procedimentos de familiarização, seguindo os três momentos propostos por Silva, Almeida e Gerôlomo (2011). Neste artigo voltamos nossa atenção para as atividades configuradas como de segundo momento de familiarização em que

> uma situação-problema é sugerida aos alunos que, divididos em grupos, complementam a coleta de informações para a investigação da situação, realizam a definição de variáveis e a formulação das hipóteses simplificadoras, e chegam a obtenção e validação do modelo matemático e seu uso para a análise da situação (Silva *et al.* 2011, p.33).

Com isso, os alunos a partir de uma situação proposta pela professora-pesquisadora foram responsáveis pela coleta de dados extraclasse e, em sala de aula, reunidos em grupos deram encaminhamento à atividade de modelagem. No Quadro 1, apresentamos as temáticas das atividades desenvolvidas em cada turma investigada.

Quadro 1 - Temáticas desenvolvidas por turma

Turma	T1 – 2015/01	T2 – 2015/02	T3 – 2016/01
Temática	Percentual de carregamento da bateria do telefone celular	Temperatura de um corpo ou ambiente em função do tempo	Ebulioscopia – temperatura de ebulição de uma solução

Fonte: Dados da pesquisa.

Os registros escritos do desenvolvimento das atividades, as discussões realizadas em sala de aula, bem como em encontros extraclasse, foram gravados em áudio e vídeo com o consentimento dos envolvidos e constituíram os dados analisados neste artigo.

Os instrumentos adotados para a obtenção dos dados seguem tendências da pesquisa predominantemente qualitativa, cuja preocupação incide mais no processo do que no produto. Para identificar as tarefas que emergem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em um ambiente educacional de Cálculo Diferencial e Integral 1 conduzimos nossa análise segundo indicações propostas na Teoria Fundamentada (Charmaz, 2009).

A Teoria Fundamentada é um método que se baseia em dados sistematicamente coletados e analisados. A análise que o pesquisador faz desses dados origina os conceitos que serão construídos. Nesse intuito, se faz necessário reunir dados para elaborar análises teóricas desde o início da investigação. A codificação na Teoria Fundamentada é analítica e "exige uma parada para que possamos questionar de modo analítico os dados que coletamos" (Charmaz, 2009, p. 67).

O desenvolvimento de categorias teóricas decorre da codificação, algumas das quais podem ser definidas a partir de códigos iniciais relevantes. Essas categorias teóricas levam às explicações do processo e podem ser transformadas em conceitos da Teoria Fundamentada.

Nossa pesquisa leva em consideração a codificação de dados de um grupo de alunos de cada turma investigada com o objetivo de não se estender no texto com a grande quantidade de dados e considerar diferentes temáticas. Além disso, consideramos grupos formados por alunos que participaram de todo o desenvolvimento da atividade na sala de aula. Os nomes fictícios que aparecem no decorrer do texto são dos alunos dos grupos analisados.

Primeiramente realizamos uma *codificação inicial* das tarefas que emergiram das atividades desenvolvidas em cada turma, segundo as fases da modelagem matemática, considerando as ações que permearam o seu desenvolvimento. Numa segunda etapa, analisamos os conceitos selecionados para as tarefas que emergiram das atividades, realizamos uma reorganização de tais conceitos considerando os três níveis de funcionamento de uma atividade humana e extraímos ideias centrais e suas subordinações, conforme é proposto na *codificação axial* indicada na Teoria Fundamentada. Com isso, refinamos a codificação inicial, alterando, inserindo ou reagrupando códigos, buscando validar o processo de codificação.

Finalizamos com uma *codificação focalizada* em que realizamos uma revisão e avaliação das categorias, validando o processo. Para Charmaz (2009, p. 87), essa codificação "constata as suas preconcepções sobre o tópico" que está sendo analisado. Para realizar a codificação focalizada foi feita uma redução das categorias por meio de uniformidades no grupo original de categorias ou suas propriedades e, com isso, formulamos a teoria com um pequeno grupo de conceitos abstratos, delimitando a terminologia para as tarefas.

5 Tarefas Desencadeadas nas Aulas com Atividades de Modelagem Matemática

Para o desenvolvimento das atividades em cada turma, a professora-pesquisadora solicitou com antecedência que os alunos se reunissem em grupos para realizarem a coleta de dados. Para tanto, poderiam solicitar a ajuda de uma aluna de Iniciação Científica, principalmente se a coleta fosse realizada no laboratório da instituição.

Em sala de aula, já com os dados coletados e tabelados, deram início ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, que levou cerca de cinco horas/aula em cada uma das turmas. Como os alunos já haviam desenvolvido atividades de modelagem sabiam que teriam de definir um problema para ser estudado e obter uma solução para o mesmo fazendo uso de conceitos matemáticos. Para o desenvolvimento da atividade poderiam fazer uso de softwares como Excel, Curve Expert e GeoGebra.

5.1 Primeira turma

A atividade de modelagem desenvolvida na primeira turma (T1) diz respeito ao fenômeno *carregamento da bateria do telefone celular*. Para desenvolver essa atividade os alunos coletaram dados com seus respectivos celulares, anotando o percentual de carregamento da bateria em função do tempo (de 15 em 15 minutos).

Em sala de aula, reuniram-se em grupos com quatro integrantes para definirem o problema que seria estudado. No entanto, uma ação anterior seria necessária: escolher, dentre os dados coletados por cada integrante, aqueles que seriam utilizados no desenvolvimento da atividade. Isso é evidenciado nos diálogos entre professora e grupo de alunos, conforme transcrição:

> Leila: Professora, como a senhora disse que era para fazer essa coleta, cada um fez em sua casa. E agora? Vamos usar todos esses dados?
> Professora: Já que vocês têm dados de... quantos telefones?
> Maria: De quatro telefones professora.
> Professora: E o que vocês perceberam de cada um deles?
> Leila: Uma variação muito grande, por causa do modelo, da marca... A gente pode escolher um dos dados para fazer a atividade?
> Professora: Pode sim.
> [...]
> Tereza: E o que vamos fazer agora? Como escolher? O que escolher?
> Leila: Calma Tereza. Vamos analisar os dados. Eu gostei bastante dessa coleta e fiz certinho de quinze em quinze minutos quando acabou a bateria como a professora pediu. O que acham de usarmos os meus dados?
> Oscar: Eu acho uma boa, porque eu recebi chamadas durante o carregamento e pode ter atrapalhado.
> Tereza: Minha internet é só do celular, então nem desliguei para carregar e não tinha zerado a bateria quando comecei carregar.
> Maria: Eu concordo em usarmos os dados da Leila. Não fiz a coleta, mas ajudo no que for preciso [risos].

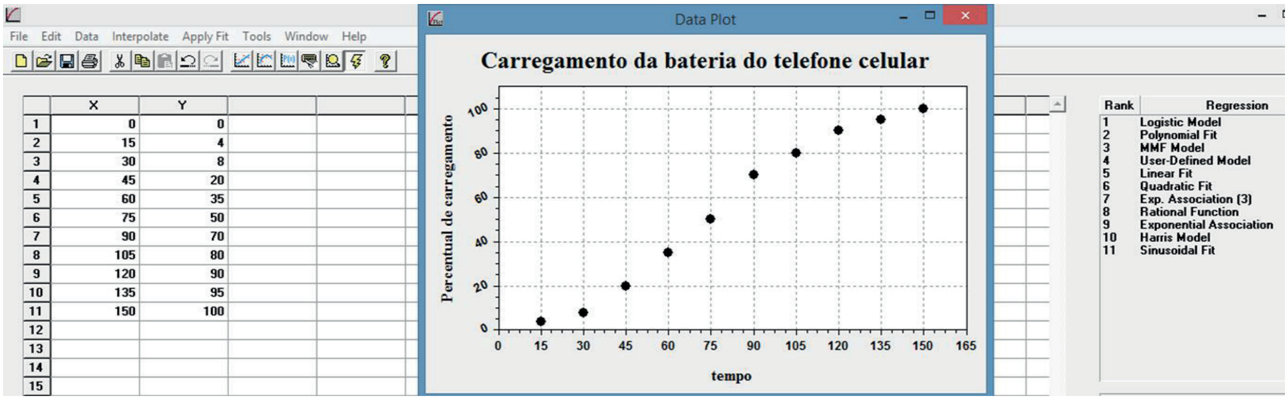
Para iniciar o desenvolvimento da atividade, os alunos realizam diferentes ações que têm como motivo inteirarem-se do que de fato iriam estudar. As ações se configuram enquanto um sistema, pois os alunos planejam quais dos dados coletados farão uso para desenvolver a atividade de modelagem matemática. Esse sistema de ações, segundo Leontiev é orientado para alcançar um determinado fim – desenvolver a atividade. Mesmo que os dados tenham sido coletados individualmente é em grupo que realizam a escolha do que irão utilizar.

A definição do problema, bem como a matematização necessária para sua solução se configuraram enquanto ações que os alunos empreenderam em grupo com a meta de desenvolver a atividade proposta pela professora, conforme transcrição a seguir:

> Leila: Com esses dados aqui [apontando para as anotações que tinha feito], o que a gente pode estudar?
> Maria: Sei lá, a taxa de variação de carregamento?
> Oscar: Taxa de variação de carregamento a gente consegue por derivada e não temos a função.
> Tereza: Mas estudar variação? [...] O que acham de pensarmos quanto carrega após um tempo que deixarmos conectado na tomada?
> Leila: Boa Tereza! E qual seria esse tempo? Vamos determinar um tempo?
> Maria: Para carregar cinquenta por cento leva setenta e cinco minutos e se for a metade, ou seja, vinte e cinco, é metade do tempo?
> Oscar: Não, porque com quarenta e cinco ainda carregou vinte por cento.
> Tereza: E se a gente vai para uma balada e tem quarenta minutos para carregar o telefone, quanto carrega?
> [alunos conversam sobre situações envolvendo tempo e carregamento da bateria do telefone celular]
> Leila: Beleza Tereza! De qualquer forma temos que determinar a função. Bem, o que vocês sugerem?
> Oscar: Vamos fazer o gráfico primeiro né? Fazer o gráfico da porcentagem em função do tempo. Que função será que dá?
> Maria: Vamos usar o software e analisar o comportamento da função. E ver se é linear, quadrática, exponencial.

Os alunos analisaram os dados e definiram o problema a ser estudado: E se eu disponho de 40 minutos para carregar meu celular, qual é a carga que posso obter?. Para a obtenção de uma solução para esse problema, o grupo de alunos sentiu a necessidade da matematização para a interpretação do fenômeno por meio de uma representação gráfica que foi mediada pelo uso do software Curve Expert. As representações geradas com o apoio do software referem-se aos dados coletados e representados sob a forma de tabela e de pontos no plano cartesiano (Figura 2).

Figura 2 - Representações geradas pelo Curve Expert



Fonte: Relatório dos alunos.

Defronte das representações geradas com o auxílio do software na matematização, os alunos conduziram algumas ações e operações práticas como procedimentos matemáticos para definirem o modelo matemático. Esse sistema de ações planejadas possibilitou aos alunos encaminhar a atividade de modelagem matemática, conforme transcrição:

> Oscar: Tudo bem, agora temos aqui uma lista de funções. Qual a gente vai usar?
> Leila: Bem, temos que analisar cada uma delas, considerar aquela que representa a situação. Lembrem que a professora diz que a gente tem que pensar na situação que a gente está estudando.
> Tereza: E o que a gente vai considerar.
> Maria: Eu acho que a gente tem que ver que a bateria carrega até cem por cento. Tem um valor final de carregamento, não importando quanto tempo fica conectada na tomada, não passa de cem por cento.
> Leila: Acho que é isso. Mas olhando cada uma dessas onze funções, o que a gente vai fazer?
> Oscar: A gente podia calcular o limite para ver se dá cem ou perto de cem.
> Leila: Isso Oscar. E trazer coisas que a gente já estudou. Depois podemos até ver aquela sua sugestão de calcular a taxa de variação.
> Oscar: Se a gente souber calcular! [risos]

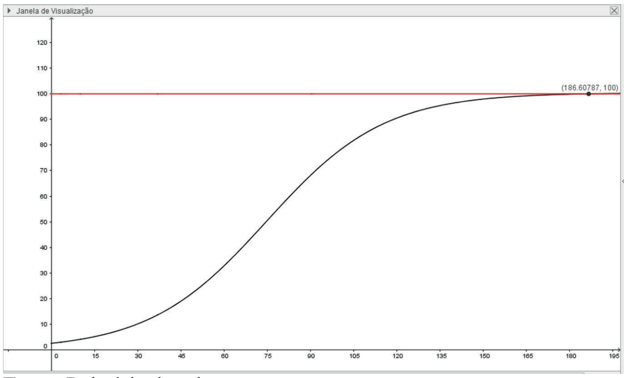
O conceito de limite foi mobilizado pelos alunos (especificamente Oscar) com intenção de analisar o comportamento de cada função e analisar se tal comportamento é relevante e representa a situação. A intenção orientou a tarefa de escolher um modelo matemático na fase de resolução. Para Leontiev, a intenção pode ser considerada uma ação psíquica conscientemente controlada. Essa ação direcionada a certo objetivo emergiu por parte dos alunos, mobilizando conceitos e procedimentos matemáticos já abordados em aulas de Cálculo Diferencial e Integral.

Por meio do cálculo do limite de cada função listada pelo software, os alunos definiram por hipótese que o modelo logístico (primeiro do rank de curvas listadas) representaria o percentual de carregamento da bateria do telefone celular de Leila, ou seja, $y=\dfrac{100{,}417}{1+9{,}015e^{-0{,}049x}}$, em que y representa o percentual de carregamento da bateria do telefone celular em função do tempo x, cujo limite é dado por $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100{,}417}{1+9{,}015\,e^{-0{,}049x}}=100{,}417$. O uso do computador auxiliou em ajustes de curvas, no entanto, os conhecimentos dos alunos com relação à situação e à matemática que a permeou foram fundamentais para que apontassem o modelo que melhor representasse o carregamento da bateria do telefone celular.

A interpretação desses resultados é realizada pelos alunos por meio de uma ação física – representação gráfica – gerada com o auxílio do GeoGebra (Figura 3) em que consideram a situação, *não pode passar de 100%*, bem como na conversa entre os integrantes do grupo:

> Oscar: Meninas eu calculei o limite e deu cem vírgula quatrocentos e dezessete.
> Maria: Então pode passar de cem em algum momento!
> Oscar: Pode sim, dá para fazer o gráfico no GeoGebra e determinar em que momento chega a cem. [...] Professora, ajuda a gente aqui a determinar um valor?
> [professora auxilia os alunos na determinação do valor em que y = 100 no GeoGebra por meio da intersecção entre dois objetos]
> Oscar: É em cento e oitenta e seis vírgula seis e alguns outros números. Depois de duas horas! Trinta minutos a mais do que a gente viu na prática!
> Leila: São as aproximações. Temos uma função, como é mesmo o nome, quando a gente abre aquela chave?
> Tereza: Função definida por partes?
> Leila: Isso Tereza. E quando atingir esse cento e oitenta e tananan, a função é constante em cem.
> Professora: Gostei da abordagem de vocês! Mas e a validação?
> Oscar: Podemos fazer depois para não perder aqui o gancho do que estamos estudando?
> Professora: Só fiquem atentos. Porque talvez tenham que refazer algumas coisas!
> Oscar: Sem problemas! A gente vai usar o Excel para não perdermos muito tempo, pode ser?
> Professora: Pode.

Figura 3 - Representação gráfica do modelo matemático e ponto de intersecção entre curvas



Fonte: Relatório dos alunos.

A representação gráfica utilizada na interpretação dos resultados permitiu aos alunos retornarem à fase de resolução e "refinarem" o modelo matemático inicialmente definido com o auxílio do software Curve Expert, considerando uma função definida por duas sentenças: $y = \begin{cases} \dfrac{100{,}417}{1+9{,}015e^{-0{,}049x}}, & \text{se } 0 \le x \le 186{,}60787 \\ 100, & \text{se } x > 186{,}60787 \end{cases}$. Com isso, evidenciamos que o percurso pelas fases da modelagem matemática apresenta idas e vindas, proporcionando a dinamicidade do desenvolvimento da atividade. Além disso proporciona ações que se configuram para o desenvolvimento da atividade e "diz respeito essencialmente ao aluno e refere-se àquilo que ele faz num dado contexto" (Ponte, 2014, p. 15). Para a validação desse modelo matemático, os alunos consideraram o uso do software Excel.

No entanto, faltava ainda apresentar uma solução para o problema: E se eu disponho de 40 minutos para carregar meu celular, qual é a carga que posso obter?. Para isso, os alunos consideraram a expressão algébrica do modelo matemático e calcularam o percentual do carregamento ao fazerem $x = 40$, em que concluíram que o percentual de carregamento seria de, aproximadamente, 15,46%. Tal percentual correspondia ao intervalo de valores obtidos empiricamente, ou seja, pertencia ao intervalo [8, 20] da imagem. Os alunos conferem a solução fazendo uso do software GeoGebra.

Após apresentarem a solução para o problema, a professora com a intenção de abordar o conteúdo Derivada, já trabalhado em sala de aula, conduz outras abordagens matemáticas para o modelo matemático obtido. Para isso, a professora apresenta ações intencionais com o propósito de motivar nos alunos a aplicação de um conteúdo recém-estudado nas aulas de Cálculo. O diálogo a seguir sinaliza a intenção da professora.

> Professora: O que vocês perceberam quanto à taxa de crescimento do percentual de carregamento em função do tempo?
> Leila: É exatamente isso que iríamos fazer ao final da nossa atividade. Analisar a taxa de carregamento que precisa ser crescente né? [risos]
> Professora: Que ferramenta matemática nos possibilita estudar a taxa de variação do crescimento do carregamento da bateria do telefone celular?
> Oscar: É a derivada! Que nesse caso, temos que usar a regra do quociente.
> Maria: E temos as condições, temos que considerar o denominador diferente de zero!

Para além da apresentação da solução para o problema, a interpretação de resultados faz emergir tarefas relacionadas à taxa de variação de carregamento em função do tempo, o que remete ao cálculo da derivada da função, do modelo matemático, em que os alunos necessitam fazer uso de uma regra de derivação – a regra do quociente. Essa tarefa foi conduzida pela professora e consiste em ferramenta de mediação entre ensino e aprendizagem de matemática e pode ser utilizada pedagogicamente.

De forma geral, podemos sintetizar o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática na primeira turma, considerando um sistema de ações planejadas, motivadas por fins a serem alcançados, bem como por operações práticas para que tais ações fossem executadas. Esse conjunto de ações e operações com vistas à solução de um problema caracteriza a atividade propriamente dita (atividade de modelagem matemática), conforme cunhado por Almeida & Ferruzzi (2011). As ações e operações consistem em tarefas que emergiram na atividade de modelagem sobre o carregamento da bateria do telefone celular e inicialmente foram codificadas, segundo as fases da modelagem conforme consta no Quadro 2.

Quadro 2- Codificação inicial das tarefas que emergiram na T1

Fase da Modelagem Matemática	**Codificação inicial das tarefas que emergiram**
Inteiração	Fazer coleta de dados Escolher um conjunto de dados Analisar os dados Definir o problema
Matematização	Representar graficamente Usar o software Analisar o comportamento da função Definir hipóteses
Resolução	Analisar cada função com a situação Calcular o limite Deduzir o modelo matemático Refinar o modelo matemático deduzido
Interpretação dos resultados	Representar graficamente o modelo matemático Determinar em que momento chega a 100% Usar software Obter uma solução para o problema Calcular derivada Usar regra do quociente
Validação	Usar o Excel Identificar o intervalo em que a solução se encontra

Fonte: Os autores.

5.2 Segunda turma

Na segunda turma (T2), a professora solicitou aos alunos que em grupos estudassem o fenômeno resfriamento/aquecimento de um corpo ou ambiente. Para isso, os alunos teriam de definir o corpo ou ambiente que estudariam, bem como se o fenômeno seria de aquecimento ou resfriamento. Diferentemente da primeira turma, a intenção da professora com a proposta da atividade foi a de que os alunos escolhessem uma situação para ser investigada. De certa forma, uma ação primeira seria mobilizar a criatividade dos alunos de forma que esses fossem capazes de agir de forma conjunta para a coleta de dados.

O grupo escolhido para descrição e análise do desenvolvimento da atividade coletou dados referentes ao aquecimento e ao resfriamento do interior de um veículo.

Os dados relativos ao aquecimento foram coletados por meio de um termômetro digital de ambiente que permaneceu no interior do veículo todo fechado e exposto ao sol no período das 11h30 até as 11h55 (Figura 4). Já os dados relativos ao resfriamento foram coletados no período das 13h00 as 13h20 com o veículo todo fechado sob a sombra de uma árvore (Figura 5). A temperatura em ambas as situações foi anotada de 5 em 5 minutos.

Figura 4 - Coleta de dados do aquecimento do veículo

Fonte: Os autores.

Figura 5: Coleta de dados do resfriamento do veículo

TEMPO	GRAUS °C
0	63
5	58
10	55
15	52
20	52
25	52

Fonte: Os autores.

Na sala de aula, o grupo passou por um impasse para escolher que dados utilizariam para desenvolver a atividade e, com isso, definir o problema a ser estudado, conforme transcrição da conversa com a professora:

> Beto: Professora, o negócio é o seguinte, a gente marcou a temperatura de aquecimento do carro que a gente deixou todo trancado na frente da casa do Carlos. Marcamos duas vezes, uma com o termômetro digital que ficou o melhor e outra com o termômetro normal.
> Hugo: Mas também fizemos a marcação do resfriamento do carro, fala disso também Beto, depois de tudo. Mas acho que é mais interessante estudar o resfriamento [...]
> Professora: Bom vocês têm dados suficientes para desenvolver a atividade. Em grupo, devem decidir se estudam o resfriamento ou aquecimento.
> Hugo: O Carlos até colocou os pontos de aquecimento no curve lá [...]
> Carlos: O Hugo tem razão, vamos estudar o resfriamento e considerar a temperatura ambiente de trinta e poucos lá.

A inteiração para o desenvolvimento da atividade ocorreu por meio da coleta de dados para dois fenômenos dos quais os alunos teriam de escolher qual abordar naquele momento. O grupo, com a análise dos comportamentos dos fenômenos, representados pelo software, decide estudar o resfriamento do carro que se encontrava à temperatura de 63 ^{0}C quando colocado, com os vidros fechados, sob a sombra de uma árvore. O grupo opta por determinar após quanto tempo sob a sombra a temperatura interna do carro se igualaria à temperatura ambiente, que no momento da coleta era de 33,2 ^{0}C.

A matematização foi subsidiada pela representação gráfica dos pontos no plano cartesiano, que de certa forma permeou a inteiração, corroborando com as afirmações de Almeida *et al.* (2012) de que as fases da modelagem não ocorrem de forma linear, com idas e vindas, uma vez que foi por meio das representações gráficas que os alunos optaram por estudar o resfriamento do interior do veículo.

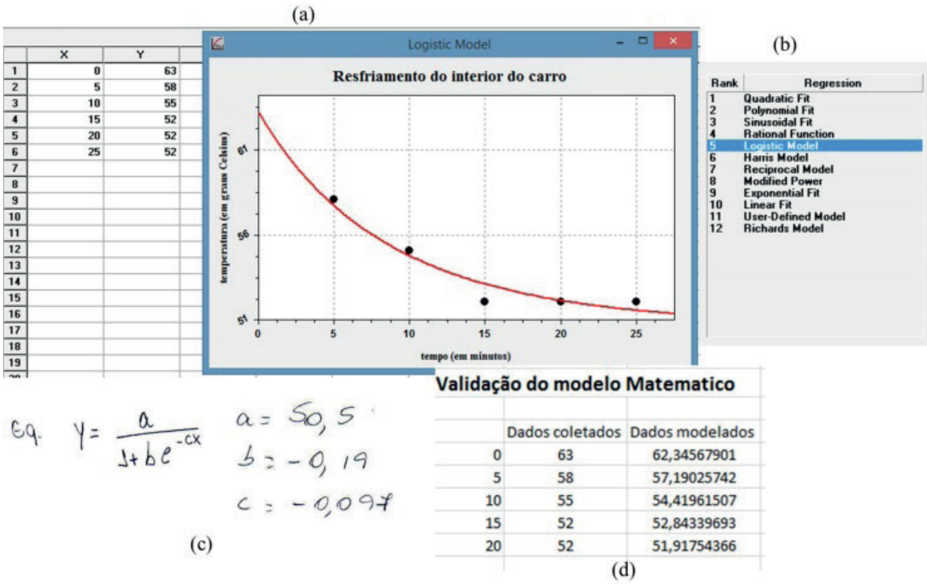
Diante das representações geradas pelo software Curve Expert, como destacado por Hugo (*O Carlos até colocou os pontos de aquecimento no curve lá*), os alunos ficaram em um dilema para identificar a função que melhor representava a situação. O dilema se configurou enquanto um impasse para o desenvolvimento de ações voltadas para o objetivo da atividade. O que se evidencia é que os alunos não estavam compreendendo o direcionamento da atividade. Segundo Leontiev (1978), para entender uma ação, é preciso compreender o motivo por trás da atividade na qual está inserida. O diálogo entre Carlos e Elias reforçam a falta de compreensão:

> Carlos: Eu acho que agora é escolher a curva. [...]
> Carlos: Eu estava olhando as funções aqui e acho que essa curva aqui logística é a melhor.
> Elias: Por que você acha isso Carlos?
> Carlos: Porque ela é como fala mesmo, tende a um valor... Assintótica. E lembro que já usamos essa curva naquela outra situação.

A resolução com vistas à dedução de um modelo matemático é permeada por analogias feitas por um dos integrantes a uma situação anterior que desenvolveram em sala de aula. Para isso, consideraram o modelo logístico $Y(x)=\frac{50,5}{1-0,19.e^{-0,097.x}}$, em que Y representa a temperatura no interior do veículo (em ^{0}C) em função do tempo x, em minutos (Figura 6). No entanto, procedimentos matemáticos não foram considerados com vistas a evidenciar se de fato tal modelo representa a situação. Os alunos levaram em consideração o comportamento assintótico da função e nem se deram conta de que a assíntota Y(x) = 50,5 era superior ao valor que se propuseram a obter com o problema 33,2 ^{0}C.

Mesmo assim, de posse de um modelo matemático, o grupo apresenta a validação dos dados por meio da comparação dos resultados calculados pelo modelo matemático deduzido com os dados coletados empiricamente com o uso do Excel (item (d) da Figura 6).

Figura 6 - Modelo matemático que representa a situação e sua validação



	Dados coletados	Dados modelados
0	63	62,34567901
5	58	57,19025742
10	55	54,41961507
15	52	52,84339693
20	52	51,91754366

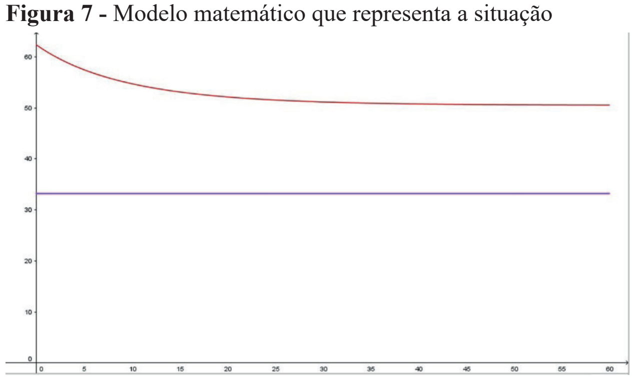
Fonte: Relatório dos alunos.

O que fica evidente é que as operações pertencentes a um dos três níveis de funcionamento da atividade humana como destacado por Leontiev não foi acionado para estabelecer relações com os níveis relativos à atividade propriamente dita e as ações. Todavia, o acionamento desse nível ocorreria em algum momento da atividade, visto que se faz necessário para que ela se finalize. As ações que conduziriam a identificação da necessidade de realizar operações ficam evidentes quando os alunos se encaminham para a obtenção de uma solução para o problema, conforme transcrição da conversa:

> Carlos: Pessoal, olhem que esse modelo ficou bom para a situação não é mesmo?
> Elias: Eu concordo!
> Beto: Será que era isso que a professora queria?
> Hugo: Deve ser sim, temos o modelo do resfriamento, agora quando vai ser igual à temperatura ambiente? Como fazer isso?
> Beto: Espera, vou perguntar para a professora.
> Alice: Gente é só substituir o Y por trinta e três vírgula dois.
> Beto: Isso Alice. Você resolve aí?
> Carlos: Enquanto isso, vou usar o GeoGebra aqui, porque todos os outros grupos estão fazendo o gráfico no GeoGebra e também colocar esse valor da temperatura para ver onde é a intersecção. Daí comparamos Alice.
> Alice: Beleza, deixa comigo.

Enquanto Alice resolve algebricamente o problema realizando os cálculos para $Y = 33,2$, Carlos faz a representação gráfica da função que representa o resfriamento do carro, além de inserir a função $Y = 33,2$ por meio do software GeoGebra (Figura 7).

Figura 7 - Modelo matemático que representa a situação



Fonte: Relatório dos alunos.

Antes mesmo que Alice finalizasse os cálculos algébricos, Carlos interrompe fazendo o comentário:

> Carlos: Gente, essa função nunca vai ser trinta e três vírgula dois! Olhem aqui o gráfico.
> Beto: Professora, chega aqui!

> Carlos: O nosso problema não tem solução.
> Professora: Como não tem solução?
> Carlos: Não tem como a temperatura do carro se igualar com a do ambiente!
> Professora: E por quê?
> Beto: Boa pergunta. [risos]
> Professora: Essa função representa a situação?
> Beto: Claro, fizemos a validação e tudo!
> Professora: Sei, mas o que acontece com a função que vocês escolheram quando o tempo aumenta?
> Beto: Como assim? Não sei.
> Professora: Se vocês fizerem uma análise do tempo quando esse tende ao infinito.
> Carlos: Bom... só se a gente calcular o limite. É, é, deixa eu lembrar [folheando o caderno e procurando registros anteriores] [...] nossa cinquenta vírgula cinco. Nunca vai dar a temperatura ambiente.
> Professora: E por que vocês escolheram essa curva?
> Beto: Era a melhor?
> Hugo: Melhor nada, não responde o problema. E agora?
> Professora: Sugiro que vocês analisem as outras curvas!

Embora o modelo matemático se ajuste aos dados coletados empiricamente, não possibilita descrever a situação por meio de uma previsão do comportamento do fenômeno. Isso impossibilitou responder o problema que os alunos estavam investigando na sala de aula. A professora percebendo a perda de interesse dos alunos, propôs que retomassem a matematização da situação, analisando as outras curvas listadas pelo software. Essa ação teria como objetivo motivar outras ações para orientar a atividade em desenvolvimento, corroborando com as assertivas de Leontiev (1978) de que para além das ações físicas, no desenvolvimento de uma atividade, se faz presente ações psíquicas conscientemente controladas. A professora por meio de ações externas tentou mobilizar ações internas nos alunos.

Em sala de aula, mesmo que o grupo tenha empreendido um esforço para analisar as curvas ajustadas, não abordaram outra para responder o problema. No entanto, solicitou à professora que os atendessem em encontro extraclasse, pois tinham a intenção de finalizar a atividade. Para o encontro, os alunos já haviam realizado algumas considerações, conforme consta na transcrição:

> Beto: A gente estudou e estudou esses dados no final de semana e mesmo que a gente quisesse não iria chegar à temperatura ambiente. A gente sabe que não é a realidade. Achamos que foram problemas de coleta de dados, então a gente mudou. Mudamos tudo. Usamos o aquecimento!
> Professora: E o que fizeram?
> Hugo: Fizemos as mesmas coisas que fizemos em sala, colocamos no software, fizemos as curvas, mas antes de determinar qual representava a situação calculamos o limite.
> Carlos: Porque a gente queria ficar livre dessa! [risos]
> Hugo: Isso mesmo, então a gente escolheu uma função exponencial para representar a situação. Vimos que o limite era de setenta e um vírgula alguma coisa e aí que fomos definir nosso problema. Mas a gente não descartou os dados do resfriamento não.
> Alice: Não mesmo. Até pensamos de coletar outros dados, mas o Carlos estava sem o termômetro.
> Carlos: Estava, mas daí a gente fez dois problemas, quando a temperatura seria de setenta e um graus e outro quando seria de sessenta e três que foi a temperatura inicial da outra coleta. Fizemos tudo usando os softwares, porque agora estamos craques! [risos].

Devido à falta de dados que viabilizassem a resolução do problema que em sala de aula o grupo estava trabalhando, decidiram usar outros dados e conduzir uma nova atividade de modelagem. Esses alunos tinham a intenção de resolver a atividade, mesmo que em momento a posteriori. Para tanto, adequaram o problema a uma nova situação do qual tinham dados em mãos.

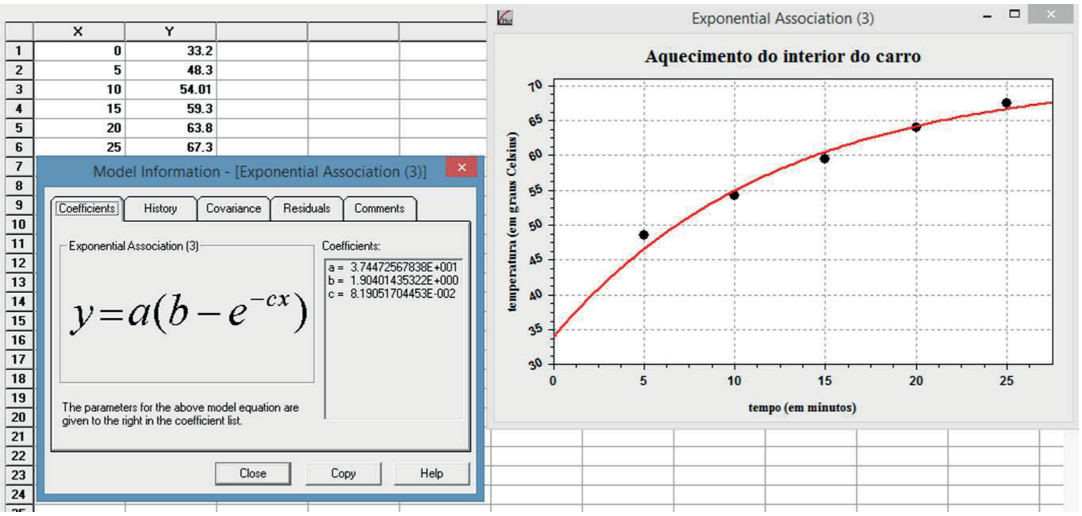
Os procedimentos para o desenvolvimento da atividade, no entanto, foram configurados de maneira que a matematização e resolução anteciparam a definição do problema que, de certa forma, levou em consideração abordagens já mediadas pela situação não finalizada em sala de aula. Para Stillman, Brown, e Geiger (2015), a antecipação de resultados envolve pressupostos e *feedbacks* entre as fases para auxiliar na tomada de decisão e, no caso da atividade em desenvolvimento, na realização de ações para definir o problema a ser estudado. Como os alunos já conheciam a situação, o *feedback* foi subsidiado pelo encaminhamento que ocorreu em sala de aula

A matematização foi realizada por meio do software Curve Expert (Figura 8) e dentre as curvas ajustadas aos pontos no plano cartesiano, o grupo escolheu a do tipo exponencial: $y = 37{,}45 \,.\left(1{,}9 - e^{-0{,}082x}\right)$, em que y representa a temperatura no interior do veículo (em ^{0}C) em função do tempo x, em minutos. Essa ação, a de fazer uso do software para subsidiar uma antecipação corrobora com as assertivas de Stillman, Brown, e Geiger (2015, p. 96) de que "a matematização ideal ocorre da relação entre o modelador, a modelagem e a tecnologia".

Os alunos fazem uso da tecnologia para auxiliar na dedução de um modelo matemático que representasse a situação e não somente se ajustasse aos dados coletados, como haviam feito em sala de aula. O "novo" contato tanto com a situação quanto com os dados aproximaram os alunos (modeladores) da modelagem que estavam desenvolvendo.

A curva ajustada tanto aos dados quanto à situação em estudo foi interpretada e validada quando os alunos calcularam o limite: $\lim_{x\to\infty} 37{,}45 \,.\left(1{,}9 - e^{-0{,}082x}\right) = 71{,}155$.

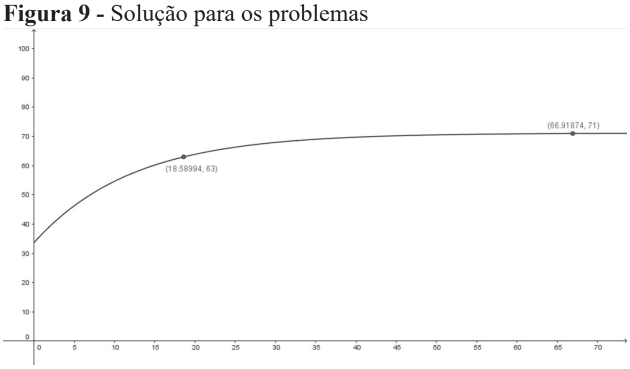
Figura 8 - Matematização e resolução da atividade sobre o aquecimento do interior do carro



Fonte: Relatório dos alunos.

Defronte dessas análises, o grupo define dois problemas a serem respondidos: *quando a temperatura seria de setenta e um graus e outro quando seria de sessenta e três* (comentário de Carlos). Para isso, fizeram uso do software GeoGebra, conforme afirmado por Carlos (*Fizemos tudo usando os softwares* [...]) e no relatório entregue pelos alunos (Figura 9). Por meio do software concluíram que no tempo aproximado x igual a 66,92 minutos, a temperatura seria de 71 ^{0}C e que em aproximadamente 18,59 minutos, a temperatura seria de 63 ^{0}C.

Figura 9 - Solução para os problemas



Fonte: Relatório dos alunos.

O desenvolvimento da atividade de modelagem matemática pelo grupo analisado da segunda turma pode ser sintetizado em duas partes: com dois níveis de funcionamento e com três níveis de funcionamento. Quando os alunos empreendem esforços para agir de forma a articular a atividade com ações e operações práticas atingem o objetivo da atividade. Para tanto, a intervenção da professora solicitando outro encaminhamento para a atividade mobilizou ações psíquicas que permitiu uma reestruturação da atividade estabelecendo outro sistema de ações.

Considerando os encaminhamentos em sala de aula e em momento extraclasse para o desenvolvimento da atividade pelo grupo da segunda turma investigada, segundo as fases da modelagem, as tarefas que emergiram para o estudo do resfriamento e, posteriormente, do aquecimento foram codificadas conforme apresentado no Quadro 3. Para diferenciar as tarefas propostas e conduzidas, utilizamos itálico para aquelas que emergiram extraclasse.

Quadro 3 - Codificação inicial das tarefas que emergiram na T2

Fase da modelagem matemática	**Codificação inicial das tarefas que emergiram**
Inteiração	Fazer coleta de dados para dois fenômenos Escolher o fenômeno a ser estudado Analisar o comportamento do fenômeno Definir o problema *Analisar dados* *Abandonar escolha anterior* *Trocar situação* *Definir problemas*
Matematização	Usar software Representar graficamente o fenômeno Analisar curvas *Usar software* *Representar dados graficamente*
Resolução	Escolher curva Fazer uso de analogias com outras situações Deduzir modelo matemático *Calcular limite* *Escolher função que representava a situação* *Usar software*
Interpretação dos resultados	Realizar cálculos algébricos Usar software Satisfazer o que a professora queria Representar graficamente o modelo com a situação Calcular o limite Analisar curvas *Calcular limite* *Usar software* *Responder problemas*
Validação	Comparar valores por meio do Excel *Calcular limite*

Fonte: Os autores.

5.3 Terceira turma

Para desenvolver a atividade de modelagem matemática na terceira turma (T3), a professora pediu para os alunos analisarem livros didáticos de Química do Ensino Médio e verificassem que assuntos poderiam ser trabalhados via conteúdos matemáticos. Com essa proposta, podemos evidenciar que as ações da professora com relação à primeira e à segunda turma se diferem. Uma ação primeira dos alunos seria identificar, em conjunto, um tema em que pudessem utilizar procedimentos matemáticos. Em sala de aula, diante das diferentes propostas elencadas, a escolhida pelos alunos foi o fenômeno *ebulioscopia* – estudo da temperatura de ebulição de uma solução de acordo com a quantidade de soluto não volátil.

Em grupos, os alunos teriam de escolher o soluto não volátil e o solvente e realizar os procedimentos de coleta de dados. O grupo que analisamos escolheu o nitrato de amônia (soluto) e água (solvente). Para isso, coletaram dados no laboratório de Química da instituição com o auxílio da aluna de Iniciação Científica.

Na proposta da atividade, um sistema de ações envolvendo outras pessoas para além da professora e alunos da turma foi necessário com a intenção de se desenvolver a atividade, como a manipulação de equipamentos para a execução de um experimento.

Na coleta de dados os alunos realizaram a análise de seis amostras. Para isso, fixaram a quantidade de água a ser utilizada (100 mL) e misturaram diferentes quantidades de nitrato de amônia (2g, 4g, 6g, 8g e 10g). Cada mistura foi aquecida sobre um aquecedor magnético pré-aquecido a 300 ^{0}C até entrar em ebulição, momento em que os alunos mediram a temperatura com termômetro digital tipo espeto (Figura 10) e o tempo de ebulição com o cronômetro.

Figura 10 - Coleta de dados no estudo da ebulioscopia

Fonte: Relatório dos alunos.

Na coleta de dados, o grupo considerou a quantidade de soluto, a temperatura de ebulição da solução e o tempo em que a solução entrou em ebulição. No contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, o grupo vislumbrou a necessidade de escolher as variáveis que deveria considerar para estudar a situação-problema. Tal escolha permearia o problema a ser estudado conforme transcrição:

> Professora: Com os dados que vocês coletaram, proponham um problema, uma pergunta para responder.
> Diego: O que vamos considerar, meninas?
> Valéria: Tem que olhar os dados aqui né?
> Fátima: Bom, podemos ver que o tempo ficou estranho na nossa coleta. Primeiro foi cinquenta e nove, depois oitenta, depois quarenta, nove, oito e doze. Que coisa...
> Helena: Eu acho que a placa aquecedora teve interferência. O tempo pode ter sido influenciado, sei lá, em cada coleta a gente pode ter mexido lá!
> Diego: Mas a gente não precisa levar em consideração essa variável. Lembram no livro, não tinha tempo!
> Fátima: Mas também quantidade de soluto e a temperatura não seguiram um padrão esperado.
> Diego: Mas o que seria esperado?
> Fátima: Aumentar soluto, diminuir temperatura. Sei lá, aqui sobe e desce.
> Helena: Mas tem funções que podem se ajustar a essa oscilação. [...]
> Diego: Tá, mas o que estudar?
> [conversam sobre os dados que coletaram]
> Valéria: Eu acho que a gente poderia fechar na temperatura de acordo com a quantidade de soluto.
> Fátima: E se a gente fizesse uma expressão, uma função matemática para representar essa ebulioscopia?
> Diego: E desconsideramos a saturação, né?
> Helena: A gente pode desconsiderar.

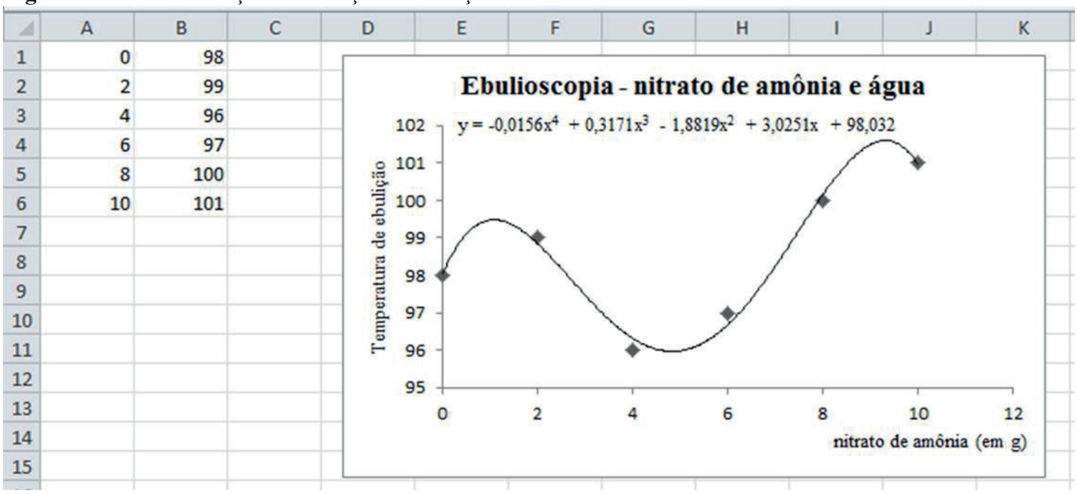
Para se inteirarem do que de fato estudariam, já com os dados coletados, os alunos escolheram as variáveis, fizeram algumas simplificações para definirem o problema: Que expressão matemática representa a ebulioscopia da solução de nitrato de amônia e água?. Para Borromeo Ferri (2006, p. 68), a simplificação é uma ação cognitiva realizada no desenvolvimento de uma atividade de modelagem para que “a representação mental da situação ou o modelo da situação resulte diretamente em um modelo real”, aquele que pode ser matematizado no contexto em que os alunos estão inseridos. Com isso, desconsiderar a saturação da solução é uma ação de simplificação para o estudo da situação-problema. Tal ação cognitiva delineia uma intenção dos alunos para o desenvolvimento da atividade e se configura enquanto uma ação psíquica conscientemente controlada (Leontiev, 1978). Apesar de conhecer o fenômeno, o grupo necessita configurar um modelo real para poderem matematizá-lo.

A matematização com o objetivo de obter uma função que pudesse representar os dados coletados – *Mas tem funções que podem se ajustar a essa oscilação* – foi subsidiada pelo software Excel, conforme diálogos entre os integrantes do grupo:

> Diego: Será que a gente pode utilizar o Excel?
> Helena: Acho que sim também, mas eu não sei mexer no computador.
> Diego: Olha aqui [explica os procedimentos de representação gráfica no Excel].
> Helena: E como ter a expressão? O Excel dá?
> Diego: Sim, só escolher aqui na curva de tendência. Vamos usar a polinomial? De qual grau? [fazem abordagens para diferentes graus]. A polinomial de quarto grau tem as oscilações. Podemos considerar o domínio da função.

A intimidade de um dos integrantes do grupo com o Excel possibilitou que na matematização esse software fosse utilizado pelos alunos, além de possibilitar que outros pudessem manipulá-lo e conhecer suas ferramentas. Considerando características da função polinomial de quarto grau, na fase de resolução, os alunos deduzem o modelo matemático $y = -0{,}0156x^4 + 0{,}3171x^3 - 1{,}8819x^2 + 3{,}0251x + 98{,}032$, em que y representa a temperatura (em ^{0}C) de ebulição da solução em função da quantidade x (em g) de soluto (Figura 11).

Figura 11 - Matematização e resolução da situação



Fonte: Relatório dos alunos.

Os alunos interpretam os resultados, levando em consideração a variação da temperatura em função da quantidade de soluto, realizam simulações com outros valores e calculam a derivada da função que representa a situação, conforme diálogo:

> Fátima: Olhando o gráfico ficou até que bonito nosso modelo. E tem aquela variação ali. Diego, se a gente quisesse simular o valor da temperatura para doze gramas de nitrato seria possível?
> Diego: Dá para calcular sim. Podemos substituir no x do modelo ou colocar doze aqui na célula do Excel e puxar os valores. Claro que tem que ver a saturação.
> Valéria: Mas com doze gramas não satura não. E depois a gente poderia retornar no laboratório e fazer o experimento novamente só para ver se funciona mesmo.
> Diego: Olhem aqui [apontando para a tela do computador] dá cento e três vírgula trinta e três.
> Helena: Gente, é muito legal esse negócio mesmo. Dá uma dor de cabeça, mas é animador. Nos livros não tem essa função escrita, tem só tabela e às vezes o gráfico.
> [...]
> Fátima: E agora Valéria, vamos mesmo calcular a derivada?
> Valéria: Eu acho que complementaria a situação é só usar a regra do tombo, opa quero dizer a regra da potência.
> Helena: E o que a derivada representa?
> Diego: A taxa de variação da temperatura de ebulição em função da quantidade de soluto da solução de água e nitrato de amônia.

Com a proposta de Fátima, fica evidente que as ações não se findam com a obtenção de uma solução para o problema. Para tanto, outras ações foram mobilizadas com o objetivo de que os alunos do grupo calculassem a derivada da função, remetendo a algumas propriedades como a regra da potência e à compreensão do que tal conceito representa no estudo. Com isso, os alunos obtêm a função derivada $y' = -0{,}0624x^3 + 0{,}9513x^2 - 3{,}7638x + 3{,}0251$ e a associa à taxa de variação da quantidade da temperatura de ebulição em função de nitrato de amônia.

Diante das ações que culminaram no desenvolvimento da atividade de modelagem com a terceira turma, pudemos identificar tarefas que emergem para o estudo da ebulioscopia da solução de água e nitrato de amônia, segundo as fases da modelagem. No Quadro 4 apresentamos uma codificação inicial das tarefas.

Quadro 4 - Codificação inicial das tarefas que emergiram na T3

Fase da Modelagem Matemática	Codificação Inicial das Tarefas que Emergiram
Inteiração	Pesquisar em livros didáticos de Química Identificar assuntos Escolher situação-problema Coletar dados no laboratório Simplificar situação Definir problema
Matematização	Escolher variáveis Representar graficamente o fenômeno por meio do Excel Manipular software Escolher função
Resolução	Analisar curva com a situação Deduzir modelo matemático
Interpretação dos Resultados	Usar software Analisar especificidades da situação representada na curva Fazer simulações no Excel Calcular derivada Interpretar o que a derivada representa na situação
Validação	Fazer uso do software Excel Propor retorno ao laboratório

Fonte: Os autores.

6 Codificação dos Dados: a Identificação de Tarefas em Atividades de Modelagem Matemática

O propósito de nossa pesquisa diz respeito à identificação de tarefas que emergem em aulas com modelagem matemática no ambiente educacional de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral em um curso de Licenciatura em Química. No desenvolvimento das atividades de modelagem em três turmas analisadas, seguindo diferentes encaminhamentos acionados pela professora, codificamos as tarefas que emergiram e as reapresentamos no Quadro 5 de forma a constituir um mapa da codificação inicial.

Quadro 5 - Codificação inicial das tarefas que emergiram nas três turmas

Fase da Modelagem Matemática	Codificação Inicial na T1	Codificação Inicial na T2	Codificação Inicial na T3
Inteiração	Fazer coleta de dados Escolher um conjunto de dados Analisar os dados Definir o problema	Fazer coleta de dados para dois fenômenos Escolher o fenômeno a ser estudado Analisar o comportamento do fenômeno Definir o problema Analisar dados Abandonar escolha anterior Trocar situação Definir problemas	Pesquisar em livros didáticos de Química Identificar assuntos Escolher situação-problema Coletar dados no laboratório Simplificar situação Definir problema
Matematização	Representar graficamente Usar o software Analisar o comportamento da função Definir hipóteses	Usar software Representar graficamente o fenômeno Analisar curvas Usar software Representar dados graficamente	Escolher variáveis Representar graficamente o fenômeno por meio do Excel Manipular software Escolher função
Resolução	Analisar cada função com a situação Calcular o limite Deduzir o modelo matemático Refinar o modelo matemático deduzido	Escolher curva Fazer uso de analogias com outras situações Deduzir modelo matemático Calcular limite Escolher função que representava a situação Usar software	Analisar curva com a situação Deduzir modelo matemático
Interpretação dos resultados	Representar graficamente o modelo matemático Determinar em que momento chega a 100% Usar software Obter uma solução para o problema Calcular derivada Usar regra do quociente	Realizar cálculos algébricos Usar software Satisfazer o que a professora queria Representar graficamente o modelo com a situação Calcular o limite Analisar curvas Calcular limite Usar software Responder problemas	Usar software Analisar especificidades da situação representada na curva Fazer simulações no Excel Calcular derivada Interpretar o que a derivada representa na situação
Validação	Usar o Excel Identificar o intervalo em que a solução se encontra	Comparar valores por meio do Excel Calcular limite	Fazer uso do software Excel Propor retorno ao laboratório

Fonte: Os autores.

Os códigos gerados para as tarefas que emergiram em cada uma das fases da modelagem se remetem a ações que os alunos tiveram em grupo ou orientados pela professora para desenvolver a atividade. Tais ações se constituíram em sistemas planejados, motivados por fins a serem alcançados, conforme salienta Leontiev e configura enquanto atividade humana uma atividade de modelagem matemática. Como é indicado na metodologia da Teoria Fundamentada, há a necessidade de reorganizar os conceitos que emergem dos códigos oriundos da codificação inicial e realizar a codificação axial. Com a codificação inicial das tarefas, pudemos evidenciar que algumas se fizeram presentes nas três turmas e outras surgiram de acordo com as especificidades da atividade.

Para a codificação axial, vamos reorganizar esses códigos com o objetivo de agrupá-los. Para tanto, consideramos as fases da modelagem e os três níveis de funcionamento da estrutura da atividade humana propostos por Leontiev (1978): a atividade, as ações e as operações.

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem caracterizada como de segundo momento de familiarização se inicia, de forma geral, com a coleta de dados a partir de uma situação pré-definida. No entanto, na T3, para a inteiração, duas ações foram anteriores à coleta de dados, *pesquisar em livros de Química* e escolher *situação-problema*. Tanto a pesquisa quanto a abordagem em sala de aula para definir o que de fato seria a situação-problema a ser investigada tiveram como objetivo *Escolher situação* que pode ser interpretado enquanto um conceito na codificação axial e foi realizado por meio de diferentes operações práticas.

Com a situação-problema identificada, o encaminhamento da atividade seria possível por meio da ação relacionada a *coletar dados*, que foi operacionalizada pelos alunos em ambiente externo à sala de aula: individualmente em casa (carregamento da bateria do telefone celular), em grupo na casa de um dos integrantes (temperatura no interior do veículo) ou no laboratório (ebulioscopia). Em sala de aula, todavia, levando em consideração os dados coletados, os alunos agiram de forma a *escolher dados ou fenômenos* que seriam utilizados na atividade. Os dados em mãos possibilitaram aos alunos realizarem operações procedimentais como *analisar o comportamento do fenômeno* de maneira que fosse possível *definir o(s) problema(s)* a ser estudado. Esse sistema de ações planejadas foram fundamentais motivar um fim a ser alcançado *Investigar e definir o estudo* de maneira que os alunos abandonaram alguns dados – o tempo na ebulioscopia – ou trocaram o fenômeno a ser estudado – aquecimento ao invés do resfriamento do veículo.

Uma ação presente na atividade de ebulioscopia foi a de simplificar a situação desconsiderando um fenômeno que poderia interferir em sua previsão: a saturação da solução. Todavia, os alunos mostraram que o conhecimento estava implícito e que possivelmente um retorno a campo seria necessário. Nesse sentido, o conceito *Simplificar situação* se fez presente.

Diante das considerações sobre a situação em estudo e do problema definido, a matematização foi caracterizada por diferentes sistemas de ações. A ação de *escolher variáveis* se fez presente quando a coleta de dados envolveu mais do que duas variáveis. No contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, os alunos optaram por trabalhar com uma função de uma variável. Com isso, especificamente na situação da ebulioscopia o conceito *Escolher variáveis* foi evidenciado.

Na matematização, além da escolha de variáveis, para cada situação em estudo, os grupos de alunos com o auxílio de softwares como Curve Expert e Excel necessitaram fazer uso de representação gráfica nas três turmas investigadas. Com isso, as diferentes ações propostas ou conduzidas puderam ser agrupadas em outros dois conceitos – *Representar situação graficamente* e *Manipular softwares*. O conceito *Representar situação graficamente* emergiu de tarefas relacionadas à representação gráfica dos pontos no plano cartesiano de cada fenômeno, à definição de hipóteses, à determinação da função, bem como na análise do comportamento da função. Quanto ao conceito *Manipular softwares*, as tarefas que se fizeram presentes foi o uso do software para construir as representações gráficas, bem como a aprendizagem na manipulação de softwares matemáticos.

O uso dos softwares auxiliou na tomada de decisão para a dedução do modelo matemático que representasse cada situação. Na fase de resolução, os alunos conduziram operações envolvendo procedimentos matemáticos como o cálculo de limites e derivadas os quais foram agrupados no conceito *Realizar procedimentos matemáticos*. Como a fase de resolução tem como objetivo *Deduzir modelo matemático* esse conceito foi subsidiado pelas tarefas em que os alunos fizeram analogias com atividades já desenvolvidas na sala de aula, bem como nos momentos em que escolheram a função que representava o comportamento dos dados, ambas com foco na obtenção do modelo matemático.

A interpretação dos resultados foi subsidiada pela análise do modelo matemático obtido com a situação em estudo. Para tanto, os alunos necessitaram analisar especificidades da situação. Quanto ao carregamento da bateria do telefone celular, por exemplo, o percentual de carregamento não passa de 100%, e essa abordagem ficou evidenciada nos ajustes que os alunos realizaram no domínio da função considerando duas sentenças para representar a situação. A visualização do comportamento da temperatura no interior do veículo foi mediada pela representação gráfica do modelo matemático no software GeoGebra. Essa ação mobilizou os alunos a mudarem o estudo que haviam iniciado na sala de aula. Para identificar a temperatura de ebulição de algumas soluções de água e nitrato de amônia os alunos realizaram simulações por meio do software Excel. Para além das atividades conduzidas por parte dos alunos, a professora propôs na atividade do carregamento da bateria do telefone celular o cálculo da derivada e sua interpretação na situação. Essas tarefas foram agrupadas no conceito *Interpretar matematicamente a situação*.

Segundo Almeida *et al.* (2012, p. 16) a fase "interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema", nesse sentido, o conceito *Responder problema* foi considerado nas ações em que os alunos obtiveram a solução para o problema, seja realizando cálculos algébricos ou com o uso de software.

A análise da solução para o problema consiste em um processo avaliativo no qual os alunos fizeram uso do software Excel e proposta de retorno ao laboratório. Essas ações, na fase de validação, fizeram emergir os conceitos *Realizar* cálculos e *Retornar a campo*.

As ações realizadas nas fases da modelagem enquanto um sistema planejado com o objetivo de se alcançar um fim e os três níveis de funcionamento foram evidenciados de tal forma que pudemos identificar tarefas que estruturam cada atividade desenvolvida. Essas tarefas foram reagrupadas formando conceitos na codificação axial e foram apresentadas no Quadro 6.

Quadro 6 - Codificação axial das tarefas

Fase da Modelagem Matemática	Agrupamentos	Conceitos
Inteiração	Pesquisar em livros didáticos de Química Identificar assuntos Escolher situação-problema	Escolher situação
	Coletar dados Escolher dados ou fenômenos Analisar comportamento do fenômeno Definir problema	Investigar e definir o estudo
	Simplificar situação	Simplificar situação
Matematização	Escolher variáveis	Escolher variáveis
	Representar graficamente o fenômeno Definir hipóteses Determinar função Analisar o comportamento da função	Representar situação graficamente
	Usar o software Manipular software	Manipular software
Resolução	Calcular limite Calcular derivada	Realizar procedimentos matemáticos
	Fazer uso de analogias Escolher função no Excel Obter modelo matemático	Deduzir modelo matemático
Interpretação dos Resultados	Analisar especificidades da situação Representar graficamente o modelo matemático Fazer simulações no Excel Calcular derivada Interpretar o que a derivada representa na situação	Interpretar matematicamente a situação
	Obter uma solução para o problema	Responder problema
Validação	Fazer uso do software Excel	Realizar cálculos
	Propor retorno ao laboratório	Retornar a campo

Fonte: Os autores.

Analisando a terceira coluna do Quadro 6, os conceitos que emergiram dos agrupamentos das tarefas que emergiram no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no curso de Licenciatura em Química nos conduzem a realizar uma codificação focalizada, como proposto na Teoria Fundamentada. Considerando as ações que fundamentam as tarefas pertencentes a tais conceitos e o fato de adotarmos a modelagem matemática enquanto uma alternativa pedagógica para ensinar matemática em um ambiente educacional de Cálculo Diferencial e Integral, três categorias podem emergir e estão relacionadas à situação, à matemática e à tecnologia.

Sobre a situação: Na escolha e investigação da situação, um sistema de ações planejadas que dizem respeito a conhecimentos químicos se fez necessário na coleta de dados empíricos, na análise do comportamento do fenômeno e na definição do problema. A simplificação, de forma geral, foi uma ação que se fez presente pela especificidade dos estudos de funções de uma variável real. Foi preciso considerar apenas o percentual de carregamento em função do tempo, sem analisar os fenômenos químicos que ocorrem com o carregamento da bateria ou mesmo o que acontece ao atingir 100% de carregamento; no resfriamento do carro considerou-se temperatura interna, interferências da temperatura ambiente foram desconsideradas; o fenômeno de ebulioscopia não levou em consideração a saturação da solução. Na definição do problema, de certa forma, os alunos necessitaram estabelecer relações com conteúdos matemáticos de forma que a atividade se desenvolvesse na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. Tarefas que emergiram do conhecimento da situação foram consideradas na dedução do modelo matemático e na obtenção de uma solução para o problema.

Sobre a matemática: Um sistema de ações planejadas e articuladas com operações se fizeram presentes na matematização, na resolução e na interpretação de resultados. De forma geral, os alunos fizeram uso de conhecimentos relativos a diferentes tipos de funções com as quais tiveram contato quando do uso de softwares como o Curve Expert, calcularam limites e derivadas para deduzir um modelo matemático ou mesmo complementar a situação em estudo. No entanto essas ações de ordem psíquica foram mobilizadas pela professora ou por algum integrante do grupo de forma a ativar conhecimentos já construídos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. As representações gráficas foram as que mais estiveram presentes para o desenvolvimento das atividades e os alunos necessitaram realizar interpretações dessas representações no contexto da situação em estudo.

Sobre tecnologia: Para o encaminhamento de transformação de linguagens – da situação para a matemática –, um sistema de ações articulado com conhecimentos tecnológicos foi fundamental para a dedução do modelo matemático e para a interpretação gráfica de funções. No desenvolvimento das atividades investigadas softwares como Excel, Curve Expert e GeoGebra se fizeram presentes e auxiliaram os alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, bem como na sua validação. De forma geral, os grupos investigados tinham familiaridade com os softwares e os utilizaram de forma intencional para agilizar os aspectos práticos da realização das ações orientadas por metas – finalizar a atividade de modelagem matemática.

Podemos evidenciar que a categorização emergente na codificação focalizada não apresenta uma delimitação entre as categorias, sendo que para agir sobre a situação tarefas relacionadas a conceitos matemáticos e tecnológicos se fizeram presentes, bem como agir sobre matemática tarefas relacionadas à situação e à tecnologia foram articuladas, assim como agir sobre tecnologia, tarefas relacionadas à situação e à matemática estiveram presentes.

Doravante o que podemos inferir com a investigação é que atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso no qual a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral é considerada de aplicação, possibilitam o envolvimento dos alunos com conteúdos matemáticos atrelados às situações próprias do contexto em que estão inseridos, e possibilitam o uso da tecnologia. Para tanto, diferentes tarefas emergem com o objetivo de atingir uma meta que consiste no desenvolvimento da atividade de modelagem.

Retomando a metáfora do jogo de futebol, os alunos – jogadores – podem ocupar diferentes posições para agirem em certas funções no contexto de uma atividade de modelagem matemática – campo – e empreender esforços nas diferentes fases – esquema tático – para obter uma solução para o problema – marcar o gol.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq, processo 457765/2014-3.

Referências

Almeida, L. M. W., & Ferruzzi, E. C. (2011). *A comunicação em atividades de Modelagem Matemática: uma relação com a teoria da atividade.* In: Conferência Interamericana de Educação Matemática.

Almeida, L. M. W., Silva, K. A. P., & Veronez, M. R. D. (2015). *Sobre a geração e a interpretação de signos em atividades de modelagem matemática*. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.

Almeida, L. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo: Contexto.

Almeida, L. M. W., & Tortola, E. (2014). Modelagem matemática no ensino fundamental: a linguagem de alunos como foco de análise. *JIEEM – Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática IJSME – International Journal for Studies in Mathematics Educatio*n, 7(1), p. 111-142.

Araújo, J. L., Campos, I. S. (2015). Negotiating the Use of mathematics in a mathematical modelling project. In: G. A., Stillman, W., Blum, W., & M.S., *Biembengut. Mathematical Modelling in Education Research and Practice: cultural, social and cognitive influences. ICTMA 16* (pp.283-291). New York: Springer.

Ärlebäck, J. B., & Doerr, H. M. (2015). Moving beyond a single modelling activity. In: Mathematical Modelling in Education Research and Practice. New York, p.293-303.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.

Barroso, N. M. C., Soares, J. M., Barroso, G. C., Mota, J. C. M., Borges Neto, H. (2013). Modelagem de conceitos e processos matemáticos por redes de petri coloridas: o caso da integrabilidade de funções reais. *Bolema*, 27(45), p. 75-95.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik – ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), p. 86-95.

Blomhøj, M., & Kjeldsen, T. H. (2011). Students' reflections in Mathematical Modelling Projects. In: G., Kaiser. *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: international perspectives on the teaching and learning of mathematical modeling*. ICTMA 14. (pp.385-395) New York: Springer.

Borssoi, A. H., Silva, K. A. P. & Ferruzzi, E. C. (2016). T*arefas desencadeadas em aulas com modelagem matemática.* In: Encontro Nacional de Educação Matemática, São Paulo. p. 1-12.

Charmaz, K. (2009). *A construção da teoria fundamentada: guia prático para análise qualitativa*. Porto Alegre: Artmed.

Fecchio, R. (2010). A modelagem matemática como recurso didático em projetos interdisciplinares. *Unión: Revista Iberoamericanade Educación Matemática,* (22), p. 133-145.

Ferruzzi, E. C. & Almeida, L. M. W. (2015). Diálogos em modelagem matemática. Ciência & Educação, 21(2), p. 377-394.

Greefrath, G. (2015). Problem Solving Methods for Mathematical Modelling. In: G. A., Stillman, W. & Blum, M. S. Biembengut. Mathematical modelling in education research and practice: cultural, social and cognitive influences. (pp.173-183). Cham, Switzerland: Springer.

Igliori, S. B. C., Beltrão, M. E. P. (2015). Ensino de cálculo pela modelagem matemática e aplicações em um curso superior tecnológico. *Unión: Revista Iberoamericanade Educación Matemática*, (42), p. 55-76.

Leontiev, A. N. (1978). O desenvolvimento do psiquismo. Lisboa: Horizonte Universitário, 1978.

Oliveira, C., & Oliveira, H. (2014). Modelação matemática no ensino profissional: as tarefas e o conhecimento extra-matemático. In: J. P. Ponte. *Práticas profissionais dos Professores de matemática* (pp.57-77). Lisboa: Instituto de Educação.

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: J. P., Ponte. *Práticas profissionais dos professores de matemática* (pp.13-30). Lisboa: Instituto de Educação.

Sekerák, J. (2010). Phases of mathematical modelling and competence of high school students. *The Teaching of Mathematics*, 2, p. 105-112.

Silva, K. A. P., Almeida, L. M. W., & Gerôlomo, A. M. L. (2011). "Aprendendo" a fazer modelagem matemática: a vez do aluno. *Educação Matemática em Revista*, 1, p. 28-36.

Soares, D. S., Borba, M. C. (2012). *O interesse de alunos de biologia pela análise de um fenômeno biológico e seu modelo matemático*. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Petrópolis, p. 1-18.

Stillman, G., Brown, J., & Galbraith, P. (2010). Identifying challenges within transition phases of mathematical modeling activities at year 9. In: R., Lesh, P. L., Galbraith, C. R., Haines, & A., *Hurford. Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp.385-398). New York: Springer.

Stillman, G. A., Brown, J. P., & Geiger, V. (2015). Facilitating mathematisation in modelling by beginning modellers in secondary school. In: G. A., Stillman, W., Blum, & M. S. Biembengut. *Mathematical modelling in education research and practice: cultural, social and cognitive influences* (pp.93-104). Cham, Switzerland: Springer.

Trevisan, A. L.; Borssoi, A. H.; Elias, H. R. D*elineamento de uma Sequência de Tarefas para um Ambiente Educacional de Cálculo.* In: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. Anais do VI SIPEM. Brasília: SBEM, v. único. p. 1-12, 2015.

Troncon, L. E. A. (2014). Ambiente educacional. *Revista Medicina*, 47(3), p. 264-271.

Ustra, M. K., & Ustra, S. R. V. (2015). Context categories in mathematical modelling in fundamentals of calculus teaching. In: G.A., Stillman, W., Blum, & M. S. Biembengut. *Mathematical modelling in education research and practice: cultural, social and cognitive influences*. ICTMA 16. (pp.407-416). New York: Springer.