DOI: http://dx.doi.org/10.17921/2176-5634.2018v11n2p104-110

A Hipótese dos Experimentos Mentais na Construção de Conceitos em Matemática

The Hypothesis of Thought Experiments in the Construction of Concepts in Mathematics

Willian José da Cruz[ab*]

[a]Instituto Federal do Sul de Minas Gerais. MG, Brasil.
[b]Universidade Federal de Juiz de Fora. MG, Brasil.
[*]E-mail: willian.cruz@ifsuldeminas.edu.br
Submetido em: fev. 2018; Aceito em: mar. 2018

Resumo

Este artigo tem a intenção de apresentar a hipótese dos experimentos mentais e suas caracterizações, com a pretensão de justificar ainda mais o interesse em atividades de investigação matemática, por meio dos experimentos mentais, e das bases semióticas da matemática. Parte desse trabalho foi resultado de uma pesquisa teórica desenvolvida no âmbito do programa de doutorado em Educação Matemática, pela Universidade Anhanguera de São Paulo, e teve como objetivo construir e analisar as características dos experimentos mentais na matemática e suas consequências no âmbito da Educação Matemática. Buscou-se também uma analogia entre os experimentos mentais e as provas matemáticas formais. Experimentos mentais são formas que o sujeito tem de colocar seus próprios pensamentos, dentro de um contexto previamente considerado, como objetos de considerações numa dada atividade e/ou problema, por meio de representações. Esses pensamentos são considerados abdutivos, ou seja, implicam generalizações na Matemática e exige uma teoria de experimentação e de análise. Buscar-se-á nesse texto esclarecer, com a construção de um cálculo de segmentos, quais aspectos se julgam importantes na dinâmica de considerar os experimentos mentais na construção do pensamento matemático, sem desconsiderar a importância de provas matemáticas formais.

Palavras-chave: Experimentos Mentais. Semiótica. Intuição. Pensamento Abdutivo.

Abstract

This text intends to present the theory of thought experiments and their characterizations, with the aim of further justifying the interest in mathematical research activities, by means of thought experiments, and the semiotic bases of mathematics. Part of this work was the result of a theoretical research developed within the PhD Program in Mathematical Education, by the Anhanguera University of São Paulo, and had the objective of constructing and analyzing the characteristics of thought experiments in mathematics and its consequences in Mathematical Education. An analogy was also sought between mental experiments and formal mathematical proofs. Thought experiments are forms that the subject has to put his own thinking, within a previously considered context, as objects of considerations in a given activity and / or problem, by means of representations. These thinking are considered abductive, that is, they imply generalizations in Mathematics and require a theory of experimentation and analysis. It will be sought in this text to clarify, with the construction of a segment calculus, which aspects are considered important in the dynamics of considering the thought experiments in the construction of mathematical thinking, without disregard the importance of formal mathematical proofs.

Keywords: *Thought Experiments. Semiotics. Intuition. Thinking Abductive.*

1 Introdução

A percepção de que o homem é essencialmente um "ser simbólico" substituiu gradualmente, no século passado, a caracterização aristotélica tradicional do homem como um "animal racional". Ernst Cassirer (1874 - 1945), em particular, argumenta que o homem (como ele mesmo disse em seu livro publicado em 1994, *Ensaio sobre o Homem)* é um "animal simbólico" e atribui essa percepção à então filosofia de Kant.

Cassirer escreve:

> O homem descobriu, por assim dizer, um novo método para adaptar-se ao seu ambiente. Entre o sistema receptor e o efetuador que são encontrados em todas as espécies animais, observamos no homem um terceiro elo que podemos descrever como o sistema simbólico. Essa nova aquisição transforma o conjunto da vida humana. Comparando aos outros animais, o homem não vive apenas em uma realidade mais ampla; vive, pode-se dizer, em uma nova dimensão da realidade. Todavia, não existe remédio para essa inversão da ordem natural. O homem não pode fugir à sua própria realização. Não pode senão adotar as condições de sua própria vida. Não estando mais num universo meramente físico, o homem vive em um universo simbólico (Cassirer, 1994).

A linguagem, o mito, a arte e a religião são partes desse universo simbólico como afirma Cassirer. Todo progresso humano em pensamento e experiências é refinado por essa rede simbólica que pode ser chamada de experiência humana.

Parece bastante óbvio que tal perspectiva tenha a maior importância para a cognição matemática, bem como para educação matemática. No entanto, até agora pouca pesquisa tem sido feita sobre os fundamentos semióticos da epistemologia matemática e da cognição.

As pesquisas sobre os fundamentos semióticos da epistemologia matemática e da cognição podem incidir sobre a ideia de que signos ajudam a compreender melhor a existência de distintas caracterizações da matemática, representando os aspectos complementares do pensamento matemático. Os signos, segundo Cruz (2015, p. 166), podem ser usados tanto referencialmente (ícones), quanto atributivamente (índices), isto é, são usados para determinar ou indicar coisas que o sujeito pensa.

Especialmente os índices que ocorrem na matemática, referem-se a entidades ou objetos que pertencem a um modelo, isto é, indicam objetos em universos semânticos construídos. Particularmente, pode-se afirmar que a indexação torna inevitável a abordagem semiótica na matemática, por mostrar que o raciocínio matemático é contextual como qualquer outro raciocínio.

As seguintes reflexões foram desenvolvidas no âmbito do curso de doutorado em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo e pretendem justificar ainda mais o interesse em atividades de investigação matemática por meio dos experimentos mentais e das bases semióticas da matemática.

2 Porque Experimentos Mentais na Matemática?

A convicção de que todo pensamento acontece por meio de signos, justifica a abordagem semiótica do pensamento, do ensino e da aprendizagem.

Segundo Otte (2012), as coisas no mundo são essencialmente de dois tipos: objetos e símbolos. Os objetos possuem existência bem determinada, mas não têm sentido, enquanto que os símbolos (signos) têm sentido, mas não têm existência própria. Ambos têm importância para o pensamento, pois não existe uma relação de dependência fixa entre estes dois tipos de coisas.

Semiótica é a ciência que trata basicamente de como os signos de todos os tipos se relacionam com os seus objetos ou com outros signos. Charles Sanders Peirce e Ferdinad de Sausurre são considerados os pais da semiótica. Nesse texto, colocar-se-á os direcionamentos na semiótica sob a perspectiva de Peirce.

Peirce desenvolveu uma teoria de sinais quase ao mesmo tempo em que Saussure. Ele chamou sua teoria de *Semeiotics.* Para Peirce, o signo é uma relação de representação, ou seja, o sinal media a relação entre os objetos e o interpretante. Ele oferece uma tríade e distingue entre os sinais: o *representâmen,* o sinal; o *interpretante,* o sentido ou significado feito pelo sinal, seja imediato (o significado *é* o sinal), dinâmico (o significado é um efeito) ou final (sentido normativo / ideal); *e o objeto,* representado pelo sinal, seja imediato (o objeto é representado no sinal) ou dinâmico (o objeto real) (Brent, 1998).

A comunicação matemática ocorre por meio de provas formais. Mas há nesse fato um paradoxo das provas. Esse paradoxo se justifica pela compreensão de que a Matemática não é um jogo mecânico ou um jogo de xadrez, pois sempre levar à construção de generalizações, ou seja, partindo de uma proposição particular como, por exemplo, *"esta pedra cai*", para chegar a uma proposição mais geral, isto é, *"se x é uma pedra então irá cair*", tem-se que acreditar na realidade das relações, nas leis da natureza, nos universais, nas ideias etc., tem de haver uma certa crença no platonismo.

Para generalizar, é necessário representar o impossível, o imaginário ou o irracional (no sentido de não existir na razão imediata), ou seja, é preciso ver o impossível, o insolúvel e o irracional como apenas relativo.

Por esse motivo, há a necessidade de generalização da perspectiva, mesmo dentro de uma prova, pois, se os argumentos da prova fossem totalmente reducionistas, como seria possível ganhar novos conhecimentos através da prova? Surge, então, a hipótese dos experimentos mentais tão frequentemente usados nas áreas empíricas e que poderiam ter um papel importante na Matemática.

Os experimentos mentais são conceituados como formas que o sujeito tem para colocar seu próprio pensamento, dentro de um determinado contexto, como objeto de consideração, por meio de uma representação, servindo a um duplo papel complementar: o primeiro, mostrando a coerência do próprio conceito do ponto de vista do conteúdo; e o segundo, permitindo uma melhor compreensão das possibilidades de aplicação de tal conceito.

Experimentos mentais são baseados num sistema de atividades supostas, no qual as coisas são implicitamente assumidas. Permite o uso da intuição, combinando em si, experiências e conhecimento. As provas são intuitivas não por motivos psicológicos, mas porque a intuição, de acordo com Kant (1997), é a única maneira de conhecer a realidade.

Os experimentos mentais seguem uma lógica de considerações heurísticas, com deduções estritamente lógicas e cálculos formais. Também revelam contradições no sistema de nosso conhecimento. Apresenta-se como um poderoso instrumento no aprimoramento e na compreensão sobre a natureza matemática, no entanto a situação imaginada deve possibilitar ao cientista, ou ao experimentador, aplicar seus conceitos do mesmo modo como aplicavam anteriormente, não procurando novos fatos, na visão de Kuhn (2011).

Mas também servem como fatos ou formas de estabelecer algum fenômeno, permitindo buscar algumas hipóteses para explicá-lo. Os experimentos mentais facultam ao cientista o acesso às informações que estão disponíveis para ele, porém não lhe são acessíveis, intensificando a crença na existência de objetos na Matemática e nas ciências em geral.

A importância de sua utilidade revela-se por ser uma reflexão à base de dados conhecidos, ajudando a resolver confusões no modo de pensar. As verdades são consideradas sintéticas, do ponto de vista de Kant (1997), e estão relacionadas ao desenvolvimento do raciocínio teoremático (ou diagramático), na concepção de Peirce, na busca de generalidade.

Peirce define raciocínio teoremático (ou diagramático) como um processo de três etapas: "(a) a construção de uma representação, (b) a experimentação dessa construção, e (c) a observação dos resultados" (Peirce CP, 3.363). (CP 4.41No entanto, a característica essencial do raciocínio teoremático que torna este método muito interessante, para a descrição das descobertas científicas, não se restringe a este processo de três passos, mas engloba todo o processo que tem de ser realizado por meios e dentro dos limites de um dado "sistema de representação" (Hoffmann, 2006).

O "sistema de representação" é caracterizado como um conjunto de convenções, cuja intenção é representar proposições e relações lógicas entre essas proposições, e um conjunto de regras para a transformação do diagrama.

O papel central do "sistema de representação" escolhido, se torna visível quando considera-se a sua função para cada uma das três etapas pelas quais o raciocínio teoremático é caracterizado. A consistência e a normatividade do "sistema de representação" são decisivas, quando se trata da possibilidade de descobertas. Portanto, esse sistema só pode ser determinado com base em uma análise de representações concretas do que ele é, e, em relação ao que ele supõe determinar (Hoffman, 2006).

3 O Uso de Variáveis Objetuais e o Cálculo de Segmentos

Na perspectiva dos experimentos mentais, a Matemática é compreendida como uma atividade, uma construção à base de possibilidades. Nessa construção, leva-se em conta o uso das variáveis objetuais (conceitos ou ideias), permeando novos conhecimentos.

Variáveis objetuais, também denominadas variáveis livres, são ideias gerais que não obedecem à lei da contradição (Cruz, 2015). Por exemplo, no mundo dos objetos, têm-se objetos gerais como maçã, homem, cachorro etc., mas que não traduzem algo específico na mente, pois, pode-se dizer, que há maçãs vermelhas, verdes, algumas maiores, outras menores; que há homens com barba, sem barba, careca, cabeludo; cachorro grande, pequeno, bravo, manso. As variáveis objetuais representam conceitos ou ideias e não objetos em si.

Apresenta-se aqui um exemplo do uso de variáveis objetuais, como retas e segmentos de retas na construção do cálculo de segmentos e um aspecto geral desse cálculo, fundamentando-se no teorema de Desargues.

As propriedades essenciais para o desenvolvimento do cálculo de segmentos dependem do contexto sobre o qual a atividade e os seus objetivos estão sendo conduzidos, isto é, dependem do "sistema de representação" escolhido (no caso o teorema de Desargues). Um conjunto de suposições e hipóteses será inicialmente identificado, como, por exemplo, a construção do segmento nulo e da unidade (pensamento abdutivo). Chega-se a construção do cálculo de segmentos, por meio de uma sequência de construções e análises (raciocínio teoremático – experimentos mentais). Segue o exemplo:

Tome duas retas fixas que se intersectam num ponto e calcule os segmentos de mesma origem em e cujas extremidades estejam sobre uma dessas retas fixas. O ponto será considerado como o segmento 0, simbolicamente:

ou

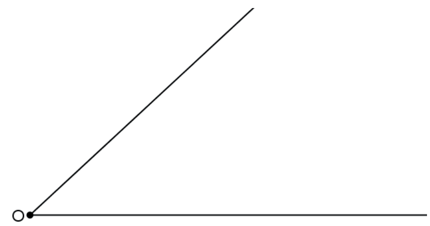

Figura 1

Sejam e pontos determinados sobre as retas fixas que se intersectam em , então, os dois segmentos e serão chamados de segmento 1, simbolicamente representados por:

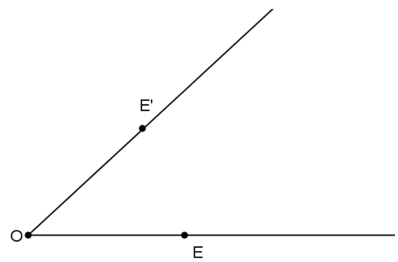

Figura 2

Ligando os pontos e , obtemos o segmento que pode ser denominado de *segmento-unidade.*

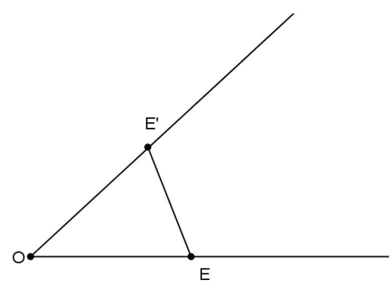

Figura 3

Dados os pontos e sobre as retas e respectivamente. Se o segmento que liga os pontos e for paralelo ao *segmento-unidade* pode-se dizer que e são iguais e simbolicamente representados por:

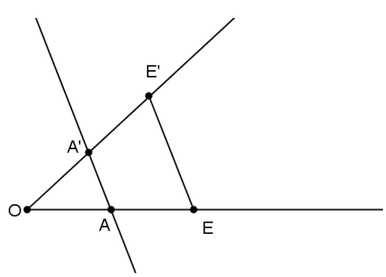

Figura 4

Dado um ponto sobre a reta . Fazendo e , determina-se a soma dos segmentos e por meio de contruções de retas paralelas.

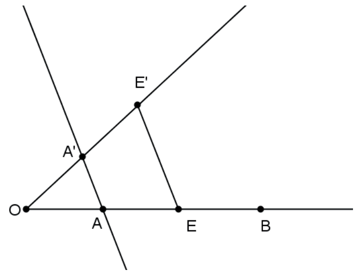

Figura 5

Seja paralelo ao *segmento-unidade* e conduza por uma paralela à reta :

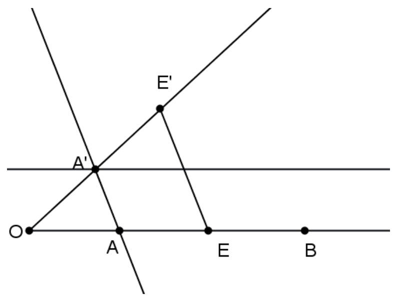

Figura 6

Agora, conduza por uma paralela à reta

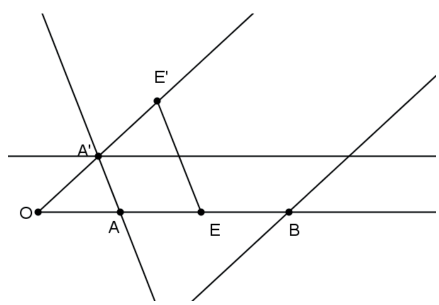

Figura 7

Essas retas paralelas se encontram num ponto denotado por

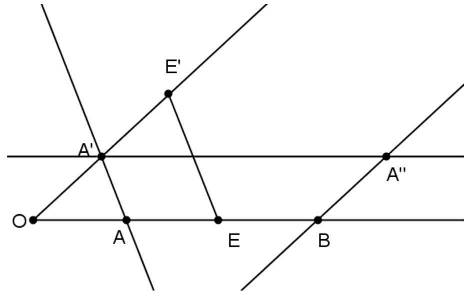

Figura 8

Finalmente, conduza por uma reta paralela ao *segmento-unidade* , encontrando na reta e na reta :

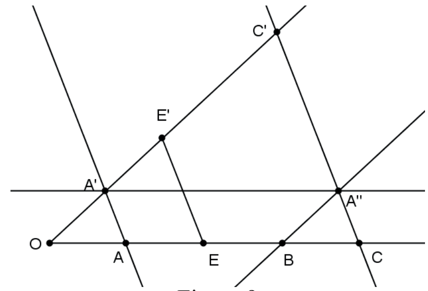

Figura 9

Considera-se que representa a soma dos segmentos e , logo, simbolicamente a soma de a com b pode ser representada por:

Sob a hipótese do teorema de Desargues, que diz:

> Quando dois triângulos estão num plano, de tal modo que cada dois lados correspondentes são paralelos entre si, então as retas de ligação dos vértices correspondentes passam por um mesmo ponto ou são paralelas entre si, e reciprocamente: Quando dois triângulos estão num plano, de tal modo que as retas que ligam os vértices correspondentes passam por um ponto ou são paralelas entre si, e quando, além disso, dois pares de lados correspondentes dos triângulos são paralelos, então os terceiros lados dos dois triângulos são também paralelos entre si. (Hilbert, 1862-1942).

Poder-se-á obter a soma de dois segmentos, de uma maneira mais geral. O ponto , que dá a soma , sobre aquela reta em que estão e , é independente da escolha do *segmento-unidade* , inicialmente fixado, ou seja, obtém o ponto por meio de construções, sem considerar o *segmento-unidade*.

Escolha-se sobre a reta um ponto qualquer , e por conduza-se por a paralela a e por a paralela a . Essas duas paralelas encontram-se no ponto . Agora, a paralela a , passando por encontra a reta no ponto C que dá a soma

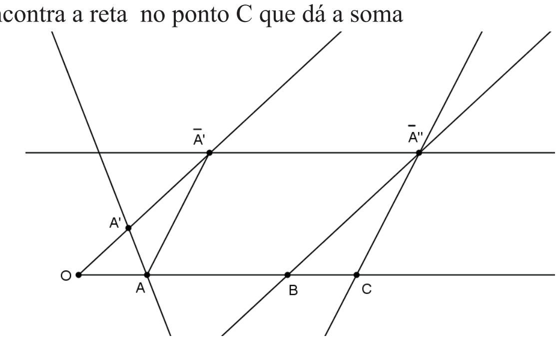

Figura 10

Demonstração: Para demonstrar, suponha-se que tanto os pontos e como os pontos e são obtidos de modo indicado:

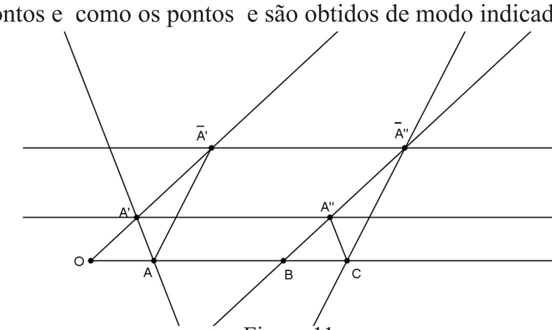

Figura 11

Considere que o ponto C esteja determinado sobre de tal modo que seja paralela a . Deve-se então provar que é paralela a Os triângulos e estão dispostos de tal modo que as retas que ligam os vértices correspondentes são paralelas, vistos que, além disso, dois pares de lados correspondentes são paralelos, a saber, e , assim como e . Logo, pela afirmação do Teorema de Desargues, também os terceiros lados e são na verdade, paralelos entre si, o que justifica a demonstração.

Nas construções anteriores, foram usados implicitamente o postulado das paralelas e o teorema de Desargues como contexto teórico do desenvolvimento do cálculo de segmentos. Nesse caso, os postulados, axiomas e outros teoremas são considerados licenças para que uma determinada atividade possa ser realizada, com o uso do raciocínio abdutivo, produzindo uma hipótese e o envolvimento de questões pragmáticas.

A abdução não é simplesmente uma coisa psicológica como a criatividade; Abdução implica generalização. Generalização implica introdução de objetos ideais novos. Agora no xadrez ou na maior parte da álgebra não tem abdução, pois trata de ser um jogo sintático (a álgebra pura tem intensão, sentido, mas não tem referência, extensão).

A síntese Abdutiva exige sempre a continuidade (empírica ou mental), ou seja, a analogia ou a conexão entre provas matemáticas e experimentos mentais só funciona se a generalização e a abdução têm relevância na Matemática, negando que a Matemática seja calculação puramente mecânica. Abdução implica generalização na Matemática e exige uma teoria de experimentação e de análise e por isso de experimentos mentais.

Segundo Peirce, intuição representa a essência de uma situação complicada, por meio de uma forma única e clara. O raciocínio intuitivo ou abdutivo produz novas hipóteses e um substituto de hipóteses para um emaranhado complexo de predicados ligados a um assunto ou a uma única concepção (Peirce, 1958).

É muito importante notar que essa intuição ou síntese abdutiva é um meio ou parte da atividade semiótica e da atividade de experimentação, ao invés de ser uma fundamentação passivamente recebida e não mediada do conhecimento.

4 Quais as Características dos Experimentos Mentais?

Há no homem um tipo especial de pensamento relacional. A capacidade de isolar relações e considerá-las em seu significado abstrato reflete esse pensamento. Para aprender o significado dessas relações, o homem se torna não dependente de dados concretos, mas considera as relações em si mesmas.

“A geometria é o exemplo clássico dessa virada intelectual, como disse Platão” (Cassirer, 1994). A geometria não se ocupa de coisas físicas ou objetos de percepção, mas estuda relações espaciais cuja expressão tem um simbolismo adequado. A linguagem humana se realiza nessa etapa preliminar.

O pensamento relacional permite compreender que uma prova só pode ser efetivamente possível se buscar referências a outras coisas não mencionadas nas premissas originais. Essas coisas podem ser introduzidas por construções conceituais e por generalizações, ou seja, são experimentos mentais (Cruz, 2015).

Há também no homem o pensamento reflexivo. O reflexo, ou pensamento reflexivo, é a capacidade que o homem tem de distinguir dentre toda a massa indiscriminada da corrente de fenômenos sensoriais flutuantes, certos elementos fixos para poder isolá-los e concentrar sua atenção neles (Cassirer, 1994).

Os experimentos mentais são reflexões à base de dados conhecidos, logo surge o questionamento: como os experimentos mentais podem ser uteis? Uma resposta possível seria que talvez, nos processos dedutivos do raciocínio matemático, sempre entre a intuição fornecendo informações convincentes e explicativas a curto prazo para o estabelecimento de algum fenômeno.

Nos experimentos mentais, o sujeito pensa e estabelece o contexto real. Para Kuhn (2011), os experimentos mentais ajudam a resolver confusões no nosso modo de pensar. Todo experimento mental tem um lado objetivo, porque aplica conceitos objetivos.

Nas ciências naturais, os experimentos mentais são importantíssimos para a descoberta de novas leis e teorias. Sua aplicação na Matemática é uma questão de descoberta, mas há um problema em relação à fundamentação. Nesse sentido, não se podem dispensar as provas matemáticas formais.

Pode-se fazer a pergunta sobre quais fundamentos foram levados em consideração no desenvolvimento do cálculo de segmentos apresentado no item II. A consideração de tais fundamentos tem a intenção de comunicar a possibilidade da construção da soma de segmentos formalizando tal possibilidade.

Retornando ao desenvolvimento do cálculo de segmentos, nota-se que parte-se da geometria plana, na qual sejam válidos os axiomas seguintes:

1 – Para cada dois pontos e , há sempre uma reta a que está associada com cada um dos dois pontos. Isto significa que há uma reta que passa por cada um desses pontos.

2 – Para dois pontos e não há mais do que uma reta que está associada com cada um dos dois pontos. Isto é, por dois pontos passam uma e somente uma reta.

3 – Sobre uma reta há sempre, pelo menos, dois pontos. Há pelo menos três pontos que não estão sobre uma mesma reta. Pode-se dizer que três pontos, não necessariamente pertencem à mesma reta

4 – os pontos de uma reta dispõem-se com certas relações entre si, para cuja descrição serve, em particular, a palavra “entre”. Identifica-se com esse axioma que entre dois pontos numa reta dada, há infinitos pontos.

5 – Seja uma reta qualquer e um ponto exterior a ; no plano determinado por e há, no máximo, uma reta que

passa por e não corta . Esse é o postulado das paralelas, que traduzindo pode-se considerar que por um ponto fora de uma reta passa uma e somente uma reta paralela a reta dada.

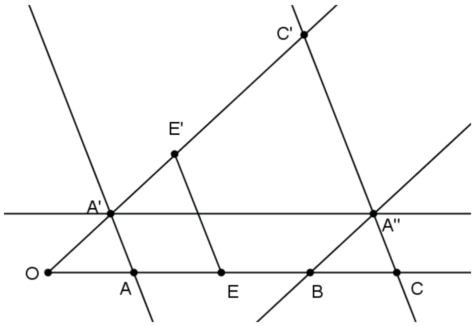

Figura 12

Bolzano, do ponto de vista da formalização, considerava a lógica como a doutrina do conhecimento e a matemática como conhecimento *sui generis*. Segundo Bolzano, para conhecer a Matemática, seria necessário conhecer suas proposições. No século XIX, os matemáticos que fundamentaram a Matemática, consideravam que as impossibilidades de uma prova só existiam em provas que buscavam convicções.

No sentido de Bolzano, as provas matemáticas são diferenciadas em dois aspectos, as *provas que provam* e as *provas que explicam*, considerando que a primeira tem o objetivo de trazer convicções subjetivas, ou seja, são meras verificações, e a segunda, ligada aos axiomas, mostrando os fundamentos objetivos de tais verdades.

Mas uma prova formal não é elemento da cognição, nem da epistemologia, pois só é verdade dentro de um sistema lógico, isto é, ela não existe fora do contexto de uma teoria formal. São calculações apenas. São descrições e uma descrição não identifica a existência do objeto.

Considera-se que a matemática surgiu do contexto social e não natural e, dentro desse contexto, encontra-se a teoria geral dos signos como uma tentativa de desenvolver ideias gerais. Toda atividade cognitiva é uma atividade semiótica. O próprio signo é um processo.

O conceito, nessa perspectiva, é um tipo de processo que assume formas, dependendo de onde está sendo aplicado. A mudança de conceito depende de novos contextos, ou seja, muda a referência. Essa é a complementaridade do conceito (sentido e referência), de Leibniz e Newton, por exemplo.

Dependendo do contexto, dá-se ao conceito uma formulação diferente, ou seja, a ideia é uma maneira diferente de enxergar e aplicar os conceitos. Peirce dizia que o signo é alguma coisa que representa algo para alguém. Nesse contexto, tem-se que o interpretante (ideia) é sempre uma nova representação. O que acontece no futuro está no interpretante, portanto não há a necessidade que o interpretante exista; é sempre uma possibilidade.

O signo tem sentido e referência. Ele representa alguma coisa, o seu objeto, mas não em todas as suas representações. O signo tem objetividade, independentemente do humano. Tem uma relação triádica com o objeto e o seu interpretante. O interpretante é determinado pelo objeto do signo.

Retomando as ideias de Peirce sobre o raciocínio teoremático, todo teorema complicado sempre exige que se encontre um contexto. O teorema de Pitágoras, por exemplo, não é direto. A maior controvérsia na matemática, no ponto de vista da escola, é que os alunos já sabem que os problemas têm solução. Mas, em certo sentido, nenhum problema fornece meios para sua solução, temos de procurar um contexto para que o problema seja resolvido.

O que Peirce quer dizer é que a matemática não pode ser reduzida à lógica. Para ser teoremático, tem de reduzir a um processo de generalização. No pensamento teoremático, tem de criar novas premissas, isto é, criar uma generalização.

É necessário pensar a Matemática como uma atividade e, nesse contexto, a intuição ganha força da realidade, mas, na realidade em si, não há uma interpretação da interpretação. Então, como juntar conceito com intuição? A semiótica deixa a diferença entre conceito e intuição relativa.

5 Conclusão

As considerações que serão apresentadas nesse texto, partem-se do contraste entre dois elementos principais do conhecimento matemático, o experimento mental e a prova matemática formal.

No experimento mental constrói-se a referência a base de um pensamento especulativo. Não é uma simples intuição, mas uma experiência a base de um contexto teórico, um pensamento abdutivo, um passo intermediário.

Na prova matemática formal, o contexto está definido pelos axiomas. Os axiomas definem conceitos, mas não objetos. Eles não respondem o que é isto ou aquilo, por isso uma teoria não responde o que é um objeto, logo há a necessidade de um modelo.

O conceito surge de um pensamento intuitivo ou de uma experiência real, como puxar, fazer força etc., mas a generalização vai alem. Ela acontece à base de um pensamento mais geral, de uma experiência idealizada, ou seja, de um experimento mental, considerando todos os casos possíveis.

Significados são universais como por exemplo: uma maçã, um triângulo geral, um homem, todos eles podem ser representados, isto é, eles podem ser especificados de muitas maneiras diferentes, são variáveis objetuais.

Em matemática, sentido ou significado toma forma *dual*. O estruturalismo matemático e a abordagem axiomática estão preocupados com conceitos, em vez de objetos. A axiomática formal surgiu do fato de que a geometria não podia definir seus objetos, algo que Pascal já haviam observado. Isso levou a conceber os conceitos matemáticos em termos instrumentais ou completamente operacionais, nesse contexto, o cálculo de segmentos passou a ser considerados em face aos axiomas apresentados e não ao desenvolvimento construtivo e especulativo.

Um conceito é para ser definido, como Moritz Schlick

(1925), disse em relação à axiomatização da geometria de Hilbert, pelo fato de que certas conclusões poderiam ser tiradas sobre isso. O significado de um conjunto de axiomas ou equações algébricas é algo como o conjunto de todas as conclusões formais que podem ser obtidos a partir deles.

No entanto, no contexto da geometria, topologia ou matemática aplicada e ciência natural, significados estão ligados ao princípio da continuidade, sendo algum tipo de trajetórias dentro de um determinado espaço. A mecânica, por exemplo, poderia ser concebida como um espaço de três dimensões (comprimento, altura e massa, formando as suas dimensões) e as leis da mecânica seriam as relações entre essas dimensões. Por meio de uma análise dimensional pode-se ver, por exemplo, muito diretamente que o pêndulo foi dividido pela constante gravitacional.

A matemática precisa de generalização, por isso precisa de ideias e intuições. O princípio da complementaridade mostra que a atividade é um processo e o conhecimento é desenvolvido pela atividade que por um lado é determinada pelo objeto e pelo outro pelo indivíduo. A verdade de um teorema coincide com a possibilidade de formulá-lo, nesse aspecto, verdade e certeza se coincidem.

Peirce deu uma melhor caracterização da matemática como atividade do pensamento teoremático. Na matemática, construir diagramas permite ganhar uma intuição das coisas que de outra maneira não se tornariam visíveis. Esse pensamento teoremático pode ser traduzido na dinâmica de aplicação dos experimentos mentais, que produzem ideias para construir uma prova. Neste caso, o raciocínio hipotético dedutivo se torna uma interpretação do diagrama ou dos experimentos mentais.

Pode-se até pensar que um experimento mental só produz hipóteses, enquanto uma prova formal produz certezas, mas se assumir que uma prova matemática traz certezas isto deve ser provado.

Kuhn traz que os experimentos mentais servem para criar e esclarecer conceitos abstratos, ou seja, constrói conceitos, mostrando que todo pensamento humano tem intensão e extensão.

Intensão e extensão dos conceitos devem ser vistas como complementares entre si, em que por um lado elas funcionam de modo relativamente independente uma da outra e por outro lado ligadas circularmente (circulo hermenêutico). Portanto, o principio da complementaridade, permite usar os símbolos e os conceitos num duplo sentido tanto atributivamente quanto referencialmente.

A generalização de um conceito matemático não é singular, pois há vários modos de realizá-la. Há a necessidade de introduzir objetos ideais nas atividades matemáticas. Contudo, deve-se seguir rigorosamente uma exigência. Qualquer conceito generalizado dever reduzir-se ao conceito original quando as condições originais forem preenchidas.

Referências

Brent, J. (1998). Charles Sanders Peirce: A life. Revised and Enlarged Edition.

Cassirer, E. (1994). Ensaio sobre o homem. Uma Introdução a uma filosofia da cultura humana. São Paulo: Martins Fontes.

Cruz, W. J. (2015). Experimentos mentais e provas matemática formais. São Paulo: UNIAN.

Euclides. (2009). Os elementos. Rio Claro: UNESP.

Hilbert, D. (2003). Fundamentos da Geometria. Lisboa: Gradiva.

Hoffmann, H. G. M. (2006). Seeing problems, seeing solutions. Abduction and diagrammatic reasoning in a theory of scientific discovery. Georgia Institute of Technology: School of Public Policy.

Kant, I. (1997). Crítica a razão pura. Lisboa: Fundação Caloute Gulbenkian.

Kuhn T. S. (2011). A tensão essencial. São Paulo: UNESP.

Otte, M. (2012). A realidade das Idéias: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática. Cuiabá: EDUFMT.

Peirce, C. S. (1958). Collected Papers of Charles Sanders Peirce. Cambridge, Mass: Harvard.

Peirce, C. S. (1967). Manuscript, according to Richard S. Robin, Annotated Catalogue of the Papers of Charles S. Peirce. The University of Massachusetts Press 1967.

Peirce, C. S. (2010). Semiótica. São Paulo: Perspectiva.

Schlick, M. (1918). Allgemeine Erkenntnislehre. Berlim: Verlag Von Julius Springer.