A BUSCA POR VALOR DESCONHECIDO EM PROBLEMAS ADITIVOS: UMA POSSIBILIDADE DE DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NA ALFABETIZAÇÃO

Vinícius Carvalho Beck[1]
Instituto Federal Sul-Riograndense
João Alberto Silva[2]
Universidade Federal do Rio Grande

RESUMO

O objetivo da pesquisa é identificar características de um pensamento algébrico na resolução de problemas aditivos por estudantes do Ciclo de Alfabetização, tendo como referencial a Teoria dos Campos Conceituais. Constata-se o uso de duas estratégias na situação de *completar* proposta aos estudantes do 3º ano do Ensino Fundamental: *busca por valor desconhecido seguida por contagem* e *busca por valor desconhecido seguida por subtração.* Concluímos que situações de *completar*, como esta abordada em nossa pesquisa, podem oportunizar o uso de estratégias algébricas.

Palavras-Chave: Problemas Aditivos. Pensamento Algébrico. Ciclo de Alfabetização.

ABSTRACT

The aim of research is to identify characteristics of a algebraic thinking in problem-solving additives by students from literacy Cycle, taking as a reference the Conceptual Fields Theory. Note the use of two strategies on the *complete* situation proposal for students of the third grade of elementary school: *search for unknown value followed by count* and *search for unknown value followed by subtraction*. We concluded that *complete* situations, as this addressed in our research, can enhance the use algebraic strategies.

Keywords: Additive Problems. Algebraic Thinking. Literacy Cycle.

[1] viniciusbeck@cavg.ifsul.edu.br
[2] joaosilva@furg.br

INTRODUÇÃO

O uso do pensamento lógico-matemático por crianças tem sido tema de vários estudos (KAMII, 1990; PIAGET, 1950, 1970; PIAGET; INHELDER, 1959). Vergnaud (1985, 1990, 1997) desenvolveu pesquisas abordando os diferentes tipos de problemas que envolvem as principais operações aritméticas. Como resultado desses estudos, o autor afirma que cada operação não está necessariamente associada a um único tipo de problema, isto é, cada operação pode ser utilizada em uma grande variedade de classes de situações, e reciprocamente, um mesmo problema pode ser resolvido com a utilização de duas ou mais operações. Para explicar como os diferentes tipos de situações se relacionam com as operações matemáticas elementares, Vergnaud (1985, 1990, 1997) propôs a *Teoria dos Campos Conceituais*.

Vergnaud (1985, 1990, 1997) define campo conceitual como um conjunto de conceitos, os quais só possuem sentido no escopo de um conjunto de situações e representações próprias, a partir das quais certas estratégias cognitivas, chamadas de invariantes operatórios, são exigidas para superar as dificuldades impostas pelas situações. Um conceito, segundo Vergnaud (1985, 1990, 1997) pode ser considerado como uma tripla C={S,I,R}, onde S é um conjunto de situações envolvendo o conceito, I é um conjunto de invariantes operatórios e R é um conjunto de representações simbólicas associadas com o conceito.

Os invariantes operatórios são procedimentos que podem ser aplicados a uma classe de situações semelhantes entre si. Dividem-se em dois tipos: teoremas-em-ação e conceitos-em-ação. Os teoremas-em-ação são proposições tidas pelo sujeito como verdadeiras. Ao contrário dos teoremas matemáticos, nem sempre podem ser generalizados ou provados, estando sempre sujeitos a reorganização. Os conceitos-em-ação são características atribuídas a sujeitos ou objetos, constituindo as premissas, ou seja, informações que podem ser utilizadas nos teoremas-em-ação com o objetivo de dominar situações de um determinado campo conceitual.

Com base nos trabalhos de Kamii (1990) e Vergnaud (1985, 1990, 1997), surgiram estudos abordando as estratégias utilizadas por crianças na resolução de problemas aritméticos (NUNES; BRYANT, 1997; BORBA; NUNES, 2004; CHAPIN; JOHNSON, 2006), e em particular, de problemas aditivos. Algumas avaliações de larga escala, como a Provinha Brasil de Matemática (INEP, 2015), já assimilaram estes novos estudos em suas respectivas concepções de avaliação da aprendizagem.

Também surgiram mais recentemente, no âmbito da educação matemática, trabalhos abordando o desenvolvimento do pensamento algébrico (FILLOY; ROJANO, 1984; BODANSKII,1991; BLANTON; KAPUT, 2005; CARPENTER *et al*., 2005; IRWIN; BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII; STEPHENS, 2008; STEPHENS; WANG, 2008; RADFORD, 2009, 2010a, 2010b, 2011).

Alguns documentos que embasam a prática docente já apresentam uma expectativa de se desenvolver o pensamento algébrico desde anos iniciais do Ensino Fundamental (NCTM, 2000; BRASIL, 2012). Embora muitos trabalhos sobre o pensamento algébrico abordem direta ou indiretamente problemas do tipo aditivo, ainda não se tem uma compreensão muito clara da relação que existe entre esses dois campos de estudo.

Quando Vergnaud (1985, 1990) propôs a Teoria dos Campos Conceituais, ele se interessou inicialmente pelas estratégias empregadas por estudantes na resolução de problemas aditivos e multiplicativos, sem considerar se determinadas classes de problemas favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico. Da mesma forma, na teoria de Vergnaud não fica explícito quais problemas estariam mais ligados à alfabetização e quais problemas estariam mais ligados a outras etapas da Educação Escolar. Devemos ter em vista que quando a teoria foi proposta, a alfabetização matemática estava centrada na aritmética, sem contemplar ainda o pensamento algébrico e outros eixos temáticos. Além disso, a própria ideia de alfabetização matemática ainda era bastante incipiente, pois a alfabetização estava focada quase que exclusivamente no ensino da língua materna.

Seria interessante contextualizar o referencial da Teoria dos Campos Conceituais com as abordagens que surgem à luz das novas tendências na educação matemática e nas novas concepções de alfabetização. Por exemplo, dentro dos problemas aditivos, poderíamos analisar que problemas possibilitam o uso de um pensamento algébrico. Destaca-se que embora seja uma tendência no Brasil e no mundo considerar o pensamento algébrico na etapa de alfabetização, ainda há um número relativamente pequeno de estudos que abordam o tema, o que tem motivado, nos últimos anos, o surgimento de trabalhos nesse sentido.

Uma justificativa para a realização desta pesquisa é o fato de que o pensamento algébrico pode ser explorado de várias formas na alfabetização, e também, em particular, por meio dos problemas aditivos, ainda que não se tenha clareza da relação entre o pensamento algébrico e essa classe de problemas.

Com base na justificativa apresentada e no referencial teórico da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1985, 1990, 1997), colocamos a seguinte questão para pesquisa: Qual a influência do pensamento algébrico nas estratégias de resolução de problemas aditivos na etapa de alfabetização? Tendo essa questão em vista, nosso objetivo é contribuir no sentido de se compreender mais claramente a relação que existe entre os problemas aditivos e o pensamento algébrico no Ciclo de Alfabetização.

PESQUISAS SOBRE O PENSAMENTO ALGÉBRICO

Nos últimos anos, muito tem se discutido no cenário das pesquisas em educação matemática a respeito do conceito de pensamento algébrico (BLANTON; KAPUT, 2005; CARPENTER *et al*.,2005; IRWIN; BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII; STEPHENS, 2008; STEPHENS; WANG, 2008). A seguir, apresenta-se o que alguns autores entendem por pensamento algébrico.

Blanton e Kaput (2005, p. 413) caracterizam o pensamento algébrico como:

> O processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade.

Esses autores desenvolveram pesquisas com o objetivo de compreender e caracterizar o pensamento algébrico nos primeiros anos escolares, definindo esse início da aprendizagem de conceitos algébricos como *early algebra*. Os autores do presente artigo concordam com a definição de pensamento algébrico apresentada por Blanton e Kaput (2005), e é nesse sentido que o termo é utilizado ao longo deste trabalho.

Considerar a generalização, a argumentação e a expressão como partes constituintes do processo de aprendizado da Álgebra é admitir que o aprendizado algébrico não está restrito exclusivamente à compreensão dos símbolos e manipulação de expressões envolvendo incógnitas e variáveis, mas que também deve contemplar formas de pensar mais generalistas, argumentativas e com maior poder de representação de ideias matemáticas, o que amplia consideravelmente o horizonte de contextos nos quais o pensamento algébrico pode desempenhar algum papel importante.

Verschaffel, Greer e De Corte (2007) entendem que o pensamento algébrico está associado com o reconhecimento do que é geral em uma situação matemática e à expressão de generalizações. Kieran (2007) ressalta que a álgebra não deve ser entendida apenas como um conjunto de procedimentos envolvendo símbolos alfabéticos, que não deve ser encarada apenas como um conjunto de técnicas, mas também como uma forma de pensar e raciocinar em situações matemáticas. Apesar de Kieran (2007) utilizar o termo "álgebra", e não "pensamento algébrico", a "álgebra" de Kieran (2007) parece estar definida no mesmo sentido do "pensamento algébrico" de Verschaffel, Greer e De Corte (2007), e também de Blanton e Kaput (2005).

A ideia de se trabalhar com o pensamento algébrico nas etapas iniciais da educação escolar é relativamente recente. O *National Concil of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) destaca quatro eixos que devem orientar o trabalho pedagógico envolvendo o pensamento algébrico nos vários níveis de ensino. São eles: (1) compreender padrões, relações e funções; (2) representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; (3) usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; e (4) analisar a mudança em vários contextos. Cada nível de ensino deve considerar também aspectos específicos da faixa etária dos alunos e dos conteúdos de outros eixos da matemática, recebendo adequações de acordo com tais características (NCTM, 2000).

Logo após a publicação das orientações do NCTM (2000), surgiram na literatura vários trabalhos abordando questões relativas ao desenvolvimento do pensamento algébrico, inclusive no Brasil.

Falcão (2003) questiona a anterioridade da aritmética em relação à álgebra, destacando que a álgebra é um campo com características específicas, e não simplesmente uma extensão da aritmética. O autor conclui que a álgebra no Ensino Fundamental não deve se restringir apenas à aquisição de códigos algorítmicos ao final dessa etapa de ensino, destacando que as noções de função e incógnita poderiam ser mais bem desenvolvidas se esses assuntos fossem abordados com maior frequência e desde o Ciclo de Alfabetização. Um termo utilizado pelo autor que merece destaque, tendo em vista a proposta de álgebra na alfabetização, é o que ele chama de *pré-álgebra*, ou seja, uma primeira experiência com o pensamento algébrico, sem a exigência rigorosa de uma representação simbólica.

No entanto, abordar uma pré-álgebra trouxe para a comunidade de educadores matemáticos diversas novas questões, pois pouco se discutia sobre o pensamento algébrico na alfabetização. Aliás, por se tratar de um eixo estruturante recente, até mesmo a formulação de tarefas e situações-problema não são claramente diferenciadas de outros eixos na literatura.

Os primeiros problemas propostos abordando o pensamento algébrico ressaltavam a ideia de regularidade e previsibilidade, na maioria das vezes estando relacionados com sequências e combinações.

Gomes (2003) apresenta e sugere diversas situações algébricas para o Ensino Fundamental envolvendo sequências e combinações, as quais podem servir como base para a criação e manipulação de equações e expressões algébricas. A autora afirma que a álgebra pode ser abordada desde o início do Ensino Fundamental, destacando a ideia de uma *alfabetização algébrica*, e ainda evidencia as relações que podem ser traçadas entre a álgebra, a geometria e a aritmética.

Fujii (2003) utiliza a expressão *quase-variável* para designar um número ou conjunto de números em uma expressão que revelam uma relação matemática e que se manterá independentemente dos números a serem posteriormente utilizados. Isto é, o autor define uma quase-variável como uma sequência que apresenta regularidade e previsibilidade.

Como se pode notar − tendo em vista os trabalhos de Falcão (2003), Gomes (2003) e Fujii (2003) −, em um primeiro momento os trabalhos sobre o pensamento algébrico estavam mais ligados ao estabelecimento de uma constituição terminológica para os conceitos envolvidos e centrados nas ideias de regularidade e previsibilidade, com situações que envolviam basicamente sequências e combinações de objetos.

Blanton e Kaput (2005) propõem uma divisão do pensamento algébrico em duas vertentes: a *aritmética generalizada* e o *pensamento funcional*. A primeira se caracteriza pela generalização das operações e o raciocínio acerca da relação entre números. Já a segunda se caracteriza pela descrição da variação numérica em certo domínio.

Destacamos que as duas vertentes do pensamento algébrico propostas por Blanton e Kaput (2005) ampliam consideravelmente a noção de pensamento algébrico. Vamos nos concentrar, neste trabalho, na aritmética generalizada. Blanton e Kaput (2005) abordam vários tipos de situações que demandam esse tipo de pensamento, destacando principalmente as propriedades e relações entre números inteiros, as propriedades entre as operações, o uso da igualdade como uma relação entre quantidades, a estrutura dos números e a resolução de expressões numéricas com número desconhecido em falta.

METODOLOGIA

O presente trabalho apresenta uma pesquisa de natureza qualitativa, tendo em vista que os dados analisados são oriundos de diálogos entre os participantes da pesquisa, e não são utilizados métodos quantitativos na análise e produção dos resultados. Segundo Garnica (2004, p.86), a pesquisa qualitativa tem como principais características:

> (a) a transitoriedade dos seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que estas mesmas compreensões e também os meios de se obtê-las podem ser (re)configuradas; (e) a impossibilidade de se estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Dado o potencial de retorno dos resultados da pesquisa para a sala de aula e o trabalho docente, optamos pela metodologia de Investigação-Ação na produção de dados. Ela é constituída por quatro etapas: planejamento, ação, observação e reflexão (CARR; KEMMIS, 1988). Nessa modalidade, tanto os sujeitos quanto os pesquisadores são considerados como participantes da pesquisa, interagindo na ação a ser analisada. Há, portanto, uma relação muito próxima entre teoria e prática.

As quatro etapas compõem o que se tem chamado de ciclos da espiral de investigação-ação escolar (KEMMIS; MACTAGGART, 1988). No caso específico desta pesquisa, as etapas da investigação-ação escolar são apresentadas no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 - Detalhamento da Investigação-Ação.

Momentos	Descrição
Planejamento	Estudo inicial da realidade da proposta dentro do grupo de pesquisa. Construção das situações-problema. Elaboração dos materiais a serem aplicados. Elaboração do roteiro para a atividade.
Ação	Ação nas turmas de 3º ano em escolas da rede municipal, parceiras do grupo de pesquisa para a produção dos dados. Proposição das atividades. Elaboração de perguntas durante o desenvolvimento das estratégias pelas crianças.
Observação	Observação das condutas das crianças, dos materiais que produziram e das explicações que adotaram para algumas estratégias. Registro nos diários de campo das respostas das crianças, bem como das estratégias utilizadas por elas na tentativa de encontrar soluções para as situações-problema propostas.
Reflexão	Análise dos dados coletados. Reflexão sobre os limites da situação-problema empregada. Elaboração de uma compreensão de como as crianças do Ciclo da Alfabetização agem e as capacidades que apresentam na resolução de problemas aditivos elementares. Posteriormente, também foram analisadas as mesmas estratégias do ponto de vista do pensamento algébrico.

Fonte: Os autores.

Como a ideia inicial era compreender quais as estratégias e procedimentos empregados pelas crianças do Ciclo de Alfabetização na resolução de problemas que contemplam as competência e habilidades previstas na matriz de referência da Provinha Brasil de Matemática (INEP, 2015), a qual deste ponto em diante será referida pela sigla PBM, entendemos que os sujeitos da pesquisa deveriam ser alunos do último ano do ciclo, ou seja, do 3º ano. Caso investigássemos estudantes dos outros anos, poderíamos encontrar dificuldades devido à ausência de contato com os conteúdos em discussão. Espera-se que ao final do Ciclo de Alfabetização todos os estudantes já tenham visto, mesmo que minimamente, os temas pesquisados. A PBM foi utilizada apenas como parâmetro do tipo de situação que está sendo trabalhado atualmente no Ciclo de Alfabetização nas escolas brasileiras, não houve a preocupação de analisar as questões da PBM pelos autores, pois o interesse do trabalho estava focalizado nos traços de pensamento algébrico dos participantes.

Foram realizados testes das atividades propostas com três turmas de aproximadamente 20 alunos. Tal estratégia foi necessária na medida em que a cada aplicação notavam-se problemas nas atividades elaboradas e dificuldades na produção de dados. Assim, foram realizadas três aplicações-piloto até entender-se que o instrumento atingira um desenvolvimento satisfatório. Os dados apresentados foram produzidos a partir da aplicação na quarta e última turma, na qual a situação-problema atingiu o auge do seu refinamento e as estratégias e procedimentos puderam ser mais bem observados.

Durante a realização das atividades propostas, as crianças eram organizadas em trios a fim de que pudessem dialogar entre si e compartilhar o modo pelo qual resolviam os problemas. Essa abordagem facilitou a produção de dados, pois permitiu que os observadores capturassem mais precisamente as falas dos participantes do estudo.

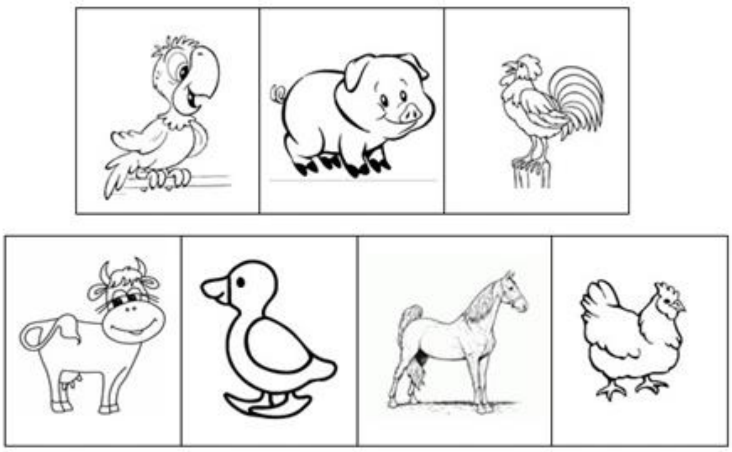
Dentro da perspectiva da investigação-ação escolar, durante a etapa do planejamento, diversos foram os movimentos de estruturação da situação-problema a ser desenvolvida com os estudantes. Nesse momento, os pesquisadores e os professores da educação básica organizaram-se de forma a criar situações didáticas não muito diferenciadas do contexto escolar, mas focadas em demandas relativas às competências e habilidades em questão.

Perrenoud (2000) define *competência* como a capacidade de agir eficazmente nas situações, mobilizando os recursos disponíveis, sejam materiais, afetivos ou cognitivos. No mesmo sentido, as habilidades configuram-se como o conjunto de conhecimentos práticos voltados a um saber-fazer e ao desenvolvimento de procedimentos. Elas ampliam as ideias dos conteúdos, que, usualmente, adquirem um fundo mais informacional, sem se ocupar das aprendizagens dos saberes procedimentais e atitudinais (ZABALA, 2000).

Desenvolvemos inicialmente seis situações-problema, uma para cada habilidade do campo aditivo, seguindo as habilidades previstas na PBM, na qual os alunos deveriam relatar como estavam resolvendo os problemas apresentados. As habilidades do campo aditivo são detalhadas em INEP (2015). A habilidade de completar é citada no descritor "D2.2 Resolver problemas que demandam as ações de comparar e completar quantidades", da matriz de referência da PBM. Como a pesquisa é de caráter qualitativo, elaboramos alguns critérios para serem analisados no decorrer da atividade, porém consideramos que ao longo da análise também outros fatores foram relevantes, principalmente no tocante às falas dos alunos, enquanto tentavam resolver os problemas.

Inicialmente, dividimos os estudantes em dois grandes grupos e disponibilizamos várias figuras com animais para que eles pintassem. O objetivo foi o de que se familiarizassem com o material a fim de que pudéssemos ajustar o vocabulário quanto à nomenclatura dada a cada imagem. Havia quatro papagaios, cinco galinhas, cinco vacas, três porcos, três cavalos, oito patos e um galo. No decorrer da atividade, entretanto, essas quantidades sofriam pequenas alterações para surpreender os grupos. As figuras apresentadas foram as seguintes:

Figura 1 - Figurinhas Disponibilizadas aos Estudantes.



Fontes: Adaptados de Cliquetando (2015); Essaseoutras (2015); Colorir.Com (2015); Desenhoseriscos (2015); Colorir Desenhos (2015); Desenhos para Colorir (2015); Galinhas Pintadinha (2015).

Em seguida, os pesquisadores ficaram organizados em um canto da sala com certa quantidade de figuras, uma de cada uma das espécies apresentadas. Dos dois grandes grupos formados, que estavam pintando as figuras, três alunos foram escolhidos aleatoriamente para sentarem-se à mesa dos pesquisadores e responderem às situações-problema que foram previamente elaboradas. Antes de os alunos responderem, os pesquisadores perguntaram se eles conheciam aquelas espécies de animais e explicaram que eles moravam na “Fazenda Cocoricó”. Com base nessas informações, eles responderam às perguntas, que são apresentadas no Quadro 2 a seguir. Depois que esse grupo terminou, outro grupo de três alunos sentou-se à mesa com os pesquisadores e o mesmo procedimento foi realizado, e assim sucessivamente.

As situações-problema foram elaboradas inicialmente para quantidades específicas das espécies. No entanto, quando um grupo se dissolvia e voltava para pintar, pensamos que uma possível comunicação com os colegas que ainda não haviam participado da atividade poderia induzir as respostas dos colegas quando estes participassem. Por isso, ao longo da atividade fomos alterando um pouco o enunciado de cada situação-problema. Por exemplo, em dado momento, enunciamos “Quantos animais de duas patas moram na fazenda Cocoricó?” (em vez de quatro patas, originalmente previsto), a fim de eliminar a possibilidade de acerto por conhecimento prévio da resposta. As perguntas utilizadas para analisar cada uma das ações foram:

Quadro 2 - Questões Propostas nas Situações-Problema

CATEGORIAS DE PROBLEMAS ADITIVOS	SITUAÇÕES-PROBLEMA
Juntar	Quantos animais de quatro patas moram na fazenda Cocoricó?
Separar	Todos os animais da fazenda Cocoricó foram convidados para uma festa, mas os cavalos não podem entrar porque são muito bravos. Quantos animais vão poder entrar na festa?
Acrescentar	Chegaram mais duas galinhas para morar na fazenda. Quantas galinhas moram na fazenda Cocoricó agora?
Retirar	Três patos foram morar na fazenda vizinha. Quantos patos restaram na fazenda Cocoricó?
Comparar	A fazenda vizinha possui cinco papagaios a mais que a fazenda Cocoricó. Quantos papagaios moram na fazenda vizinha?
Completar	O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisaria de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?

Fonte: Dados da pesquisa

Ressaltamos que das seis categorias de problemas investigadas, apenas as duas últimas apresentaram características diferenciadas daquelas já encontradas na literatura sobre problemas aditivos (NUNES; BRYANT, 1997; BORBA; NUNES, 2004; CHAPIN; JOHNSON, 2006). Nas situações relacionadas com as quatro categorias precedentes (*juntar, separar, acrescentar e retirar*) a estratégia de *contagem* foi a mais utilizada pelos estudantes, e a grande maioria dos grupos não apresentou dificuldades para encontrar a resposta. No entanto, nos deparamos com resultados mais complexos, em termos de análise, quando aplicamos as situações de *completar* e *comparar*.

Analisamos todas as situações-problema do ponto de vista das estratégias utilizadas, no entanto, apenas as duas últimas situações do Quadro 2 nos interessaram do ponto de vista do pensamento algébrico, pois assumimos a hipótese de que a ideia de uma busca por valor desconhecido (BLANTON; KAPUT, 2005) poderia ser utilizada na situação de *completar* e que um pensamento funcional envolvendo previsão de resultados (BLANTON; KAPUT, 2005) poderia ser utilizado na resolução da situação de *comparar*. Neste trabalho estamos interessados apenas na tentativa de verificação da primeira hipótese, deixando a análise do pensamento funcional com previsão de resultados para estudos posteriores.

Tendo em vista o objetivo desta pesquisa, que é identificar características de um pensamento algébrico na resolução de problemas aditivos por estudantes do Ciclo de Alfabetização, desenvolvemos uma metodologia que chamamos de *Análise do Potencial Algébrico de Problemas Aditivos* (APAPA), que consiste em cinco etapas, as quais são descritas a seguir:

1º) Classificação do problema, segundo o referencial teórico (VERGNAUD, 1985; INEP, 2015);

2º) Análise dos erros;

3º) Descrição das estratégias eficazes, seguindo a literatura sobre estratégias empregadas em problemas aditivos (NUNES; BRYANT, 1997; BORBA; NUNES, 2004; CHAPIN; JOHNSON, 2006), mas também ressaltando aspectos próprios daqueles problemas que assumimos por hipótese estarem ligados com o pensamento algébrico;

4º) Tentativa de se identificar um pensamento algébrico, guiando-se pelo que caracteriza essa forma de pensamento (BLANTON; KAPUT, 2005; CARPENTER *et al*. ,2005; IRWIN; BRITT, 2006; CANAVARRO, 2007; FUJII; STEPHENS, 2008; STEPHENS; WANG, 2008); e

5º) Identificação de teoremas-em-ação nas estratégias bem-sucedidas, seguindo o referencial da Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1985, 1990, 1997).

RESULTADOS

Na situação-problema de *completar* perguntamos o seguinte: "O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisa de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?". Nesta seção são apresentadas as cinco etapas da metodologia APAPA aplicada a essa situação.

1º) Classificação do problema:

A situação-problema em análise pode ser considerada como um problema que demanda a ação de *completar*, de acordo com a matriz de referência da PBM, mas também pode ser incluída na categoria que Vergnaud (1985, 1990) denomina *problemas de transformação de medidas*, já que a natureza da medida envolvida não varia do valor inicial para o valor final.

Nesta situação-problema disponibilizamos apenas figurinhas na quantidade inicial de galos na fazenda, isto é, propositadamente, não foram fornecidas as figurinhas com os galos que faltavam justamente para avaliar a capacidade dos estudantes de lidarem com quantidades desconhecidas. Dos cinco grupos participantes, dois não conseguiram chegar ao resultado correto e três responderam corretamente.

2º) Análise dos erros:

Os dois grupos que não chegaram à resposta correta utilizaram ambos a estratégia de *tentativa e erro*, perguntando várias vezes se a quantidade que diziam era a correta. Os estudantes desses grupos claramente não compreenderam o papel desempenhado pela expressão “quantos faltam” no enunciado.

Esta não compreensão da expressão “quantos faltam” pode ser explicada pela não congruência semântica (BRANDT *et al.*, 2010; CÂMARA, 2013) do enunciado, pois os dados são apresentados na seguinte ordem: 1) a quantidade inicial de galos; 2) a quantidade final de galos, que é cinco e, por fim, uma transformação desconhecida, implícita na expressão “quantos faltam”. Vamos denotar por “Qi” a quantidade inicial e “x” a transformação desconhecida. Sendo assim, não há uma operação que resolva o problema utilizando uma representação matemática na ordem “Qi, x, 5”. Logo, uma estratégia eficiente vai necessariamente exigir a inversão de pelo menos uma das unidades de representação, o que contraria a condição de mesma ordem de apreensão das unidades nas representações (BRANDT *et al.*, 2010), caracterizando assim uma não congruência semântica.

Por outro lado, a dificuldade em compreender a expressão “quantos faltam” também pode ser devida à transposição dessa expressão para a linguagem matemática, influenciando também na escolha da operação a ser utilizada. Afinal, não havia indicação clara nesse sentido. Os estudantes que compunham esses grupos podem ter tido a expectativa de que no enunciado as operações seriam explicitamente apresentadas, o que pode ter obscurecido a percepção de que o problema deveria ser reformulado para que a operação fosse desvendada.

3º) Descrição das estratégias eficazes:

Dos três grupos que chegaram à resposta correta, dois utilizaram a *contagem* como estratégia básica, enquanto o outro grupo utilizou a estratégia de *subtração* para chegar ao resultado.

Os dois grupos que responderam corretamente utilizando a *contagem* como estratégia, a concretizaram pela *contagem unitária nos dedos*. Apenas como ilustração desse tipo de reposta, apresenta-se a seguir anotações dos pesquisadores sobre a fala de um dos estudantes enquanto realizava o procedimento:

> — Se ele precisa de cinco e aqui só tem um, então falta dois, três, quatro, cinco – e começou a contar nos dedos a partir do número um. Então ele precisa de quatro.
>
> Fonte: Anotações do Diário de Campo dos pesquisadores.

Antes de o estudante decidir pelo uso da *contagem* como estratégia, ele percebe que há um critério de parada a ser respeitado, um valor a ser alcançado e o que falta para alcançar este valor é uma quantidade desconhecida. Isto caracteriza um problema inverso (BORBA; NUNES, 2004), onde a transformação é desconhecida. Entender que se trata de um problema com critério de parada é uma capacidade que envolve um número maior de operações mentais, o que explicaria o uso de uma estratégia mais ampla do que a *contagem* neste caso, pois o uso exclusivo da *contagem* constitui apenas uma operação mental, ou seja, é mais característico de problemas diretos.

O grupo que chegou à resposta correta pelo uso da *subtração* utilizou o procedimento de *diminuir utilizando os dedos*, ou seja, primeiro representou na mão o minuendo e abaixou o dedo que representava o subtraendo. Assim, os dedos restantes seriam a diferença procurada.

4º) Tentativa de se identificar um pensamento algébrico:

Os dois grupos que obtiveram êxito na resolução deste problema pela *contagem* perceberam, em primeiro lugar, que havia um valor desconhecido envolvido, por isso, pode-se dizer que acertaram a resposta utilizando também uma estratégia de *busca por valor desconhecido*, antecedendo a *contagem*. Essa primeira estratégia consiste na tentativa de reorganizar o problema a fim de que seja identificada mais precisamente a natureza do dado que está em falta (valor inicial, transformação ou valor final) e seja tomada a decisão sobre qual operação deve ser realizada para chegar até o dado em falta.

Do mesmo modo ocorrido nos grupos que utilizaram a *contagem*, antes de decidir pelo uso da *subtração*, o único grupo que utilizou tal estratégia compreende que o problema exige uma *busca por valor desconhecido*, uma vez que o enunciado não induz diretamente o uso da operação de *subtração*, tendo em vista que o dado referente à operação a ser utilizada é "quantos faltam", não apontando explicitamente para uma adição ou subtração. O diálogo a seguir ilustra o uso desta estratégia:

> — Faltam quatro!
> — Como tu sabes que a resposta é quatro?
> — Porque ele precisa de cinco galos e só tem um. Está faltando quatro!
> — O que tu fizeste pra achar essa resposta?
> — Ele precisa de cinco galos não é?
> — É!
> — Então, ele só tem um – abaixando um dedo – então ele precisa de quatro galos!

Esta habilidade de buscar valores desconhecidos em sentenças matemáticas é utilizada em várias etapas posteriores à alfabetização, como nos anos finais do Ensino Fundamental e em todos os anos do Ensino Médio. Por exemplo: na resolução de equações, sistemas de equações e nos assuntos que derivam destes dois, tais como sistemas lineares, álgebra matricial e geometria analítica. Desta maneira, a *busca por valor desconhecido* anuncia os primórdios do pensamento algébrico e constitui-se importante indicador do processo de alfabetização matemática.

5º) Identificação de teoremas-em-ação nas estratégias bem-sucedidas:

Blanton e Kaput (2005) ressaltam que um dos aspectos da aritmética generalizada, vertente do pensamento algébrico, é "resolver expressões numéricas com número desconhecido em falta". Assumindo o referencial da Teoria dos Campos Conceituais, podemos dizer que este aspecto é um invariante operatório do pensamento algébrico, o qual pode ser denominado, por simplicidade, *busca por valor desconhecido*.

Desse modo, a situação-problema de *completar*, além de constituir um problema aditivo (e, portanto, aritmético, em princípio), também pode oportunizar o uso de estratégias que desenvolvem a invariante *busca por valor desconhecido*, característica de um pensamento algébrico.

Ainda dentro da referência da Teoria dos Campos Conceituais, identificamos dois teoremas-em-ação: a) *busca por valor desconhecido seguida por contagem* e b) *busca por valor desconhecido seguida por subtração*. Esses teoremas-em-ação foram eficientes para contornar a dificuldade imposta pela não congruência semântica do enunciado.

Portanto, no problema aritmético apresentado, que é um problema de *completar* (INEP, 2015) ou de *transformação de medidas* (VERGNAUD, 1985), é possível visualizar estratégias que promovem avanços no sentido de se desenvolver buscas por valores desconhecidos, que é uma característica do pensamento algébrico, mais especificamente da aritmética generalizada, apontada por Blanton e Kaput (2005).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cenário das pesquisas sobre a relação entre os problemas aditivos e o pensamento algébrico ainda não está bem definido, mas alguns avanços estão ocorrendo, e esta pesquisa é uma contribuição nesse sentido. Neste trabalho abordamos a questão "Qual a influência do pensamento algébrico nas estratégias de resolução de problemas aditivos na etapa de alfabetização?", tendo como objetivo identificar um pensamento algébrico na resolução de alguns tipos de problemas aditivos.

Com base nos resultados apresentados, constatamos a existência de problemas aditivos que oportunizam à criança a utilização de estratégias que apresentam traços de um pensamento algébrico. No caso desta pesquisa, duas situações mostraram favorecer o uso de pensamento algébrico: as situações de *completar* e de *comparar*. A identificação desse pensamento algébrico seguiu a caracterização proposta por Blanton e Kaput (2005). Essa identificação foi baseada na ideia do uso de estratégias mentais, as quais foram denominadas teoremas-em-ação, pois o referencial para analisá-las foi a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1985, 1990, 1997).

Constatamos o uso de dois teoremas-em-ação na situação de *completar*, que são: *busca por valor desconhecido seguida por contagem* e *busca por valor desconhecido seguida por subtração.* A situação de *comparar* será abordada, seguindo o mesmo referencial teórico e metodologia de análise, em pesquisas posteriores.

A hipótese de que os problemas de *completar* poderiam produzir estratégias algébricas se confirmou, contribuindo em favor da proposta de Falcão (2003), que questiona a anterioridade da aritmética em relação à álgebra. Assim, concluímos que problemas de *completar* não são meramente aritméticos, e que não há razões para desconsiderar o pensamento algébrico no Ciclo de Alfabetização.

Podemos ainda teorizar a respeito da conclusão principal da pesquisa a fim de fornecer explicações mais consistentes a respeito das resoluções apresentadas neste estudo. Ao notar que as estratégias utilizadas na resolução de problemas do tipo *completar* apresentam elementos tanto aritméticos quanto algébricos, podemos dizer que tais estratégias constituem soluções em um nível mais sofisticado de complexidade. Isso indica que podemos falar em *níveis de solução*.

Alguns problemas podem ser resolvidos com estratégias constituídas por apenas um esquema mental, outros demandam o uso de vários esquemas. Se associarmos o número de esquemas que constituem as estratégias de resolução de problemas matemáticos com os níveis de solução, poderíamos dizer que estratégias com nível de solução 1 são constituídas por um único esquema, estratégias com nível de solução 2 são constituídas por dois esquemas, e assim por diante. E ainda, poderíamos dizer que as estratégias pré-cognitivas (procedimentos intuitivos ou memorizados), nas quais não há necessidade de uso de esquemas mentais, possuem nível de solução 0.

Ao adotar essa escala de níveis de solução, constatamos que as estratégias bem-sucedidas utilizadas nos problemas de *completar* são estratégias de solução do nível 2, pois envolvem, em um primeiro momento, a reformulação da situação-problema, e em seguida, a escolha de uma operação matemática. A partir daí, os estudantes utilizam procedimentos (como contar nos dedos ou nas figuras, por exemplo), que constituem a parcela pré-cognitiva ou procedimental da solução.

Na situação-problema abordada nesta pesquisa perguntamos aos estudantes: "O dono da fazenda Cocoricó tem sono pesado e precisa de cinco galos para ser acordado. Quantos galos faltam para que o dono consiga acordar de seu sono pesado?". Em primeiro lugar, o estudante percebe que deve buscar um valor desconhecido (pensamento algébrico); depois ele decide a operação matemática a ser utilizada (*contagem* ou *subtração*); e por fim, ele realiza o procedimento que produz o resultado esperado (*contagem nos dedos*, *subtração nos dedos*). O procedimento final seria o nível 0 da solução, a decisão pela operação seria o nível 1 e a consciência do valor desconhecido seria o nível 2.

Três fatores contribuíram para que as estratégias utilizadas neste problema apresentassem um nível de solução mais elevado: a presença da não congruência semântica nos enunciados; a necessidade de transposição para a linguagem matemática do termo “quantos faltam”; e a possibilidade de uso de mais do que uma operação matemática (a saber: contagem, adição ou subtração).

De fato, a não congruência semântica exigiu dos estudantes uma reordenação dos dados, a fim de que a interpretação matemática da situação pudesse ser pensada em termos das operações elementares de adição e subtração.

A partir do momento em que os estudantes percebiam que algo deveria ser alterado no enunciado, a reformulação passava a ser o próximo desafio, já que a resposta do problema deveria ser fornecida em linguagem matemática. Esta necessidade de transposição para a linguagem matemática era um passo que os estudantes precisavam superar antes de utilizar operações aditivas.

A possibilidade de uso de mais do que uma única operação aritmética nas situações propostas contribuiu para o aumento da complexidade na etapa de decisão da operação a ser utilizada, sendo que em alguns casos, foram observadas propostas de uso de operações diferentes nos grupos.

Esta teorização sobre os níveis de solução está em concordância com os resultados de Borba e Nunes (2004), no que diz respeito ao fato de que os problemas inversos demandam maior número de operações mentais do que os problemas diretos. De fato, o que explica este número mais elevado de operações mentais é que nos problemas inversos a busca por um valor desconhecido constitui o nível 2 da solução, a fim de que a escolha da operação seja realizada no nível 1. Em contrapartida, nos problemas diretos a escolha da operação é realizada em primeiro lugar, possibilitando aos estudantes iniciar a resolução no nível 1 da solução, já que não há necessidade de reflexão sobre a ordenação dos dados e a relação dessa ordenação com as operações aditivas.

Para concluir, pensamos na ideia de que a álgebra constitui uma elevação do nível de solução apresentado pelas estratégias de estudantes na resolução de problemas aditivos. Alguns tipos de problemas permitem que essa exploração de níveis mais complexos de solução seja possível. Para delimitar a caracterização desses tipos de problemas, será necessário investigar com mais profundidade as estratégias utilizadas por estudantes em problemas aditivos em outras pesquisas, adotando-se, por exemplo, o referencial da Teoria dos Campos Conceituais e analisando os níveis de solução dos teoremas-em-ação utilizados pelos estudantes.

REFERÊNCIAS

BLANTON, M.; KAPUT, J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **J. Res. Mathematics Educ.**, v.36, n.5, p.412-446, 2005.

BODANSKII, F. The formation of an algebraic method of problem-solving in primary school children. In: DAVIDOV, V.V. **Soviet Studies in Mathematics Education**: Psychological abilities of primary school children in learning mathematics. Reston: NCTM, 1991. p.275-338

BORBA, R.E.S.R.; NUNES, T. Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo. **Educ. Matemática Pesq.**, v.6, n.1, p.76-100, 2004.

BRANDT, C.F. Análises das dificuldades na resolução de problemas aditivos à luz da Teoria de Representações Semióticas. In: **ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO DA REGIÃO SUL,** 8. Londrina, 2010. Anais... Londrina-PR, 2010.

BRASIL. **Elementos conceituais e metodológicos para os direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental**. Ministério da Educação, Secretária de Educação Básica. Brasília: MEC, 2012.

CÂMARA, M. Análise dos resultados do pré-teste da PBM de Matemática. **Estud. Aval. Educ.**, v.24, n.54, p.100-117, 2013.

CANAVARRO, A.P. O pensamento algébrico na aprendizagem matemática nos primeiros anos. **Quadrante**, v.16, n.2, p.81-118, 2007.

CARPENTER, T.P. Algebra in the elementary school: developing relational thinking. **ZDM – Int. J. Mathem. Educ.**, v.37, n.1, p.53-59, 2005.

CARR, W.; KEMMIS, S. **Teoría crítica de la enseñanza:** la investigación-acción en la formación del profesorado. Barcelona: Martinez Roca, 1988.

CHAPIN, S.H.; JOHNSON, A. **Math matters:** understanding the Math you teach, grades K-6. Sausalito: Math Solutions, 2006.

CLIQUETANDO. **Papagaio**. 2015. Disponível em: <http://cliquetando.xpg.uol.com.br/2014/05/papagaios-para-imprimir-e-colorir-gratis.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

COLORIR DESENHOS. **Pato**. 2015. Disponível em: <http://colorirdesenhos.com/desenhos/346-pato >. Acesso em: 16 out. 2015.

COLORIR.COM. **Desenho de galo a cantar para colorir**. 2015. Disponível em: <http://animais.colorir.com/a-quinta/galo-a-cantar.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

DESENHOS PARA COLORIR. **Cavalo Branco**. 2015. Disponível em: <http://www.desenhoseriscos.com.br/2013/01/desenhos-riscos-vaquinhas.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

DESENHOSERISCOS. **Desenho para colorir de vaquinha balançando o rabo**. 2015. Disponível em: <http://www.desenhoseriscos.com.br/2013/01/desenhos-riscos-vaquinhas.html>. Acesso em: 16 out. 2015.

ESSASEOUTRAS. **Porco**. 2015. Disponível em: <http://essaseoutras.xpg.uol.com.br/desenhos-para-colorir-de-animais-leao-girafa-esquilo-porco-e-mais/>. Acesso em: 16 out. 2015.

FALCÃO, J.T.R. Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar? **Boletim GEPEM**, n.42, p.27-36, 2003.

FILLOY, E.; ROJANO, T. From an arithmetical thought to an algebrical thought. In: **PROCEEDINGS OF THE 6TH INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION**. Wisconsin, 1984.

FUJII, T. Probing students' understanding of variables trough cognitive conflict problems: is the concept of a variable so difficult for students to understand? In: PATEMAN, A.; DOUGHERTY, B.J. ZILLIOX, J.T. (Ed.). **Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. PME, Honolulu, 2003. p.49-65.

FUJII, T.; STEPHENS, M. Using number sentences to introduce the idea of variable. In: GREENES, C.; RUBENSTEIN, R. (Ed.). **Algebra and algebraic thinking in school:** seventieth yearbook. Reston: National Council of Teachers of Mathemat, 2008. p.127-149.

GALINHAS PINTADINHA. **Galinha para pintar**. 2015. Disponível em: <www.galinhaspintadinha.com.br>. Acesso em: 16 out. 2015.

GARNICA, A.V.M. História oral e educação matemática. *In*: BORBA, M.C.; ARAÚJO, J.L. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GOMES, M.C.V. Álgebra, geometria e aritmética de mãos dadas no ensino fundamental. **Boletim GEPEM**, n.42, p.47-59, 2003.

INEP. **Prova Brasil**. 2015. Disponível em: <http://provabrasil.inep.gov.br/downloads>. Acesso em: 07 Fev. 2015.

IRWIN, K.C.; BRITT, M.S. The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zeland Numeracy Project. **Education Studies in Mathematics**, v.58, n.2, p.169-188, 2005.

KAMII, C. **A criança e o número:** implicações da teoria de Piaget. Campinas: Papirus, 1990.

KEMMIS, S.; MACTAGGART, R. **Cómo planificar la Investigación-Acción**. Barcelona: Laertes, 1988.

KIERAN, C. Developing algebraic reasoning: the role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. **Quadrante**, v.16, n.1, p.5-26, 2007.

NCTM. 2000. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Lisboa: APM, 2008.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PERRENOUD, P. **Dez novas competências para ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PIAGET, J. **Introduction à l'épistemologie génétique:** la pensée mathématique. Paris : Presses Universitaire de France, 1950. v.1.

PIAGET, J. **A epistemologia genética**. Petrópolis: Vozes, 1971.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **Gênese das estruturas lógicas elementares**. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

RADFORD, L. Signs, gestures, meanings: algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. **Plenary Lecture presented at the Sixth Conference of European Research em Mathematics Education (CERME 6)**. Lyon: Université Claude Bernard, 2009.

RADFORD, L. Layers of generality and types of generalization in pattern activities. **PNA**, v.4, n.2, p.37-62, 2010a.

RADFORD, L. The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. **For the Learning of Mathematics**, v.30, n.2, p.2-7, 2010b.

RADFORD, L. Grade 2 students' non-symbolic algebraic thiking. In: CAI, J.; Knuth, E. (Ed.), **Early Algebraization**. Berlin: Springer-Verlag, 2011.

STEPHENS, M.; WANG, X. Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and 7 students from Australia and China. **J. Mathem. Educ.**, v.1, n.1, p.28-39, 2008.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v.10, n.2/3, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In NUNES, T.; BRYNT, P. (Ed.) **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Hove: Psychology, 1997.

VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; De CORTE, E. Whole number concepts and operations. In LESTER, F. K. (Ed.) **Second handbook of research on mathematics teaching and learning.** Charlotte: NCTM & Information Age Publishing, 2007. p.557-628

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2000.

Submetido: outubro de 2015

Aceito: abril de 2016