CARACTERÍSTICAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA FRACCIÓN IMPROPIA EN ESTUDIANTES DE 9-12 AÑOS

Ruben Campo[1]
Universidad de Alicante
Salvador Llinares[2]
Universidad de Alicante

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é caracterizar o uso das ações de divisão e iteração na construção do conceito de fração imprópria em um contexto contínuo em alunos do ensino básico 9-12 anos de idade. 138 alunos de escolas primárias responderam a um questionário com tarefas centradas na representando frações impróprias. Os resultados desta pesquisa indicam que al representar frações impróprias os alunos coordenam as operações de dividir em montantes partes iguais e iteram a fração unitária. Os resultados desta pesquisa apóiam a hipótese de que os alunos devem superar a ideia de frações como partes de um todo para coordenar os diferentes níveis de unidades para representar frações impróprias

Palavras-Chave: Parte-todo. Fração imprópria. Fração unitária. Iterar. Dividir. Dividir-iterar. Coordenação de unidades.

RESUMEN

El objetivo de esta investigación es caracterizar el uso de las acciones de dividir e iterar en la construcción del concepto de fracción impropia en un contexto continuo en estudiantes de Educación Primaria de 9 a 12 años de edad. 138 estudiantes de Educación Primaria contestaron a un cuestionario con tareas de representar fracciones impropias. Los resultados de esta investigación indican que al representar fracciones impropias los estudiantes coordinan las operaciones de *dividir* una cantidad en partes iguales e *iteran* la fracción unitaria. Los resultados obtenidos en esta

[1] rcampohernandez@hotmail.com
[2] sllinares@ua.es

investigación apoyan la hipótesis de que los estudiantes deben superar la idea de las fracciones como partes *dentro de* un todo al coordinar diferentes niveles de unidades para representar fracciones impropias.

Palabras clave: Parte-todo. Fracción impropia. Fracción unitaria. Iterar. Dividir. Dividir-iterar. Coordinación de unidades.

ABSTRACT

The aim of this research is to characterize the use of split and iterate actions in building the concept of improper fraction in a continuous context in Primary Education (9-12 years-old). 138 primary school students answered a questionnaire with tasks of representing improper fractions. The results of this research indicate that students coordinate operations of dividing equal parts and iterate the unit fraction to represent improper fractions. The results in this research support the hypothesis that students have to overcome the idea of fractions as parts within a whole to coordinate different levels of units to represent improper fractions.

Keywords: Part-whole. Improper fraction. Unitary fraction. Iterating. Partitioning. Splitting. Units coordination.

INTRODUCCIÓN

Diversos estudios han puesto de manifiesto las dificultades que tienen los estudiantes en el aprendizaje de las fracciones ya que requiere un cambio conceptual desde los números naturales a los números racionales (Merenluoto y Lehtinen, 2004; Vamvakoussi, Van Dooren, y Verschaffel, 2012; Van Hoof, Vandewalle, Verschaffel, y Van Dooren, 2014;). Las fracciones están formadas por varios subconstructos (razón, operador, cociente y medida) algunos de los cuales reflejan la idea parte-todo (Behr, Lesh, Post, Silver, 1983; Charalambous y Pitta-Pantazi, 2007; Pantziara, Philippou, 2012). La idea parte-todo de las fracciones refleja una situación en la que una cantidad continua o un conjunto discreto de objetos es dividido en partes iguales, y en la que la fracción representa el número de partes tomadas en relación al número de partes en la que se ha dividido la unidad. En el desarrollo de esta idea los estudiantes deben comprender que las partes en las que se divide el todo deben ser iguales, que deben ser capaces de dividir un todo en partes iguales o reconocer cuando un todo ha sido dividido en partes iguales. Además, la comprensión del constructo parte-todo está vinculado a reconocer que en cuantas más partes dividamos un todo, cada parte es más pequeña, y ser capaces de reconstruir un todo a partir de la fracción, considerando las fracciones no unitarias como unidades múltiples (Battista, 2012). Es decir, poder reconocer 3/5 cuando se tiene representada la fracción 6/10 (considerando 2/10 como una unidad compuesta), o representar 6/5 a partir de la fracción 2/5 (usando la fracción 2/5 como *unidad compuesta* que es iterada tres veces para representar 6/5).

En el desarrollo del significado del constructo parte-todo para las fracciones un aspecto desafiante es la incapacidad de algunos estudiantes en pensar en fracciones no-unitarias más grandes que la unidad (fracciones impropias). Inicialmente los estudiantes manejan fracciones menores que la unidad apoyadas en la idea de hacer partes equitativas de un todo y a partir de ahí poder producir nuevas fracciones iterando una parte. Tzur (1999) y Olive y Steffe (2002) establecieron que tanto las operaciones básicas de *dividir e iterar,* como la construcción de *unidades compuestas* son un aspecto clave en la construcción de las fracciones impropias. Ramful (2014) puso de manifiesto, en la comprensión de la idea parte-todo de las fracciones, la importancia de conceptualizar las unidades compuestas y poder utilizarlas como unidades iterativas para construir fracciones mayores que la unidad. En relación a este aspecto, Steffe (2001) conjeturó que los estudiantes necesitan generar una nueva operación cognitiva que denominó *splitting* que se apoya en la coordinación de las acciones de dividir e iterar para producir fracciones impropias. En el desarrollo de esta nueva operación cognitiva los estudiantes deben utilizar unidades compuestas como parte del desarrollo de las estructuras multiplicativas (Olive y Steffe, 2002). Sin embargo, la manera en la que los estudiantes coordinan las acciones de dividir e iterar y usan las unidades compuestas para representar fracciones impropias (fracciones mayores que la unidad) no es bien comprendida todavía.

MARCO TEÓRICO

Los esquemas son constructos para modelar las estructuras cognitivas de los estudiantes y se basan en tres componentes: una *situación*, *las acciones específicas* de los estudiantes (procedimiento asociado con la situación) que se activan cuando se reconoce las situaciones de ese tipo, y l*os resultados* de la actividad. Las operaciones realizadas en actividades anteriores se usan para generar una “plantilla” - acciones mentales -. Por ejemplo, si le pedimos a un estudiante *Representa 3/5 de un todo* (situación), el estudiante activa las acciones mentales de dividir e iterar (acciones específicas). En primer lugar, el estudiante realiza la acción de dividir un todo que se evidencia cuando el estudiante dibuja el todo continuo y lo divide utilizando segmentos. A continuación, el estudiante activa la acción mental de iterar evidenciada por la acción de sombrear 3 de las 5 partes. Por último, se obtiene el resultado esperado de representar 3/5 (sombrear tres partes de 5).

Para Steffe (2001) “las operaciones son acciones mentales que son abstraídas de la experiencia para ser utilizadas en diferentes situaciones” y son “el componente clave de los esquemas” (Norton y McCloskey, 2009, p.46). En este sentido, en relación a la comprensión del esquema “fracción” identifica cinco operaciones claves;

- *Unitizing:* tratar un objeto o una colección de objetos como una unidad o un todo (e.g. tratar la representación de varios polígonos como un todo. Por ejemplo en la tarea en la que el todo se representa mediante dos rectángulos y se pide representar 3/4 de los dos rectángulos).

- *Partitioning (equi-partitioning)*, dividir un todo en partes equitativas (Steffe y Olive, 2010 (e.g. dividir un rectángulo en seis partes equitativas).
- *Iterating,* repetir una parte o una cantidad para crear otra cantidad (e.g repetir la representación de 1/5 tres veces para representar 3/5). (Steffe y Olive, 2010; Tzur, 1999), y
- *Disembedding*, separar una parte del todo mentalmente (e.g. poder identificar una representación de 1/5 cuando se tiene representado 3/5). (Steffe y Olive, 2010).
- *Splitting:* coordinación de *partitioning* e *iterating* (e.g. cuando se tiene representado el todo mediante un cuadrado, dividirlo en cuatro partes para representar ¼ e iterar cada parte cinco veces para representar la fracción 5/4).

Los esquemas *partición equitativa* (equi-partitioning) y *partitivo unitario* son esquemas necesarios para la construcción de las fracciones impropias. Con el esquema *partición equitativa*, los estudiantes son capaces de dividir equitativamente o en partes iguales un todo y con el esquema *partitivo unitario*, los estudiantes identifican la fracción unitaria y establecen una relación entre el todo y la fracción unitaria, un aspecto clave en la construcción de las fracciones impropias. Wilkings y Norton (2011) indicaron que los estudiantes que han sido capaces de construir un esquema *partitivo unitario* son capaces de desarrollar un conocimiento sobre las fracciones relativamente pronto.

Por otra parte, Hackenberg (2013) indica que la operación de *spliting* (coordinar dividir un todo en partes equitativas e iterar una parte para crear otra cantidad) marca el momento en el que los estudiantes empiezan a concebir las fracciones como algo medible implicando la coordinación de dos niveles de unidades (e.g. tres quintos como la iteración de 1/5 tres veces y el todo como 5 veces la fracción unitaria 1/5). En otras palabras, tres quintos es una unidad de tres fracciones unitarias y el todo es una unidad de cinco fracciones unitarias (Hackenberg, 2007). En esta situación existen tres cantidades susceptibles de ser usadas como algún tipo de unidad, la fracción 1/5, la fracción 3/5 y el todo. Desde este punto de vista, superar el todo para considerar fracciones impropias implica la coordinación de tres niveles de unidades, entre la parte iterada, el todo y el resultado (Hackenberg, 2007).

Teniendo en cuenta estas referencias, el esquema fraccionario está organizado alrededor de las operaciones cognitivas vinculadas a las acciones de dividir e iterar

- **Dividir** (*Partitioning*, dividir el todo en partes equitativas e identificar la fracción unitaria:

  * dividir un todo para identificar una fracción unitaria.

  * dividir una parte para identificar una fracción unitaria.

- **Iterar** una fracción (unitaria y no unitaria) para reconstruir el todo o para reconstruir otra fracción.

Nosotros podemos inferir las operaciones realizadas por los estudiantes cuando podamos reconocer que realizan las acciones de dividir e iterar en diferentes situaciones de manera sistemática. La identificación de cómo los estudiantes generan estas operaciones nos permitirá caracterizar la manera en la que los estudiantes construyen los significados de las fracciones impropias lo que nos proporcionará información sobre el desarrollo del esquema fraccionario.

Apoyados en el modelo teórico de Steffe y Olive (2010), el presente trabajo tiene como objetivo

- caracterizar el uso de las operaciones de dividir (*partitioning*) e iterar en contextos continuos en la construcción del significado de las fracciones impropias en estudiantes de 9 a 12 años como parte de la construcción del esquema fraccionario.

MÉTODO

Participantes

Los participantes han sido 138 alumnos de Educación Primaria (de 4º a 6º curso; Tabla 1). El currículum de estos cursos en relación a las fracciones establece, la introducción de fracciones propias, fracciones equivalentes, ordenación de fracciones sencillas y la escritura fraccionaria de un número no natural. Posteriormente, se introducen las fracciones equivalentes, reducción de dos o más fracciones a común denominador, y la relación entre una fracción y un número decimal junto a la adición y sustracción de fracciones con el mismo denominador. En particular se incide en la comparación de números naturales y fracciones, significado y utilidad de los números fraccionarios en contextos personales y sociales, la correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes, y el concepto de fracción como división de números naturales.

Tabla 1. Participantes

	Educación Primaria			Total
Curso/edad	4º (9-10 años)	5º (10-11 años)	6º (11-12 años)	
Nº de estudiantes	41	56	41	138

Instrumento

Para estudiar la comprensión de los estudiantes del esquema fraccionario y cómo evolucionaba a lo largo de los tres últimos años de la Educación Primaria (estudiantes de 9 a 12 años) nos centramos en el desarrollo de la operación cognitiva *spliting,* es decir, la coordinación de dividir en partes equitativas e iterar cada parte para construir una cantidad, en tareas de representar fracciones impropias en un contexto continuo. Para ello se diseñaron tres tipos de tareas;

- (a) del todo a una parte,
- (b) de la parte al todo, y
- (c) de una parte a otra parte.

Para diseñar las tareas se tuvo en cuenta la fracción facilitada en el enunciado y la fracción resultado, considerando los siguientes tipos de fracciones; fracciones unitarias, fracciones no unitarias menores que la unidad, y fracciones mayores que la unidad. De esta manera, se diseñaron 15 tareas (ítems) integradas por 28 actividades (Llinares y Sánchez, 1998).

Tabla 2. Ejemplos de tareas

Tarea		Enunciado	Pregunta	Operación
Dada la fracción unitaria	A 1.1	Si  es 1/3 de la unidad	Representa 1/6	Iterar + Dividir / Dividir
	A 1.3		Representa 5/3	Iterar
	A 2.1	Si  es 1/5 de la unidad	Representa 3/5	Iterar
	A 2.3		Representa la unidad	Iterar
Dado el todo	A 4.1	Si  es la unidad	Representa 1/4	Dividir
	A 4.2		Representa 3/4	Dividir + iterar
	A 4.3		Representa 4/3	Dividir + iterar

El ítem A.1.1 tiene como objetivo determinar en qué medida los estudiantes conciben la fracción unitaria (1/3) como un todo susceptibles de ser dividida.

Los ítems A.1.3, A.2.1 tienen como objetivo determinar cómo los estudiantes utilizan las fracciones unitarias (1/3 y 1/5) como unidades iterativas y establecen las relaciones necesarias para construir tanto fracciones mayores que la unidad como menores que la unidad no unitarias. Asimismo, el ítem A.2.3 aporta información sobre cómo los estudiantes establecen la relación entre el todo continuo y la fracción unitaria en tareas de reconstruir el todo.

El ítem A.4.1 tiene como objetivo determinar en qué medida los estudiantes son capaces de dividir un todo en partes iguales e identificar la fracción unitaria. En este sentido, mediante los ítems A.4.2 y A.4.3 se pretende obtener información sobre cómo los estudiantes identifican la fracción unitaria para iterarla un número determinado de veces y producir otra fracción, una fracción menor que la unidad no unitaria (3/4), y una fracción mayor que la unidad (4/3).

En el presente informe presentamos los resultados de las siete tareas de la Tabla 2. Estas tareas fueron contestadas por los estudiantes al final del curso por lo que asumimos que los estudiantes habían sido introducidos a los contenidos del curriculum mencionados anteriormente.

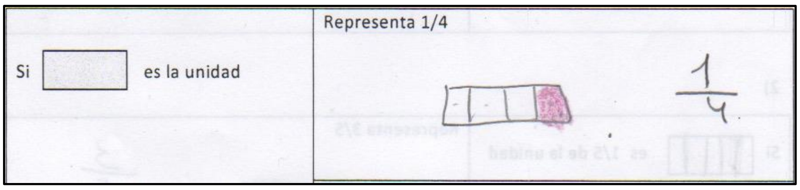
Análisis

Se realizó un análisis cuantitativo y otro cualitativo. En el análisis cuantitativo, las respuestas de los estudiantes fueron categorizadas como:

- "Respuestas correctas".
- "Respuestas incorrectas". En esta categoría, se han incluido las respuestas de los alumnos que no utilizan las acciones que requerían las tareas y las respuestas en blanco.

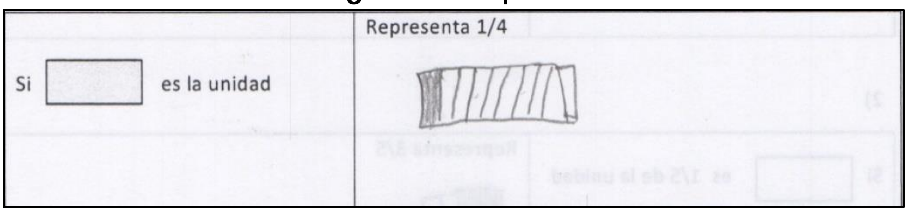
En la Figura 1 presentamos un ejemplo de respuesta correcta. La tarea pertenece al tipo (a) representar una fracción unitaria dado el todo, en la que subyace la operación cognitiva de dividir de manera equitativa que está relacionado con el esquema de partición equitativa.

Figura 1. Respuesta correcta



En esta misma tarea hubo estudiantes que no aplican la acción de dividir de manera equitativa. Un ejemplo de una respuesta incorrecta (Figura 2), el estudiante ha dividido la unidad en más partes de las que se le pedía, representando 1/10.

Figura 2. Respuesta incorrecta



En el análisis cualitativo, en primer lugar identificamos las acciones realizadas por cada estudiante en la resolución de los diferentes ítems intentando reconocer evidencias del uso de las acciones de dividir y de iterar en cada uno de ellos. En segundo lugar, nos centramos de manera global en las respuestas dadas a cada uno de los ítems. Al centrarnos en la resolución de cada ítem por separado nos permitió reconocer las diferentes acciones que los estudiantes generaban para la resolución del ítem. Posteriormente, viendo la manera en la que los estudiantes eran capaces o no de repetir de manera sistemática la misma *acción* en los diferentes ítems pudimos identificar cómo se estaban generando las *operaciones* cognitivas de dividir e iterar y cómo eran o no coordinadas en función de la demanda cognitiva de cada ítem. De esta manera, a partir de las acciones visibles identificadas, pudimos inferir las operaciones cognitivas y la forma en la que la coordinación de las operaciones de dividir e iterar fundamentaba la emergencia de la operación de *spliting* como constitutiva del esquema fraccionario.

Por otra parte, teniendo en cuenta el formato escrito del instrumento, este análisis proporcionó información relevante sobre las principales dificultades de los estudiantes en función de las características de las tareas propuestas. Los resultados de este análisis cualitativo se han agrupado en dos bloques,

- Características de las resolución de las tareas: dado el todo representar fracciones menores y mayores que la unidad, y
- Características de las tareas: dada la fracción unitaria representar fracciones menores y mayores que la unidad.

Además, las respuestas incorrectas se han agrupado para mostrar similitudes en las dificultades a la hora de resolver la tarea.

RESULTADOS

En primer lugar, presentamos los resultados del análisis cuantitativo relativos al nivel de éxito y posteriormente se presentarán los resultados del análisis cualitativo. Estos resultados están organizados atendiendo al tipo de tarea y de las acciones realizadas por los estudiantes permitiéndonos inferir las operaciones cognitivas que han desarrollado. De esta manera, las tareas presentadas nos han permitido obtener evidencias de la realización de las acciones de *unitizing* (considerar una cantidad como una unidad); *partitioning* (dividir en partes equivalentes), *iterating* (iterar una parte para representar una cantidad), y *spliting* (coordinar las acciones de dividir en partes equivalentes e iterar una parte para representar otra parte).

Niveles de éxito

Operación partitioning *e* iterating*: Dado el todo, representar fracciones menores y mayores que la unidad*

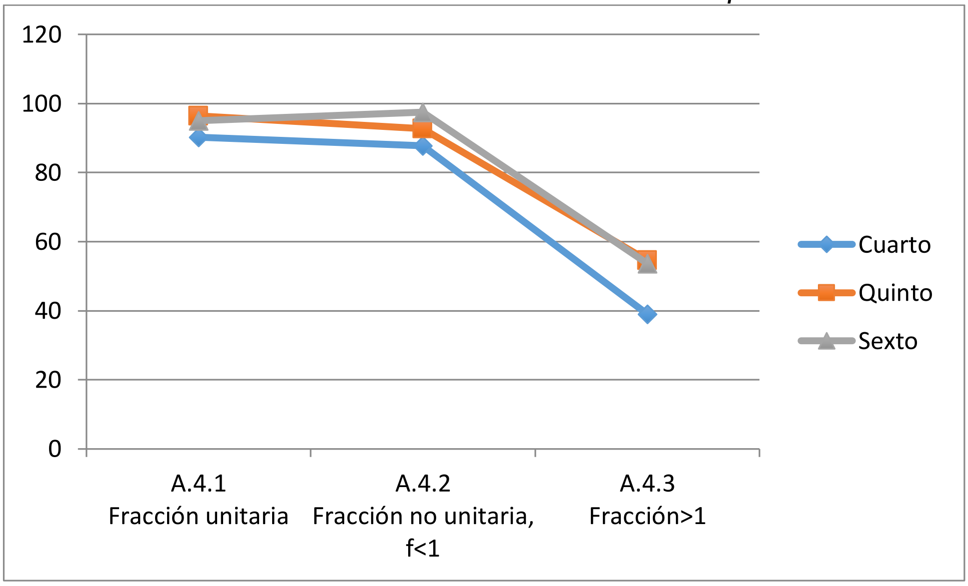
La tabla 3 recoge el nivel de éxito en las tareas de representar una fracción dado el todo. Los resultados muestran que los estudiantes en los tres cursos suelen resolver mejor las tareas que requiere representar las fracción unitaria (A.4.1, 93,9%) y una fracción no unitaria menor que la unidad (A.4.2, 92,7%) con un claro descenso en las tareas que piden representar fracciones mayores que la unidad (A.4.3, 49,08%). Además, los niveles de éxito van aumentado a lo largo de los cursos, en cuarto con un 72,4%, en quinto con un 81,2% y en sexto con un 82,1% de éxito. El principal aumento se da en el paso de cuarto a quinto curso, manteniéndose este comportamiento en las tres tareas de representar fracciones dado el todo.

Los porcentajes de éxito de la tarea representar fracciones unitarias (A.4.1) son similares en los tres cursos. En cuanto a la tarea representar fracciones no unitarias menores que uno (A.4.2), la variación de los niveles de éxito entre los cursos es similar a la tarea anterior. La evolución de los niveles de éxito en la tarea "representar fracciones impropias, dado el todo" a lo largo de los tres cursos muestra una gran variación entre 4º y 5º curso, (39% vs 54,6%), siendo la variación menor desde 5º a 6º. En esta tarea aunque el patrón del nivel de éxito en los diferentes cursos es el mismo, se da un mayor salto en el paso de cuarto a quinto debido al porcentaje de éxito bajo en las tareas de representar fracciones mayores que uno en los alumnos de cuarto (39%). Por otro lado, la variación en los niveles de éxito de las tareas "dado el todo, representar facciones menores que uno, no unitarias" y "dado el todo, representar fracciones unitarias" es casi inapreciable.

Tabla 3. Niveles de éxito tareas *"Dado el todo, representar una fracción".*

	A.4.1 Fracción unitaria	A.4.2 Fracción no unitaria , f< 1	A.4.3 Fracción>1 (fracción impropia)	Total
Cuarto	90,2	87,8	39,0	72,4
Quinto	96,4	92,7	54,6	81,2
Sexto	95,1	97,6	53,7	82,1
Total	93,9	92,7	49,1	78,6

Gráfico 1. Niveles de éxito en las tareas *Dado el todo representar una fracción*



Por otra parte, el hecho de que las diferencias entre representar la fracción unitaria (A.4.1.) y representar la fracción mayor que uno (A.4.3.) son mayores que las diferencias entre representar fracciones no unitarias menores que 1 y fracciones mayores que 1, puede estar indicando que usar la fracción unitaria como unidad iterativa para representar fracciones menores que uno es necesario pero no suficiente para poder usar las fracciones unitarias para representar fracciones mayores que uno. Este hecho pone de manifiesto que superar la unidad requiere algo más que las operaciones de dividir la unidad e iterar la fracción unitaria como unidades contables.

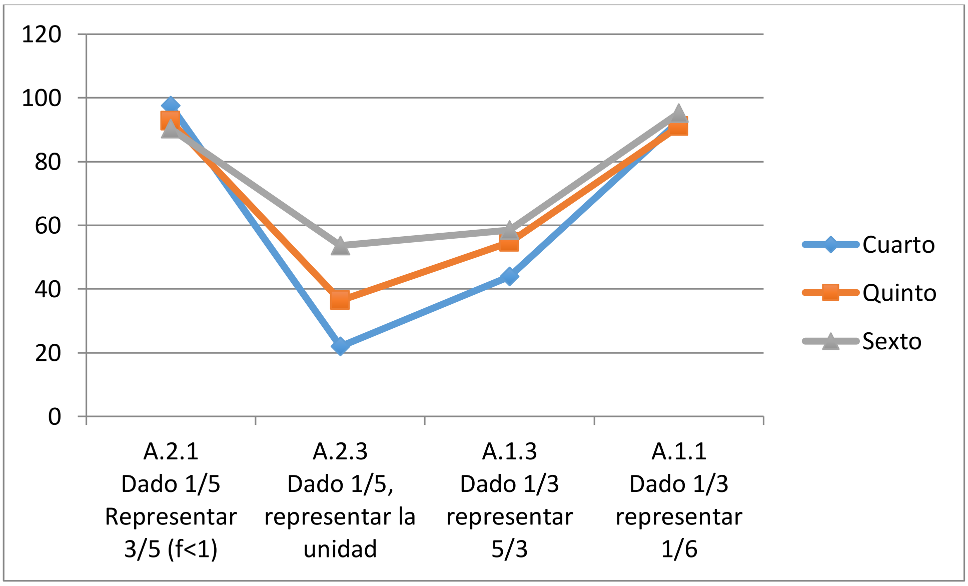
Operación iterating*: Dada la fracción unitaria, representar fracción menores y mayores que la unidad:*

La tabla 4 recoge los porcentajes de éxito en las tareas “Dada una fracción unitaria representar otra fracción o el todo”. Los resultados muestran que los estudiantes suelen resolver mejor en los tres cursos los ítems “dada la fracción unitaria representar una fracción no unitaria menor que la unidad” (A.2.1) con un 93,5% de éxito y representar otra fracción unitaria (A.1.1) con un 92,9 % de éxito, frente a un claro descenso en los ítems que requerían la representación de la unidad (A2.3) con un 37,3% y las fracciones mayores que la unidad (A.1.3) con un 52,3% de éxito. Sin embargo, hay que indicar que representar la unidad a partir de una fracción unitaria (A.2.3.) resultó más difícil en todos los cursos que representar fracciones mayores que la unidad a partir de una fracción unitaria (A.1.3.). Esta diferencia fue disminuyendo a lo largo de los tres cursos. Globalmente los niveles de éxito han aumentado a lo largo de los cursos, en cuarto con un 64%, en quinto con un 68,6% y sexto con un 74,4% de éxito.

Tabla 4. Niveles de éxito en las tareas “Dada la fracción unitaria representar…”.

	A.2.1 Dado 1/5 Representar 3/5 (f<1)	**A.2.3** Dado 1/5, representar la unidad	**A.1.3** Dado 1/3 representar 5/3	**A.1.1** Dado 1/3 representar 1/6	**Total**
Cuarto	97,6	21,9	43,9	92,7	64,0
Quinto	92,7	36,4	54,5	90,9	68,6
Sexto	90,2	53,7	58,5	95,1	74,4
Total	93,5	37,3	52,3	92,9	69,0

Gráfico 2. Niveles de éxito dada la fracción unitaria



Si observamos la evolución de los niveles de éxito a lo largo de los tres cursos en los diferentes ítems, podemos observar que el ítem “Dado 1/5 representar 3/5” (A.2.1) hay una disminución en el nivel de éxito entre cuarto (97,6%) y sexto (90,2). Mientras que en la tarea “dado 1/5 representa la unidad” (A.2.3) se observa un aumento del éxito, de un 36,4% en quinto y un 53,7% en sexto. Esta evolución se aprecia en menor medida en la tarea “dado 1/3 representar 5/3” (A.1.3) en la que los resultados muestran un 43,9% de éxito en cuarto, 54,5% en quinto y 58,5% en sexto.

En el gráfico 2 se puede observar el descenso en el nivel de éxito en la tarea “Representar la unidad a partir de 1/5” (A.2.3) y el ligero aumento en la tarea “Representar 5/3 a partir de 1/3” (A.1.3).

Estos resultados muestran un amplio descenso en los niveles de éxito cuando los estudiantes tienen que generar fracciones mayores que la unidad y tienen que reconstruir el todo a partir de fracciones unitarias. Asimismo, los resultados indican que los niveles de éxito en la reconstrucción de la unidad aumentan más claramente a lo largo de los tres cursos que en el caso de representar una fracción mayor que la unidad.

Acciones reflejando las dificultades

La tabla 5 muestra los resultados del análisis cualitativo relativo a las acciones realizadas por los estudiantes cuando daban respuestas erróneas o no adecuadas. Las acciones se han agrupado en siete categorías.

En la D1, el estudiante no respeta el modelo de figura geométrica dada para hacer la representación y pone de manifiesto un uso abusivo de la forma circular de representación.

En la D2, el estudiante manifiesta dificultades en coordinar dos acciones (dividir e iterar). El estudiante inicialmente identifica fracciones unitarias no correctas y las itera para representar la fracción mayor que 1 pedida. (En el ítem A4.3, dado el todo representar 4/3, el estudiante representa ½ que itera tres veces, en vez de representar 1/3 e iterarlo cuatro veces)

La D3 muestra las acciones de los estudiantes que no dividen el todo en partes congruentes. En el ejemplo, el estudiante representa las tres primeras partes del todo cada vez más pequeñas y parece que cuándo tiene que representar la cuarta y última parte, añade una parte más pequeña.

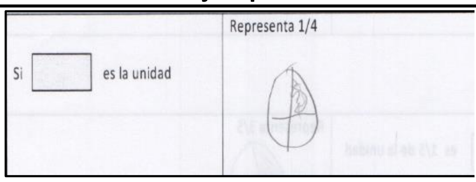
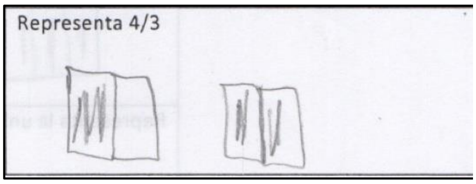
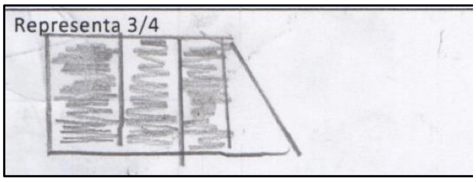
En la D4, el alumno usa la representación de la fracción dada como si fuera la unidad.

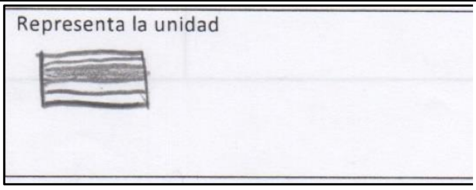
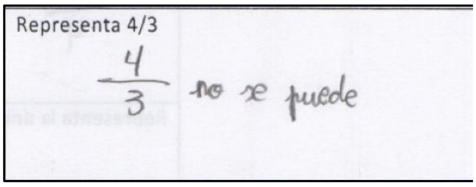
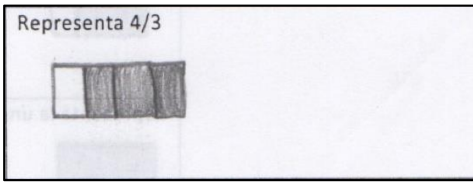
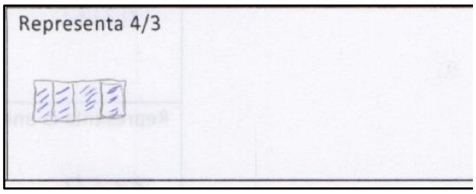
La D5, muestra el pensamiento del estudiante; “4/3 no se puede” o lo que es lo mismo, el estudiante todavía no ha desarrollado la capacidad para representar fracciones mayores que la unidad.

La D6, el alumno cuándo observa que tiene que representar 4/3, intercambia el papel que juega el numerador por el del denominador, por lo que representa 3/4, representando así una fracción propia en vez de una impropia.

En la D7, el estudiante solo itera hasta la unidad sin pasar de ella, por lo que el resultado mostrado es las reconstrucción de la unidad y no la representación de 4/3 como se le indicaba en el enunciado de la tarea.

Tabla 5. Acciones.

	Acciones	Ejemplo	4º	5º	6º
D1	Alumnos que han resuelto la tarea de forma satisfactoria sin mantener la forma de representación		X		
D2	Alumnos que han representado mitades en vez de fracciones mayores que la unidad		X		
D3	Alumnos que no dividen el todo de forma equitativa.		X	X	X

D4	Alumnos que representan la fracción unitaria en vez de la unidad		X	X	X
D5	Alumnos que afirman que no se pueden representar una fracción por encima de la unidad.			X	
D6	Alumnos que han representado una fracción menor que la unidad en vez de mayor que la unidad		X	X	X
D7	Alumnos que representan la unidad en vez de 4/3				X

Estas acciones muestran que los estudiantes tienen dificultades en manifestar un uso adecuado de la operación de dividir en partes congruentes (partitioning) como en la D2 en la que representan mitades en vez de tercios o como en la D3, así como las dificultades a la hora de utilizar la fracción unitaria como unidad iterativa (D4), llegando solamente a identificar la fracción unitaria. Sin embargo, las categorías D6 y D7 pueden ser consideradas evidencias de que los estudiantes empiezan a coordinar dos niveles de unidades representando una fracción menor que la unidad, pero no tres niveles de unidades representando una fracción mayor que la unidad. Globalmente consideradas, estas categorías indican que las dificultades de los estudiantes de primaria están vinculadas a no dividir de forma equitativa (D3), representar el todo a partir de una fracción unitaria (D4), y representar una fracción mayor que la unidad (D6)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El presente trabajo proporciona información sobre las características del uso de las operaciones de *dividir (partitioning) e iterar* y su coordinación en la construcción del esquema fraccionario en contextos continuos en estudiantes de Educación Primaria (de 4º a 6º curso, 9-12 años). Los resultados indican la existencia de una barrera cognitiva que impide a los estudiantes representar fracciones impropias. En primer lugar, los estudiantes tienen pocas dificultades en representar fracciones menores que la unidad (tanto fracciones unitarias como no unitarias). En concreto, los estudiantes identifican con facilidad la fracción unitaria (independientemente del tipo de tarea; A.4.1 y A.1.1) e iterar esa fracción para luego construir otra (A.4.2 y A.2.1).

En segundo lugar, la identificación de la fracción unitaria implica dos aspectos; dividir el todo en fracciones congruentes (mediante la interiorización como operación de las acciones de dividir en partes congruentes) y establecer una relación entre la fracción unitaria y el todo. Nuestros resultados indican que esta relación no es simétrica.

Sin embargo, interiorizar las acciones de dividir de manera equitativa e iterar no deriva necesariamente en ser capaces de coordinar estas operaciones para superar la unidad y representar fracciones impropias. En este sentido, la constitución de la fracción unitaria como una unidad iterativa parece ser que pasa por dos momentos. En primer lugar permitiendo a los estudianates representar fracciones menores que uno, y en segundo lugar ser capaz de superar el todo (y por tanto ampliar la idea de parte-todo dentro de un todo vinculada a la fracción) para representar fracciones impropias. En esta línea, los estudiantes que han resuelto las tareas de “dado el todo, representar una fracción no unitaria menor que la unidad” (A.4.2) y “dada la fracción unitaria, representar una fracción no unitaria menor que la unidad” (A.2.1) (más del 90% en ambos casos) muestran ser capaces de identificar la fracción unitaria (1) y utilizar la fracción unitaria como unidad iterativa para construir unidades compuestas menores que la unidad (2) (estas unidades compuestas son construidas considerando un número de veces la fracción 1/n). Según Steffe (2001) la capacidad de construir unidades compuestas a partir de la fracción unitaria es una característica común en los estudiantes que son capaces de coordinar dos niveles de unidades.

Por lo tanto, parece ser que las operaciones de dividir e iterar no son una de las principales dificultades en la representación de fracciones impropias. En este sentido, parece ser que la principal dificultad radica en la relación que establecen los estudiantes entre el todo y la fracción unitaria, ya que aunque para Steffe (2001) los estudiantes sí establecen esta relación, no parece ser suficiente para que construyan la unidad a partir de la iteración de la fracción unitaria. Esta conclusión viene apoyada por el descenso de los niveles de éxito a un 37,3% en las tareas de reconstruir la unidad, frente a un 93,5% (dado el todo) y un 92,7% (dada la fracción unitaria) cuando tienen que representar fracciones no unitarias menores que al unidad.

Asimismo, representar fracciones impropias mediante la iteración de fracciones unitarias también resulta difícil a los estudiantes. En concreto, los resultados cualitativos ponen de manifiesto que, independientemente del tipo de tarea, cuándo los estudiantes tienen que representar fracciones mayores que la unidad pueden intercambiar las posiciones de numerador y denominador considerando como denominador el número mayor. Esta conducta, junto a la representación de la unidad como si fuera una fracción mayor (e.g. 4/4 como 4/3) son ambas características comunes de estudiantes que no son capaces de coordinar tres niveles de unidades, una reticencia a nivel cognitivo en la creación de una fracción mayor que la unidad (Hackenberg, 2007). Este hecho marca otro de los saltos cognitivos en la representación de fracciones. Una de las conductas que se repetía en las respuestas de los estudiantes de quinto curso en la resolución de las fracciones mayores que la unidad, es que afirmaban que esa fracción "no se podía realizar". Este tipo de respuestas está en consonancia con las respuestas facilitada por Joe, un estudiante del tercer curso en la investigación de Olive y Steffe (2002) que afirmaba que iterar fracciones por encima de la unidad (debía representar 6/5 a partir de 1/5) era una operación imposible pues "como vas a iterar 6 unidades de algo que solo tiene 5 unidades" (Olive y Steffe, 2002).

Steffe (2001) afirma que un estudiante que es capaz de representar fracciones impropias ha establecido las relaciones necesarias para coordinar tres niveles de unidades y por tanto es capaz de reconstruir el todo (e.g concebir 12/11 como una unidad de 12 unidades, pudiendo ser cada una de ellas iterada 11 veces para construir el todo). Sin embargo, nuestros datos indican que en todas las edades, reconstruir el todo fue más difícil que reconstruir la fracción impropia. Los niveles de éxito de la tarea "dada la fracción unitaria, representa el todo" (dado 1/5, representar la unidad) fueron más bajos que los niveles de éxito de la tarea “dada la fracción unitaria, representar una fracción impropia” (dado 1/3, representar 5/3). Este aspecto requiere más investigación considerando si el modo de representación (continuo, discreto, u otro) y el formato de los ítems influyen (Tunç-Pekkan, 2015). En conclusión, nuestros resultados ponen de manifiesto dos saltos cognitivos en la construcción del concepto de fracción impropia; la reconstrucción y representación del todo y la representación de fracciones impropias a partir de la fracción unitaria.

REFERENCIAS

Battista, M.T., (2012). *Cognition-Based Assessment and Teaching of Fractions. Building on Students’ Reasoning*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). ‘Rational number concepts’. En R. Lesh y M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, New York, pp. 91–125.

Charalambous, Ch. y Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing a Theoretical Model to Study Students’ Understanding of Fractions. *Educational Studies in mathematics, 64*, 293-316.

Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior,* 26 (1), 27-47.

Hackenberg, A. J. (2013). The fractional knowledge and algebraic reasoning of students with the first multiplicative concept. *Journal of Mathematical Behavior,* 32, 538-563.

Llinares, S. y Sanchez, V. (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Merenluoto, K. & Lehtinen, E. (2004). Number concept and conceptual change: towards a systemic model of the processes of change. *Learning and Instruction*, 14 (5) 519-534.

Norton A. y McCloskey A. (2009). Using Steffe’s Advanced Fraction Schemes. *Teaching Children Mathematics,* 15 (1), 44-50.

Olive, J., y Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(4), 413-437.

Pantziara, M. y Philippou, G. (2012). Levels of Students’ « conceptions » of fractions. *Educational Studies in mathematics, 79,* 61-83.

Ramful A., (2014). Reversible reasoning in fractional situations: Theorems-in-action and constraints. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 119-130.

Steffe, L. P. (2001). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 267-307.

Steffe, L. P. y Olive, J., (2010). *Children’s Fractional Knowledge*. London: Springer-Verlag.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children’s fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics, 89,* 419-441.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children’s construction of improper fractions and the teacher’s role in promoting that learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, 30(4), 390-416.

Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., y Van Dooren, W. (2014). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. *Learning and Instruction,*

http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2014.03.004

Vamvajoussi X., Van Dooren W. Y Verschaffel L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behaviour 31* (3), 344.355.

Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2011). The splitting loope. *Journal for Research in Mathematics Education*, 42(4), 386-406

Submetido: Setembro de 2015

Aceito: Novembro de 2015