

ANALISANDO A LINGUAGEM MATEMÁTICA E REFLETINDO SOBRE O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA PRÁTICA DE ESBOÇO DE CURVAS NO ENSINO SUPERIOR

Adriano Luiz dos Santos Né¹

Universidade do Estado de Santa Catarina

Méricles Thadeu Moretti²

Universidade Federal de Santa Catarina

RESUMO

No presente artigo temos a intenção de apresentar uma investigação a respeito do processo de ensino e aprendizagem da prática de esboço de curvas do ensino superior, particularmente na disciplina de Cálculo. Para tal tarefa, buscamos estudar o uso que se faz da linguagem matemática em sala de aula, tomando como estudo de caso uma turma de estudantes da disciplina *Cálculo A*, da Universidade Federal de Santa Catarina. Nesta investigação, utilizamo-nos de ferramentas teóricas fornecidas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, e o Enfoque Ontossemiótico, de Juan Díaz Godino, o que atribuiu à investigação uma perspectiva semiótica da atividade matemática. A articulação que realizamos com estas teorias parece fornecer informações importantes a respeito da prática matemática realizada pelos estudantes em sala de aula e a prática que a academia tem a intenção de ensinar, o que possibilita um meio de compará-las para então se intervir no processo de ensino e aprendizado da prática de esboço de curvas.

Palavras-Chave: Esboço de curvas. Linguagem matemática. Semiótica. Ensino e Aprendizagem de Matemática.

ABSTRACT

In the present article, we intend to conduct an investigation about the process of teaching and learning in the sketching curves practice on the higher education,

¹ adriano.ne@udesc.br.

² mthmoretti@gmail.com.

particularly in the Calculus' discipline. For such task, we seek study the use made of mathematical language in the classroom, taking as case study a students' class of *Calculus A* discipline, from the Federal University of Santa Catarina (Brazil). In this investigation, we used the theoretical tools provided by the Registers of Semiotic Representation's Theory, by Raymond Duval, and the Ontosemiotic Approach, by Juan Díaz Godino, which attaches to the investigation a semiotic perspective of mathematical activity. The articulation that we conducted connecting these theories seem to provide important information about the mathematical practice performed by students in the classroom and the practice that the academy intends to teach, which provides a means to compare them and so intervene in the process of teaching and learning on the sketch curves practice.

Keywords: Sketch curves. Mathematical language. Semiotics. Mathematics' Teaching and Learning.

INTRODUÇÃO

A pesquisa que neste momento apresentamos insere-se na área do ensino e da aprendizagem de matemática. Tomamos como objeto de estudo a prática de esboço de curvas ensinada nas disciplinas referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

No ensino superior, o esboço de curvas assume maior importância por trazer ferramentas analíticas valiosas para a realização de análises gráficas, que é uma atividade comum a muitos cursos superiores e, com isso, parece trazer relevância para pesquisas que deem atenção ao seu processo de ensino e aprendizagem na academia.

São vários os “entes matemáticos” que são utilizados durante a prática de esboço de curvas, tais como cálculos algébricos de derivadas, limites e equações, identificação de conceitos e propriedades geométricas em gráficos de funções, regras para escrita e expressão, relação entre objetos, entre outros. Manipular toda esta série de objetos que intervêm nesta prática, além de reconhecer outros que possam emergir da mesma, demanda, entre outras coisas, o uso de uma linguagem matemática que sirva tanto de representação quanto de elemento regulador e operativo da atividade matemática.

Desta forma, assumimos aqui a linguagem não só como representativa de algo, mas como algo que dá condições de possibilidades à realização das práticas matemáticas, como elemento que cria racionalidades e as “movimenta”. Entender a linguagem desta forma permite pensar na possibilidade de se obter informações a respeito do processo de ensino e aprendizagem de matemática através dos usos que são feitos da linguagem durante a atividade matemática.

E uma vez tendo apresentado estas considerações, apresentamos a questão que tomamos como sendo a que dará um direcionamento para esta nossa escrita: **De que maneira uma análise do uso da linguagem matemática na prática de esboço de curvas, no ensino superior, permite intervenções didáticas no processo de ensino e aprendizagem desta prática?**

Perceba que nos referimos a “uma análise”, pois entendemos que outras análises poderiam ser feitas de várias formas diferentes, obtendo-se resultados diferentes, também não nos referimos a “a análise”, por não se tratar de tentar seguir um modelo de análise para obter informações da linguagem e então agir.

E preferimos mencionar “intervenção”, porque entendemos que a análise do uso da linguagem permite tanto ao professor avaliar o desempenho dos estudantes, quanto repensar suas estratégias em sala de aula para efetivar o ensino, desta forma, pensamos a análise da linguagem como elemento que intervém no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

E das várias maneiras que nós poderíamos nos embasar teoricamente para buscar por uma resposta para a questão posta, utilizaremos das ferramentas teóricas que são fornecidas pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica e o Enfoque Ontossemiótico da atividade matemática, teorias estas que apresentaremos nas seções que seguem.

Para a realização desta pesquisa, lançando mão dos referenciais teóricos que adotamos, obtivemos dados para análise atuando numa turma de 40 estudantes de uma disciplina de Cálculo, na Universidade Federal de Santa Catarina. Como buscamos por maneiras de analisar o uso da linguagem matemática para então inferir no ensino e na aprendizagem, a análise das interações em sala de aula de apenas uma turma pareceu-nos trazer elementos suficientes para a realização desta investigação.

CONSTRUINDO UMA BASE TEÓRICA PARA COMPARAÇÕES ENTRE PRÁTICAS MATEMÁTICAS

Para analisar o uso da linguagem matemática optamos, primeiramente, por organizar elementos teóricos que possibilitem uma comparação entre as práticas matemáticas acadêmicas – práticas socialmente aceitas e efetivadas no seio da comunidade dos matemáticos – e as práticas realizadas pelos estudantes em sala de aula; que aqui denominaremos a primeira, da academia, como sendo *práticas*

institucionais ou *epistêmicas* e a segunda, dos estudantes, como *práticas pessoais* ou *cognitivas* (GODINO; BATANERO, 1994).

A partir desta escolha, tomamos alguns princípios do Enfoque Ontossemiótico (EOS)³ do conhecimento matemático como parte de nossa base teórica. Entre eles, estamos entendendo a matemática como uma atividade socialmente compartilhada, de resolução de problemas, que possui linguagem simbólica e sistemas conceituais logicamente organizados (GODINO; BATANERO, 1994). A partir deste entendimento, consideraremos como *prática matemática* “toda atuação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas”. (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Nesta pesquisa, entendemos o *ensino* como sendo a tentativa de inserir os estudantes em práticas institucionais, de tentar fazer com que eles sejam capazes de realizar práticas matemáticas segundo os significados⁴ suportados pela instituição⁵ que se pretende inseri-lo, no caso do esboço de curvas, os significados suportados pela matemática acadêmica. Já a *aprendizagem* será entendida como a apropriação, por parte dos estudantes, destes significados partilhados pela comunidade que se tem a intenção de inseri-los.

Perceba que com estas considerações, analisar os processos de ensino e aprendizagem leva em consideração um “acoplamento” (GODINO *et al.*, 2011) entre as práticas epistêmicas e cognitivas há pouco mencionadas.

Precisaremos ainda de um meio para criar representações das práticas matemáticas que temos a intenção de investigar e, para isso, utilizaremos da *ontologia* proposta por Godino e seus colaboradores para pensar a atividade matemática. O

3 Teoria que vem sendo desenvolvida por Juan Díaz Godino e vários colaboradores como, por exemplo, os pesquisadores Carmem Batanero e Vicenç Font.

4 Mais adiante detalharemos mais a noção de significado.

5 “Uma instituição está constituída pelas pessoas envolvidas numa mesma classe de situações problemáticas; compromisso mútuo com a mesma problemática implica na realização de determinadas práticas sociais que frequentemente apresentam características particulares e são, geralmente, condicionadas pelos instrumentos disponíveis na referida instituição, assim como em suas regras e modos de funcionamento.” (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11).

EOS sugere uma classificação mínima para os objetos matemáticos, denominada de objetos primários, a saber:

Elementos linguísticos (termos, expressões, notações, gráficos,...) em seus diversos registros (escrito, oral, gestual,...)

Situações - problemas (aplicações extra-matemática, tarefas, exercícios,...)

Conceitos - definições (introduzidos mediante definições ou descrições) (reta, ponto, número, média, função,...)

Proposições (enunciados sobre conceitos,...)

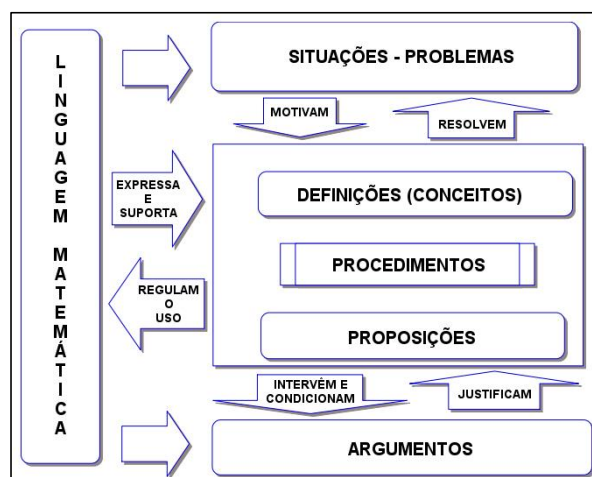
Procedimentos (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,...)

Argumentos (enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo,...).

(GODINO *et al.*, 2011, p.6. Tradução nossa)

Os *elementos linguísticos*, ou a linguagem – como se refere Godino em outras publicações⁶ –, “representa[m] as demais entidades e serve[m] de instrumento para a ação” (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.14) e as *situações* ou *problemas* são o que justificam e/ou dão origem a atividade matemática. Os *conceitos* ou *definições*, *proposições* e *procedimentos* intervêm e condicionam os *argumentos*, que, por sua vez, justificam estes primeiros. Na Figura 1 trazemos um esquema de como estas entidades se relacionam segundo o EOS.

Figura 1 – Configuração dos objetos primários



Fonte: GODINO *et al.*, 2011, p.6. (tradução nossa).

⁶ Como, por exemplo, Godino (2002) e Godino, Batanero e Font (2008).

Não temos a intenção de tomar o esquema da Figura 1 como um modelo ou estrutura “rígida” para estabelecer uma relação entre estas entidades, mas uma maneira para entender como estas podem ser configuradas segundo a teoria. Com esta atitude acreditamos haver possibilidades de pensar outras maneiras de configurá-las, se assim julgarmos necessário.

Sobre estes objetos, Godino *et al.* (2011) diz ainda que

A consideração de uma entidade como primária não é uma questão absoluta, mas relativa, posto que se trata de entidades funcionais e relativas aos jogos de linguagem⁷ (marcos institucionais, comunidade de práticas e contextos de uso) em que participam; tem também um caráter recursivo, no sentido de que cada objeto, dependendo do nível de análise, pode estar composto por entidades dos outros tipos (GODINO *et al.*, 2011, p.7 - tradução nossa).

É através destas entidades básicas que apresentamos a noção de *significado* sugerida pelo EOS, e que adotaremos mais adiante para realizar nossa análise. Para o EOS, o significado está nas várias relações entre os objetos primários que são manipulados durante a atividade matemática, ou, como sugerem Godino e seus colaboradores, ao se estabelecer *funções semióticas* entre os objetos matemáticos.

Nas práticas matemática da academia, por exemplo, o significado atribuído às variações⁸ de uma função não está na conceituação de crescimento e decrescimento, mas nas associações que se estabelecem entre os vários objetos matemáticos que são mobilizados ao se falar a respeito de variações de funções; o significado deste objeto está na devida associação entre definições, proposições, procedimentos, argumentações, uso da linguagem e reconhecimento das várias situações e problemas em que o estudo da variação de função emerge; não se trata apenas de saber uma definição, mas de reconhecer uma prática. Trata-se de uma pragmática.

⁷ Godino diz, em alguns de seus trabalhos, que se utiliza do mesmo conceito de *jogos de linguagem* posto por Wittgenstein em sua obra *Investigações Filosóficas*, de 1953. Ele baseia-se na interpretação feita por Baker e Hacker (BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. Wittgenstein. *Rules, grammar and necessity*. An analytical commentary on the Philosophical Investigations. Glasgow: Basil Blackwell, 1985).

⁸ As *variações* de uma função são seus intervalos de crescimento e decrescimento.

Esta associação entre objetos que é adotada pelo EOS é feita baseando-se na noção de *função semiótica* proposta por Umberto Eco⁹ e que é apresentada da seguinte maneira:

Um signo está constituído sempre por um (ou mais) elementos de um PLANO DA EXPRESSÃO colocados convencionalmente em correlação com um (ou mais) elementos de um PLANO DO CONTEÚDO [...]. Uma função semiótica se realiza quando dois funtivos (expressão e conteúdo) entram em correlação mútua [...]” (ECO¹⁰ *apud* GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.15).

Observe na Figura 2 a configuração que construímos referente ao significado institucional do *Teste da Derivada Primeira* (TD1^a) para a identificação de extremos relativos. Como acabamos de mencionar, o significado do TD1^a não está em definições formais – se pensarmos segundo o EOS –, mas no *sistema de práticas* operativas e discursivas relacionadas a este objeto (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Para criar esta *configuração epistêmica*¹¹, tomamos como objetivo para o ensino que os estudantes sejam capazes de ‘identificar que quando, numa vizinhança de um ponto crítico, a derivada muda de sinal, este ponto é um extremo relativo’.

A *situação-problema* que motiva a atividade matemática que se tenta instituir é a que, ‘a partir de registros gráficos de extremos relativos, analisa-se o comportamento do sinal da derivada em suas vizinhanças’.

Nesta configuração apontamos as *definições* de ‘ponto de máximo e mínimo relativos’¹², as *propriedades* são ‘As retas tangentes mudam de crescentes para decrescentes, numa vizinhança do ponto de máximo’ e ‘O sinal da derivada muda de positivo para negativo na vizinhança deste ponto’, que se relacionam à definição de ponto de máximo relativo, além das propriedades ‘As retas tangentes mudam de decrescentes para crescentes, numa vizinhança do ponto de mínimo’ e ‘O sinal da

⁹ No trabalho intitulado *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático* (2010), Godino também aproxima esta noção da que Louis Hjelmslev nomeia como sendo *função de signo*.

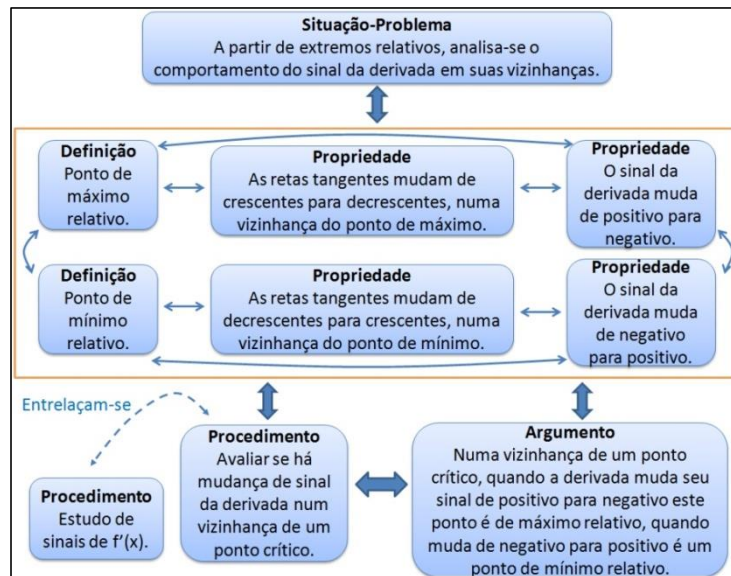
¹⁰ ECO, U. *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen, 1995.

¹¹ Com a noção de *função semiótica*, a prática matemática (que classificamos como epistêmica ou cognitiva) pode ser pensada a partir de configurações de objetos matemáticos, assim também recebendo a classificação de *configurações epistêmicas* (ou *institucionais*) e *configurações cognitivas* (ou *pessoais*).

¹² Para que a configuração não fique muito “carregada”, não estamos indicando *definições/conceitos* de ‘reta tangente’, ‘coeficiente angular’, ‘extremos relativos’, ‘derivadas’ e ‘ponto anguloso’. Mas estas estão presentes em outras configurações que apresentamos na dissertação concluída.

derivada muda de negativo para positivo na vizinhança deste ponto', que também se entrelaçam com a definição de ponto de mínimo relativo.

Figura 2 – Configuração epistêmica para o Teste da Derivada Primeira



Fonte: Autores desta pesquisa.

O *procedimento* que emerge é o de 'Avaliar se há mudança de sinal da derivada numa vizinhança de um ponto crítico', que dá mais importância ao procedimento de estudo de sinais da derivada da função, já realizado para a identificação da variação da função. Já a *argumentação* que surge é a que garante que 'Numa vizinhança de um ponto crítico, quando a derivada muda seu sinal de positivo para negativo, este ponto é de máximo, quando muda de negativo para positivo, é ponto de mínimo'.

Em relação ao uso da linguagem, tal organização de objetos legitima a prática matemática de procurar por variações do sinal da derivada primeira ao redor dos pontos críticos identificados, e isso se dá, algebricamente, a partir do estudo de sinais da derivada primeira ou, graficamente, através do traçado de vários segmentos de retas tangentes.

Foi através da construção de configurações epistêmicas e cognitivas que construímos uma base de comparação para as práticas matemáticas de esboço de curvas no ensino superior. Agora, então, apresentaremos algumas considerações a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem deste assunto.

A PRÁTICA DE ESBOÇO DE CURVAS SEGUNDO UMA VISÃO SEMIÓTICA

Ao nos concentrarmos na maneira que a linguagem matemática é utilizada durante a prática de esboço de curvas, é possível identificar a utilização de vários registros semióticos de representação, a utilização de tratamentos distintos a cada registro, de conversões entre registros, o domínio de algoritmos para resolução de equações e inequações, etc. É a partir de uma sistematização de todos estes elementos que o esboço de curvas emerge também como uma prática, ou um sistema de práticas.

E para identificarmos algo a respeito da compreensão dos estudantes a respeito da prática de esboço de curvas, nós analisamos o uso que eles fazem da linguagem matemática para sistematizar os elementos supracitados, tomando como base comparativa para a apreensão do significado as configurações epistêmicas que criamos e as configurações cognitivas estabelecidas pelos estudantes durante suas práticas.

É neste momento que identificamos uma compatibilidade entre o EOS e a TRRS de Raymond Duval. Pois, em suas pesquisas, Duval dá muita atenção aos vários registros de representação que são comumente utilizados na prática matemática, tais como as escritas numéricas, algébricas, as figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas, a língua natural, etc. No ensino superior, novas notações, novas argumentações e novas práticas são apresentadas ao se estudar os limites e derivadas de funções¹³ para o esboço de curvas.

Nos livros de Cálculo, na maioria das vezes, o esboço de curvas é estudado como uma das aplicações das derivadas, onde parte-se geralmente de registros algébricos, que recebem uma sequência de tratamentos de derivadas e limites para então se traçar o esboço da curva e obter, assim, o registro gráfico associado. Há inclusive muitos livros de Cálculo que ao final de suas seções de esboço de curva

¹³ Neste trabalho, estaremos sempre se referindo a funções reais de uma variável.

trazem uma espécie de tabela com orientações a serem seguidas, referentes a tratamentos de cálculo no registro algébrico para se traçar o esboço da curva¹⁴.

Em seus trabalhos referentes ao esboço de curvas¹⁵, Duval problematiza uma forma de proceder em que se parte de um registro gráfico de uma função, ou seja, de uma equação, para se chegar ao esboço cartesiano de seu gráfico, ou seu registro gráfico.

Esta operação de transição entre dois sistemas semióticos de representação diferentes – que Duval nomeia como sendo uma *conversão* entre registros (DUVAL, 2011) –, quando realizada apenas em um sentido – como neste caso é feito ao se transitar apenas do registro algébrico para o registro gráfico – limita a compreensão dos estudantes.

Duval sustenta esta limitação a partir de uma série de experimentos¹⁶ envolvendo alunos do sistema de ensino francês, em que ele identifica que

A passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos e dos estudantes (DUVAL, 2009, p.18).

Com isso, as conversões entre registros tornam-se elementos importantes das investigações de Duval, ao ponto de fazer com que o autor apresente o que denomina de sua *hipótese fundamental de aprendizagem*, mencionando que:

A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade de conversão (DUVAL, 2012, p.282).

Desta forma, a TRRS diz que a aprendizagem em matemática acontece mediante a coordenação entre registros semióticos diferentes, coordenação esta que neste trabalho entendemos como conversões em ambos os sentidos, ou seja, quando

¹⁴ Confira, por exemplo, Gonçalves e Flemming (2000, p. 284), Guidorizzi (2008, p.257), Leithold (1994, p.256) e Stewart (2009, p.288).

¹⁵ Duval, 2004 e 2011, por exemplo.

¹⁶ Ver, por exemplo, Duval 2004.

nos referirmos a coordenação entre registros, estaremos nos referindo à conversão de um registro A para um registro B e vice versa.

Agora é importante que o leitor perceba que tratar a prática de esboço de curvas, ou pelo menos dar mais atenção a esta prática, a partir de conversões no sentido registro algébrico → registro gráfico, não está em consonância com a hipótese de aprendizagem de Duval, por não possibilitar a coordenação entre registros¹⁷.

Duval (2011) já havia percebido isso e então propôs uma forma de proceder durante o esboço de curvas de modo a efetivar sua hipótese fundamental, é o que ele chama de procedimento de *interpretação global das propriedades figurais*¹⁸ (p.99), e é descrito como a seguir.

O conjunto traçado/eixos [O gráfico] forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Toda modificação desta imagem, que leva a uma modificação na expressão algébrica correspondente, determina uma variável visual pertinente para a interpretação gráfica. É importante, deste modo, identificar todas as modificações pertinentes possíveis desta imagem, quer dizer, ver as modificações conjuntas da imagem e da expressão algébrica: **isto significa proceder a uma análise de congruência entre dois registros de apresentação de um objeto ou de uma informação. Com esta abordagem não estamos mais na presença da associação ‘um ponto ↔ um par de números’, mas na presença da associação ‘variável visual de representação ↔ unidade significativa da expressão algébrica’** (DUVAL,2011, p. 99 - grifos do autor).

Neste procedimento a atenção está em relacionar *variáveis visuais* da representação gráfica – como crescimento e decrescimento, concavidade voltada para cima ou para baixo, etc. – com *unidades simbólicas* do registro algébrico – no caso do ensino superior, propriedades do cálculo de limites e derivadas das funções.

Duval utiliza o procedimento de interpretação global com funções afins, outros pesquisadores realizaram estudos que possibilitaram estender este procedimento para outros tipos de funções¹⁹, no entanto, surge aqui um questionamento importante: Será que este procedimento poderia ser utilizado no ensino superior?

17 Por termos certa limitação de espaço para realizar este artigo, e também devido à objetividade que visamos alcançar, não estamos mencionando os aspectos teóricos mais detalhados da teoria de Duval que dão sustentação à sua hipótese. Para saber mais, veja Duval (2004), Moretti (2002), ou Né (2013).

18 Daqui para frente, para não tornar a leitura muito cansativa, algumas vezes trataremos este procedimento apenas por *interpretação global*.

19 Confira, por exemplo, Moretti (2003) e Silva (2008).

Isso porque, neste nível de ensino, as funções que comumente são estudadas não se restringem apenas às “tipologias” abordadas nos ensinos fundamental e médio – como as funções polinomiais de primeiro e segundo grau, funções trigonométricas, logarítmicas, exponenciais, etc.

Por mais que estas funções ainda façam parte das práticas matemáticas realizadas na academia, a prática de esboço de curvas que se pretende instituir no ensino superior, mais especificamente num curso de Cálculo, aborda uma generalidade muito maior de curvas – como funções polinomiais de grau maior que 2, funções racionais compostas por funções polinomiais deste tipo, soma, diferença, produto, quociente, composição, etc. de vários tipos diferentes de funções, entre outros exemplos – o que torna a classificação das unidades dos registros gráfico e algébrico muito complexas.

Entretanto, conscientes desta situação e tomando o procedimento de interpretação global como instrumento para refletir sobre esta prática, Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) entendem que é possível tomar como variáveis visuais elementos do registro gráfico que já são utilizados no Cálculo e são associados aos conceitos de limite e derivada, a saber, as *variações*²⁰ e *concauidade* das funções, os *extremos relativos*, os *pontos de inflexão*, as *retas assintóticas* e a *continuidade*.

A partir desta concepção, estes autores propõem uma classificação que relaciona estas variáveis visuais²¹ com unidades simbólicas referentes às derivadas e limites. Eles chamam esta classificação de *formas básicas*, observe uma delas no Quadro 1 a seguir.

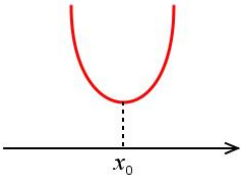
A partir de uma unidade gráfica, faz-se sua conversão em unidades linguísticas e por último a conversão destas em unidades simbólicas. Perceba que a relação não será sempre de “um para um”, ou seja, não será sempre de uma unidade gráfica para

²⁰ Entenderemos, assim como estes autores, *variações* da função como se referindo aos intervalos de crescimento e decrescimento desta função.

²¹ Ao invés de utilizar o termo *variável visual*, estes autores preferem utilizar *unidade básica gráfica*, ou simplesmente, *unidade gráfica*. Também são tomadas como equivalentes as expressões *unidade básica simbólica* (ou *algébrica*) e *unidade simbólica* (ou *algébrica*).

uma unidade simbólica, mas pode acontecer de uma unidade gráfica estar relacionada com mais de uma unidade simbólica.

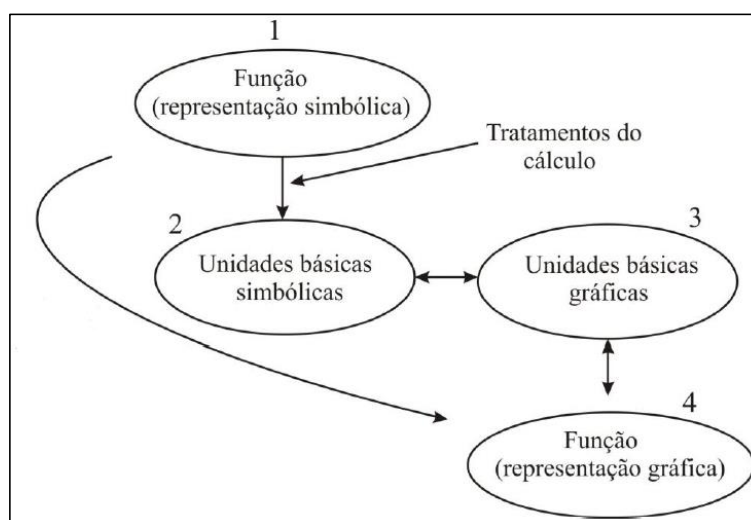
Quadro 1 – Formas básicas: extremos relativos²²

Unidade básica gráfica	Unidade básica linguística	Unidade básica simbólica
	<p>Mínimo relativo x_0. Derivada primeira de y muda de sinal negativo para positivo na vizinhança de x_0; ou efetuar o teste da derivada 2ª ou de ordem superior.</p>	$\begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y'(x) < 0, x \in V^-(x_0) \\ y'(x) > 0, x \in V^+(x_0) \end{cases}$ $y''(x_0) > 0;$ $y^{(n-1)}(x_0) = 0 \text{ e } y^{(n)} > 0$ $n > 2, \text{ par.}$

Fonte: Moretti e Luiz (2010, p.545).

Com esta maneira de proceder estes autores trazem um meio para se pensar o procedimento de interpretação global das propriedades figurais no ensino superior, além de também sugerir uma perspectiva semiótica, baseada na TRRS, para analisar o processo de ensino e aprendizagem do esboço de curvas neste nível de ensino. Moretti e Luiz (2010) trazem o esquema a seguir (Figura 3) na tentativa de representar a coordenação entre os registros através deste procedimento.

Figura 3 – Esquema da coordenação dos registros gráfico e algébrico segundo as formas básicas



Fonte: Moretti e Luiz (2010, p.531).

²² As notações $x \in V^-(x_0)$ e $x \in V^+(x_0)$ significam, respectivamente, 'x pertencente a uma vizinhança à esquerda de x_0 ' e 'x pertencente a uma vizinhança à direita de x_0 '.

A conversão no sentido $1 \rightarrow 4$ é indicada pela seta maior, mas como já comentado o mesmo nem sempre acontece de $4 \rightarrow 1$, ou mesmo de $2 \rightarrow 1$, devido à generalidade de funções estudadas no ensino superior. No entanto, o procedimento de interpretação global como estratégia para a coordenação entre registros acontece mediante as unidades básicas referentes a eles, ou seja, $2 \leftrightarrow 3$.

Para realizar nossa pesquisa, pensamos nosso objeto de estudo a partir desta maneira de proceder. No entanto, julgamos importante mencionar que não temos aqui a intenção de avaliar se este procedimento pode ou não ser utilizado no ensino superior, ou se ele traz melhores resultados ao processo de ensino e aprendizagem, pois entendemos que já houve pesquisadores que demandaram esforços para isso²³, nosso interesse central neste artigo é em identificar os usos que são feitos da linguagem matemática, levando em consideração a perspectiva da semiótica, e apresentar algumas considerações a respeito dos processos de ensino e aprendizagem.

A PESQUISA REALIZADA E ALGUMAS ANÁLISES

Passaremos agora para apresentação de alguns dados de nossa pesquisa e a maneira que os analisamos segundo a trilha teórico-metodológica que acabamos de organizar nas seções anteriores.

Como já mencionamos anteriormente, nossa intenção foi a de realizar uma pesquisa a respeito do uso da linguagem matemática, particularmente na prática de esboço de curvas no ensino superior. Para isso, organizamos seis encontros, de duas aulas cada, com uma turma de estudantes da disciplina *Cálculo A*, do curso de Meteorologia da UFSC²⁴.

²³ Verifique, por exemplo, os trabalhos de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008), Luiz (2010) e Moretti e Luiz (2010).

²⁴ Esta disciplina corresponde a uma primeira parte do *Cálculo Diferencial e Integral*, parte em que o esboço de curva está inserido.

Nestes encontros ministramos²⁵ as aulas referentes ao estudo das práticas de esboço de curvas, que no plano de ensino da disciplina aparece como um subtópico de estudo das aplicações das derivadas.

A turma possuía 40 estudantes matriculados, mas não tivemos a presença constante de todos eles durante nossos encontros, pois a investigação aconteceu no período regular das aulas, a média de presença nestes encontros foi em torno de 30 estudantes.

Não entendemos o fato de não estarem todos os estudantes presentes em nossos encontros como algo que possa limitar os resultados que apresentaremos aqui, isso porque não buscamos estabelecer um método que permita um melhor aprendizado, ou generalizar os resultados aqui obtidos, mas analisar como o uso da linguagem matemática, tanto no âmbito da academia quanto por parte dos estudantes, oferece elementos para compreendermos as práticas matemáticas que se efetivam nos processos de ensino e aprendizagem do tema investigado.

Pela limitação de espaço que temos para desenvolver este artigo, apresentaremos partes da análise de uma atividade da sequência de estudos que aplicamos aos estudantes. Observe-as no Quadro 2 a seguir.

Quadro 2 – Parte da Atividade 3 aplicada aos estudantes

Atividade 1

Considere a função $h(x) = 3x^5 - 5x^3 + 3$. Calcule os intervalos de crescimento e decréscimo da função h , seus pontos de máximo e mínimo relativos, pontos de inflexão e a concavidade. Em seguida faça um esboço do gráfico de h .

(Observação: Para esboçar o gráfico, verifique como a função se comporta quando x tende a $+\infty$ e $-\infty$).

Fonte: Dados da pesquisa.

Antes de aplicarmos estas atividades criamos suas configurações epistêmicas, porém, para apresentá-las precisamos mencionar ainda duas conceituações importantes do EOS, que são as ideias de processos e atributos conceituais dos objetos matemáticos.

²⁵ Estes encontros ocorreram durante o estágio de docência de Adriano Né e o responsável pela disciplina era o professor e orientador Dr. Mércles Thadeu Moretti.

O EOS não procura dar uma definição de “processo” por entender que há uma variedade muito grande de processos – cognitivos, metacognitivos, instrucionais, sociais, entre outros –, entretanto, Godino, Batanero e Font (2008) referem-se a processos como uma sequência de práticas.

Se pensarmos nos objetos primários que intervêm e emergem na prática matemática, a mobilização destes objetos acontece mediante processos matemáticos de comunicação, problematização, definição, enunciação, elaboração de procedimentos (execução de algoritmos, rotinas, ...) e argumentação (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.16).

Durante a prática matemática, os significados dos objetos matemáticos recebem alguns atributos contextuais, tais atributos relativizam estes significados e podem ser considerados, de acordo com o EOS, a partir de cinco dimensões duais. A classificação entre práticas epistêmicas e cognitivas permite se pensar os objetos matemáticos a partir das facetas *institucional-pessoal* – caso sejam objetos compartilhados por uma instituição ou sejam próprios de uma pessoa –, já a noção de função semiótica atribui ao objeto as dimensões *expressão-conteúdo* – que indica se ele está representando algo ou é o próprio conteúdo.

Os objetos matemáticos podem ainda receber os atributos de *ostensivo-não ostensivo*, *unitário-sistêmico* e *extensivo-intensivo*.

Um objeto matemático que é previamente conhecido recebe o atributo de *unitário*, podemos tomar como exemplo a regra de sinais ao se resolver uma equação do segundo grau, tal regra já é conhecida e, portanto, é entendida como um objeto *unitário*, no entanto, se o contexto é o início dos estudos a respeito do conjunto dos números inteiros, a regra de sinais é decomposta para ser estudada, e neste caso passa a ser um objeto *sistêmico*.

As dimensões *extensiva-intensiva* (ou *exemplar-tipo*) refere-se ao objeto estar num contexto em que é um caso particular, neste caso é um objeto *extensivo* – como o cálculo da derivada de $f(x) = 7x^{7/2} - 2x^3 + 4$ – ou uma classe mais geral, objeto *intensivo* – como quando se trata de desenvolver uma regra de derivação para as funções polinomiais de expoente racional.

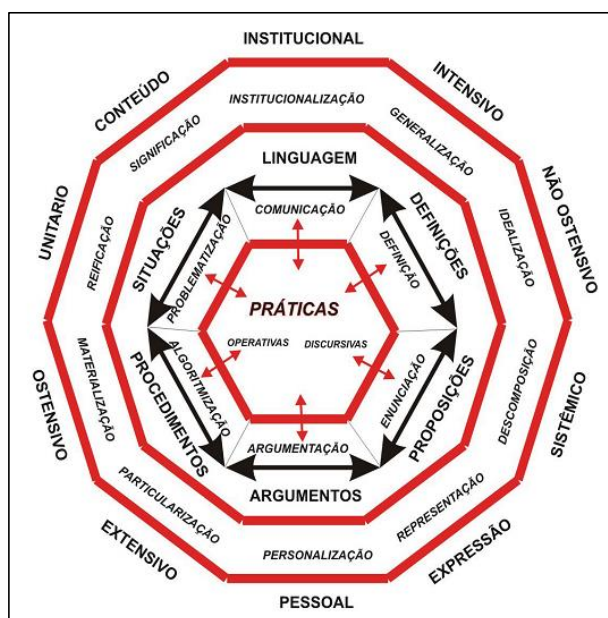
Por *ostensivo*, entende-se qualquer objeto matemático que é público, ou seja, que pode ser mostrado. “Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza *não ostensiva* (não perceptíveis por si mesmos)” (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.16), mas podem ser utilizados em práticas públicas quando associados a ostensivos como representações algébricas, gráficas, entre outras.

Estes atributos conceituais fornecem ao EOS mais uma classificação para outros processos matemáticos, são os processos *cognitivos* ou *epistêmicos* de:

institucionalização - personalização; generalização - particularização; análise/decomposição - síntese/reificação; materialização/concreção - idealização/abstração; expressão/representação - significação. (GODINO *et al.*, 2011, p.8 - tradução nossa).

O que Godino e seus colaboradores fazem é “[...] selecionar uma lista de processos que se consideram importantes na atividade matemática [...], sem pretender incluir nela todos os processos implicados” (Ibidem, p.9 - tradução nossa). A representação de todos estes objetos e processos matemáticos pode ser observada na Figura 4.

Figura 4 – Configuração de objetos e processo matemáticos



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.11).

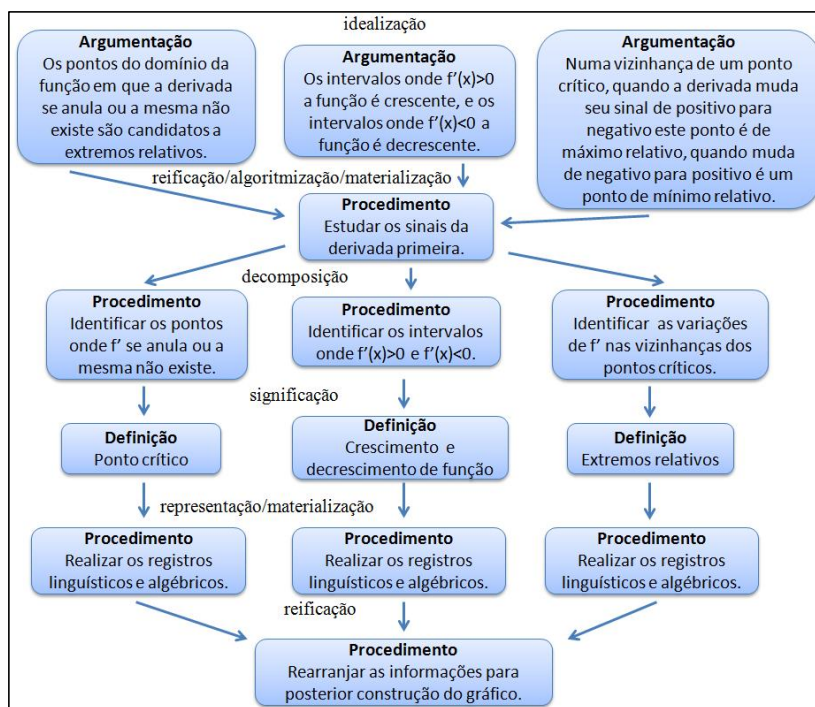
Para a realização da *Atividade 1* os tratamentos algébricos referentes ao cálculo das derivadas primeira e segunda, o estudo de sinais destas (que na prática se resumiam a estudo de sinais de funções polinomiais) e o cálculo dos limites da função em questão eram entendidos como objetos matemáticos *unitários*, ou seja, por já terem sido estudados desde o início da disciplina eram entendidos como procedimentos algébricos já dominados pelos estudantes. E, durante esta primeira atividade, iriam servir de ferramentas para prática do esboço de curvas.

Entretanto, pudemos identificar que este “domínio” dos procedimentos algébricos ainda não era tão efetivo por parte dos estudantes, mas para a análise que queremos trazer aqui tentaremos ultrapassar estes erros que surgiram – não fazemos isso porque achamos que são erros irrelevantes, mas por queremos levar nossa análise para outra face da prática dos estudantes.

Em relação à *Atividade 1* criamos as configurações epistêmicas apresentadas nas Figuras 5 e 6 a seguir. Além disso, é importante mencionar que as configurações cognitivas que apresentaremos mais adiante não são específicas de um estudante, também não são do grupo que teve o “melhor” ou o “pior” desempenho, mas são configurações cognitivas que acreditamos que pudessem ser atribuídas a grupos de estudantes para que o processo de ensino fosse repensado. E antes de apresentar estas configurações traremos algumas considerações que julgamos importantes.

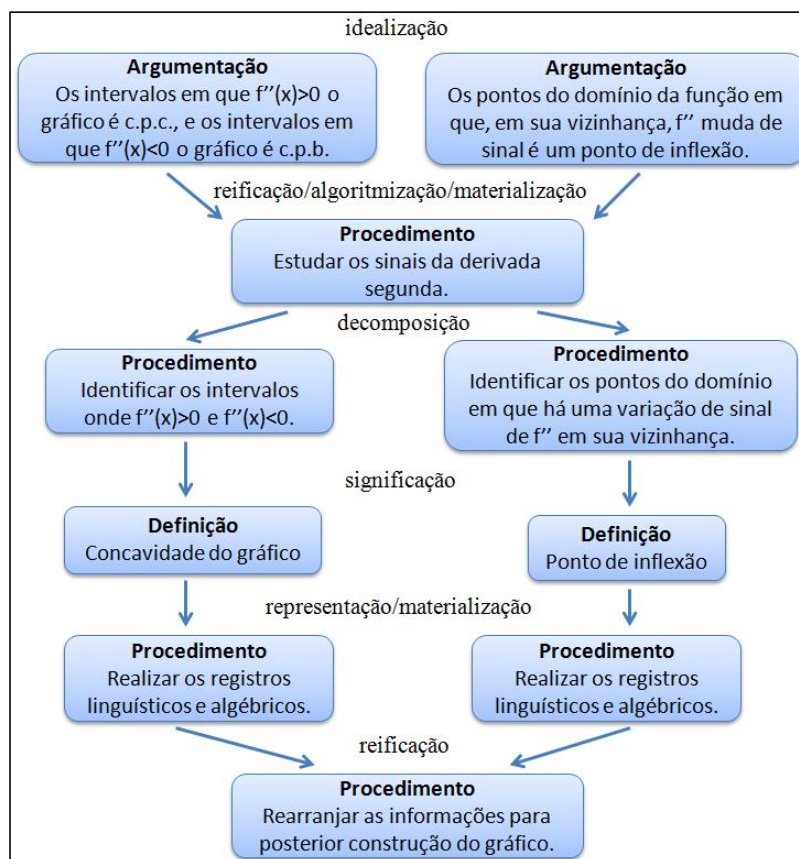
Entre outras resoluções que nos pareceram ter certa semelhança, optamos por apresentar a de duas estudantes em particular, que estão nas Figuras 7 e 8. O leitor poderá identificar que há erros nos procedimentos algébricos para o estudo de sinais da derivada primeira na resolução da segunda estudante (Figura 8), mas o que gostaríamos de dar atenção é – segundo a elaboração que fizemos do EOS – para o processo de *reificação* final que aparece nas duas configurações epistêmicas anteriormente apresentadas (Figuras 5 e 6).

Figura 5 – Configuração epistêmica referente ao estudo da derivada primeira

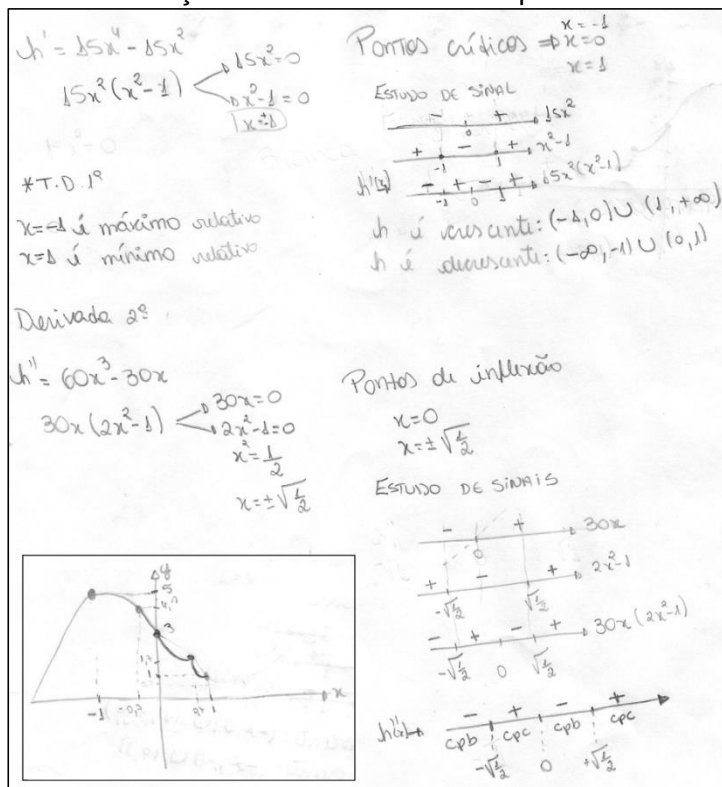


Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 6 – Configuração epistêmica referente ao estudo da derivada segunda



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 8 – Resolução de uma estudante de parte da Atividade 1²⁶

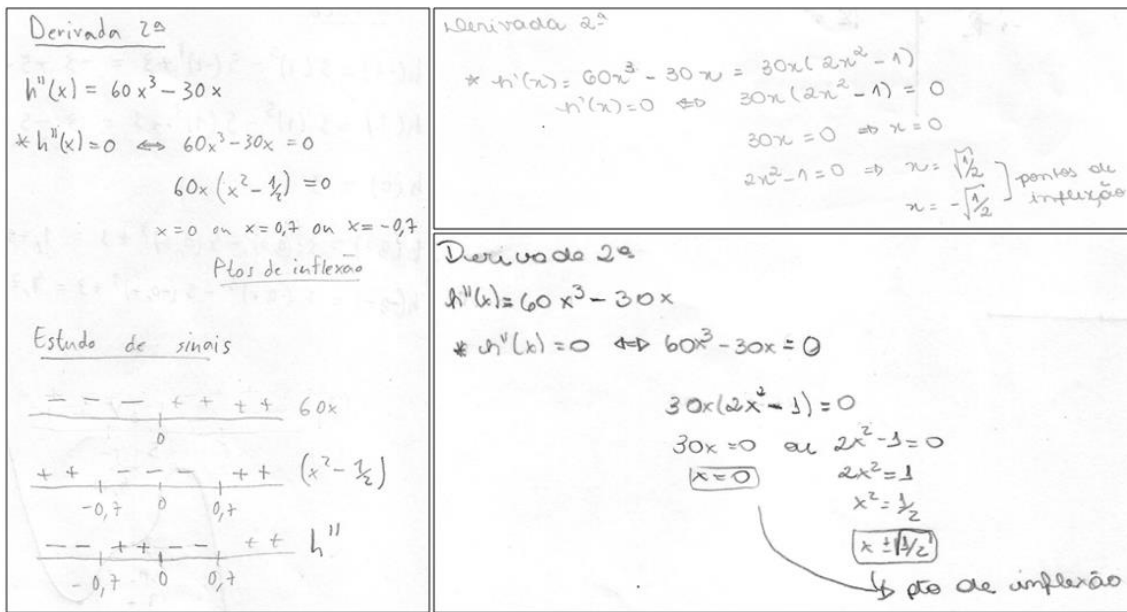
Fonte: Estudante, sujeito desta pesquisa.

Ainda nesta atividade pudemos perceber que uma argumentação um pouco diferente da que trabalhamos em sala de aula emergiu nas resoluções dos estudantes. Havíamos desenvolvido a argumentação de que ‘Os pontos do domínio da função em que, em sua vizinhança, f'' muda de sinal é um ponto de inflexão’, no entanto, em muitas resoluções pareceu que a argumentação para se determinar os pontos de inflexão foi a seguinte: ‘Os pontos do domínio da função em que a derivada segunda se anula são pontos de inflexão’. Observe mais alguns excertos compilados na Figura 9.

Nos três casos que apresentamos é possível identificar que os estudantes registram os pontos de inflexão antes mesmo do estudo de sinais da derivada segunda, o que dá indícios desta outra argumentação que acabamos de mencionar.

²⁶ O gráfico está destacado num retângulo por ter sido feito pelo estudante no verso da folha da Atividade 1.

Figura 9 – Identificação dos pontos de inflexão



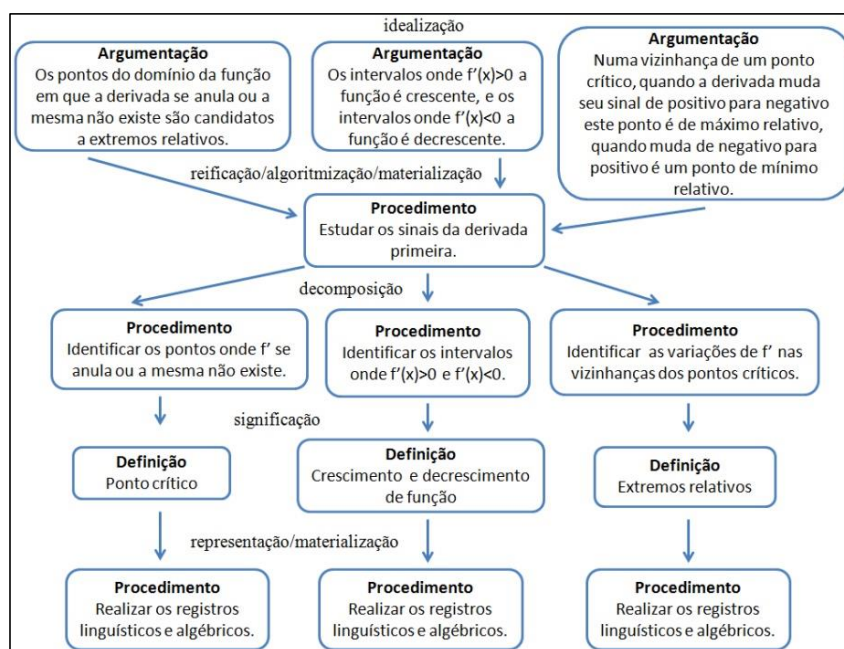
Fonte: Estudantes, sujeitos desta pesquisa.

Quando trabalhamos com funções polinomiais esta argumentação pode ser considerada válida, no entanto, há vários outros tipos de funções nos quais ela não “funciona” muito bem. Stewart (2009, p. 274) apresenta uma função que pode nos servir de exemplo para tal constatação.

A função definida por $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$ possui como derivadas as funções representadas por $f'(x) = \frac{4-x}{x^{1/3}(6-x)^{2/3}}$ e $f''(x) = \frac{-8}{x^{4/3}(6-x)^{5/3}}$. Observe que para a derivada segunda não há casos em que $f''(x) = 0$ e $\nexists f''(x)$ para $x = 0$ e $x = 6$. Com uma argumentação do tipo que identificamos nestes três excertos que acabamos de apresentar, tal função não teria pontos de inflexão, no entanto, a partir de um estudo de sinais que considere estes dois pontos em que f'' não existe, observa-se que $x = 6$ é o único ponto de inflexão de f , pois pertence ao domínio da função e há uma variação do sinal de f'' em sua vizinhança.

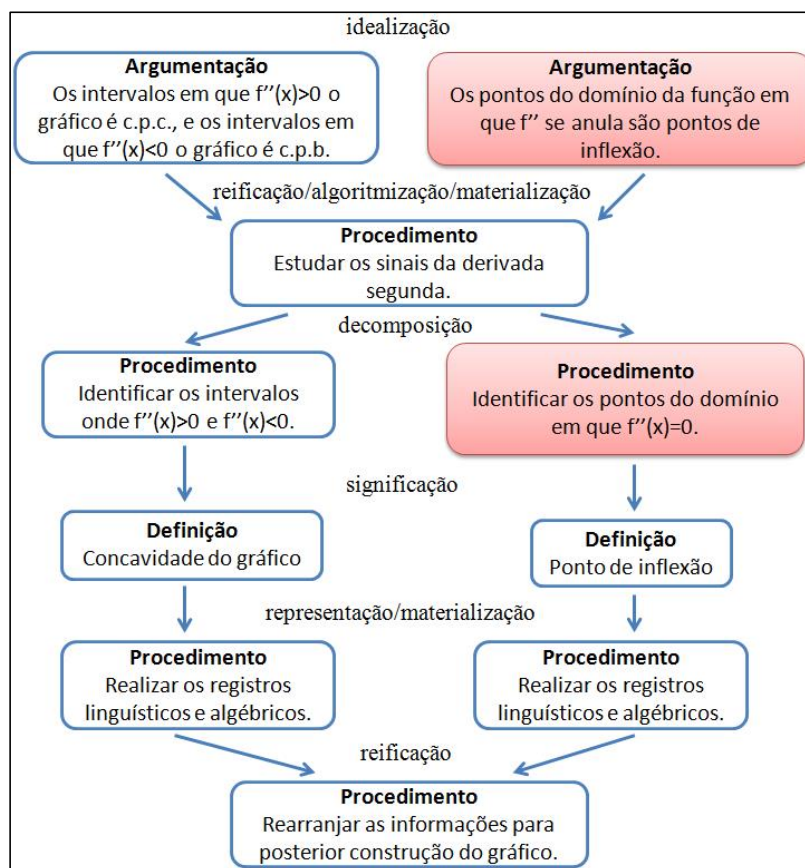
Com todas estas considerações a respeito do desenvolvimento dos estudantes na *Atividade 1*, apresentamos nas Figuras 10 e 11 as configurações cognitivas dos estudantes que criamos referentes ao estudo das derivadas primeira e segunda.

Figura 10 – Configuração cognitiva referente ao estudo da derivada primeira



Fonte: Autores desta pesquisa.

Figura 11 – Configuração cognitiva referente ao estudo da derivada segunda



Fonte: Autores desta pesquisa.

Na configuração referente ao estudo da derivada primeira (Figura 10), não indicamos o processo de reificação entre os pontos críticos, as variações e os extremos relativos (como consta na Figura 5) para a construção do gráfico, pois pelos excertos que apresentamos entendemos que este processo não ocorreu. Segundo Duval, a conversão das representações algébricas destes objetos em representações gráficas (para a construção do gráfico) não se efetivou.

Já na configuração cognitiva do estudo da derivada segunda (Figura 11), indicamos que houve o processo de reificação entre concavidade e o ponto de inflexão para a construção da curva, porém indicamos, em destaque, a argumentação que emergiu através de um processo de *personalização* dos estudantes, e conseqüentemente sugeriu o procedimento que está em destaque.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Da mesma forma que fizemos na pesquisa que se materializou em uma dissertação de mestrado, neste artigo optamos por trazer nossas considerações separadas em três partes. Fazemos esta separação para poder melhor argumentar a respeito da resposta que fornecemos a questão inicialmente formulada.

Considerações a respeito do processo de aprendizagem

Tomar como objeto de análise o uso da linguagem matemática permitiu-nos a identificação de muitos aspectos do processo de aprendizagem. Entender o significado a partir de configurações de objetos matemáticos, como sugere o EOS, possibilitou um “mapeamento” das práticas dos estudantes em sala de aula, mapeamento este que permitiu gerar uma descrição pontual dos significados pessoais dos mesmos.

Coordenar vários registros semióticos de representação é uma atividade inerente às práticas acadêmicas de esboço de curvas, e ao adotar a noção de aprendizagem do EOS, os vários registros de representação são pensados, cada um deles, como objetos matemáticos. Fazer esta consideração permitiu que tais registros

fossem parte integrante das configurações epistêmicas e cognitivas sugeridas por Godino e seus colaboradores, e assim sendo analisados não apenas em termos de tratamentos e conversões, mas também através das funções semióticas que podem ser estabelecidas com os entes sugeridos pela ontologia desta teoria.

As configurações epistêmicas serviram de base de comparação para tentar entender os significados pessoais dos estudantes, elas apontaram para conflitos semióticos bem pontuais em tais significados envolvendo unidades gráficas e algébricas, e forneceram um panorama do aprendizado dos mesmos.

Neste artigo, ao analisarmos a *Atividade 1*, foi possível identificar que uma parcela de estudantes concentrava-se em realizar uma série de tratamentos algébricas de estudo de sinais das derivadas primeira e segunda, mas não conseguiam realizar conversões que associassem os procedimentos algébricos referentes a derivada primeira às suas unidades gráficas correspondentes. E é o que indicamos na Figura 10 quando indicamos que não parece ter havido um processo de reificação.

Ainda nesta atividade pudemos indicar um conflito semiótico relacionado às práticas referentes aos pontos de inflexão. No decorrer da análise mencionamos que parece ter emergido o discurso ‘Os pontos do domínio da função em que f'' se anula são os pontos de inflexão’, que pode ser representado, em unidades algébricas e linguísticas, através da associação ‘ $f''(x_0) = 0$ ’ \rightarrow ‘ x_0 é um ponto de inflexão’²⁷.

O que tentaremos fazer agora é levantar uma hipótese de alguns fatores que podem estar contribuindo para tal discurso circular entre os estudantes e, para tanto, iremos tentar mais uma vez operar com a TRRS e o EOS.

Em sua teoria, Duval apresenta um conceito denominado de *congruência semântica* entre registros²⁸. Segundo este autor há registros, de sistemas semióticos diferentes, que têm os elementos que formam sua *estrutura* organizados de forma bem parecida, a conversão entre eles parece muito com uma tradução, no entanto, principalmente na atividade matemática, ocorrem muitos casos em que as conversões

²⁷ Não indicamos que houve a conversão no sentido oposto porque não entendemos que a *Atividade 1* pudessem nos garantir isso.

²⁸ Diante do espaço reduzido que temos aqui neste artigo, traremos algumas considerações apenas para podermos continuar nossa argumentação teórica.

se realizam entre registros que não possuem suas estruturas tão parecidas assim, ou ainda casos em que estas são totalmente diferentes.

Para elucidar melhor esta ideia, vamos observar algumas conversões do registro linguístico para o registro algébrico²⁹.

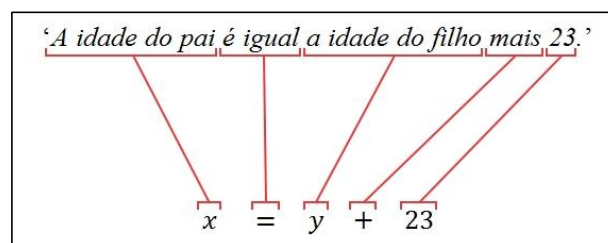
‘A idade do pai é igual a idade do filho mais 23.’

Se representarmos por x a idade do pai e y a idade do filho, a conversão para a linguagem simbólica fica assim,

$$x = y + 23$$

Estes dois registros possuem uma mesma ordem de organização das unidades significativas³⁰, e para deixar isso mais evidente, apresentamos o esquema a seguir (Figura 12).

Figura 12 – Exemplo de uma *congruência semântica* entre registros.



Fonte: Autores desta pesquisa.

Quando, na conversão de um registro a outro, as unidades significativas de cada um se apresentam na mesma ordem de formação, Duval (2012) classifica tal fenômeno como uma *congruência semântica* entre os registros, ou que os registros linguístico e algébrico são *semanticamente congruentes*. Perceba que neste exemplo, em particular, parece até uma “tradução” de uma língua para outra.

Mas como já mencionamos, nem sempre há uma congruência semântica na conversão entre dois registros. Vejamos então mais uma situação de conversão para identificar uma não congruência.

²⁹ Estes exemplos são uma adaptação nossa do apresentado por Duval (2012, p. 110).

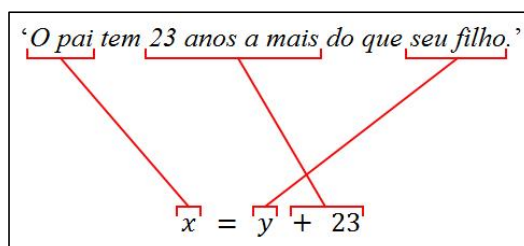
³⁰ Estamos entendendo como *unidade significativa* um signo, ou uma organização mínima de signos, que é utilizada para representar algo. No registro linguístico apresentado, por exemplo, a organização das palavras ‘A idade do pai’ está apontando para a idade que o pai tem, o mesmo acontece para o signo ‘ x ’, se pensarmos no registro algébrico. Neste caso, ambos são unidades significativas de seus respectivos sistemas de representação.

‘O pai tem 23 anos a mais do que seu filho.’

Uma conversão matematicamente correta seria a expressão $x = y + 23$, correta porque possuem a mesma referência (referem-se à mesma situação, ou possuem o mesmo significado), no entanto, a ordem em que as unidades significativas de cada registro se organizam não é a mesma, além de algumas destas não se relacionarem. Por exemplo, o registro algébrico, com o sinal ‘=’, indica claramente uma igualdade entre os objetos da situação, já no registro linguístico não se fala em igualdade, equivalência, ou semelhança, a ideia de igualdade vem ao se pensar numa equação que descreva a situação, ou seja, na conversão. Outra observação é o trecho que diz ‘*pai tem 23 anos a mais*’ que pode parecer fazer sentido se adicionar 23 à idade do pai, ao invés de fazê-lo à idade do filho.

Com o esquema da Figura 13 pode-se identificar uma mudança na ordem entre as unidades significativas, bem como o surgimento do sinal de igual, que parece não ter relação com as unidades significativas do registro linguístico. Estes dois registros, como diz Duval (2012), são *não congruentes*, ou são *semanticamente não congruentes*.

Figura 13 – Exemplo de uma *não congruência semântica* entre registros.



Fonte: Autores desta pesquisa.

Agora, voltando nossa atenção ao discurso que emergiu entre os estudantes desta pesquisa referente ao ponto de inflexão, o conceito de *congruência semântica* refere-se a registros pertencentes a sistemas semióticos diferentes, além de ser utilizado quando há *unidades significativas organizadas de maneira muito semelhante*. Entretanto, a conceituação que trazemos de unidade significativa baseia-se em um signo ou numa organização mínima de signos que servem para representar alguma coisa.

Mas ao analisar o trabalho dos estudantes na *Atividade 1* e identificar a argumentação ‘Os pontos do domínio da função em que a derivada segunda se anula são pontos de inflexão’, o conceito de congruência semântica veio-nos a mente de maneira muito instantânea, o que não nos trouxe surpresas, uma vez que, além do EOS, é através das “lentes” teóricas da TRRS que estamos nos colocando frente aos dados desta pesquisa.

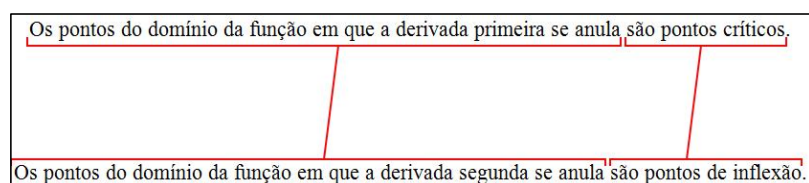
O conceito de congruência semântica não pode ser utilizado na argumentação apresentada acima por não se tratar de uma conversão entre registros, no entanto, gostaríamos de chamar atenção para alguns procedimentos que comumente são adotados pelos estudantes em suas práticas.

Para a realização do estudo de sinais da derivada primeira o procedimento adotado é o de se começar igualando a expressão da derivada à zero – além de procurar por pontos do domínio em que a mesma não exista – para então se identificar os pontos críticos. Observe que a dinâmica parece ser: ‘derivo a função e igualo a zero para identificar algum ponto crítico’.

De maneira muito semelhante, para se realizar o estudo de sinais da derivada segunda o mesmo procedimento de igualar a derivada à zero é adotado, o que nos permitiu pensar que esta semelhança entre os procedimentos possa ser tratada como uma “*congruência entre procedimentos*”.

A linha de racionalidade que queremos apresentar é a seguinte, ‘se ao calcular os pontos em que a derivada primeira se anula eu obtenho pontos críticos, então ao calcular os pontos em que a derivada segunda se anula eu encontro os pontos de inflexão’. É o que tentamos esboçar com a Figura 14.

Figura 14 – “Congruência entre procedimentos” que parecem gerar conflitos semióticos



Fonte: Autores desta pesquisa.

Não se trata de criar (ou cunhar) um novo elemento teórico, o que estamos fazendo é utilizar a qualidade “organizadas de maneira muito semelhante” da noção de congruência semântica para tentar expressar o grau de semelhança entre os procedimentos algébricos adotados.

Considerações a respeito do processo de ensino

A TRRS foi importante para a organização dos encontros, pois permitiu que ficasse definida a metodologia que seria utilizada para a realização das práticas em sala de aula. As considerações a respeito do uso de várias representações foram fundamentais para optar por trabalhar, principalmente, através das coordenações entre registros algébricos e gráficos.

Uma vez decidido como proceder, as *Formas básicas* de Moretti, Ferraz e Ferreira (2008) tornaram-se importantes unidades para a organização das configurações epistêmicas. Estas configurações possibilitaram a elaboração de configurações cognitivas que, como já mencionamos, mapearam os significados cognitivos e apontaram para conflitos semióticos particulares.

Trabalhar a partir da construção de configurações de objetos matemáticos faz com que o processo de ensino se realize através de constantes replanejamentos, cada configuração cognitiva pode indicar um ou mais conflitos semióticos, o que demandaria a busca de novas estratégias de ensino que possibilitem superar tais conflitos.

Nos dois conflitos semióticos apresentados neste artigo a respeito do processo de aprendizagem, o primeiro deles referente ao processo de reificação das unidades algébricas para proporcionar a conversão gráfica esperada, mostra a necessidade de um resgate das práticas que relacionam unidades algébricas e gráficas para um efetivo esboço de curvas.

Quanto ao segundo conflito – envolvendo derivada segunda nula e o conceito de ponto de inflexão –, pudemos perceber que alterações importantes são necessárias para a condução do processo de ensino. Segundo a interpretação que fizemos deste conflito a partir da TRRS e o EOS – momentaneamente classificando

de uma “congruência entre procedimentos” –, entendemos que houve um processo de significação baseado na comparação entre procedimentos.

Ao refletir sobre motivos que pudessem ter levado a este tipo de significação, identificamos que a maneira que organizamos as práticas em sala de aula influenciou fortemente neste processo.

Para realizar o processo de ensino optamos por adotar a seguinte sequência para estudar os conteúdos programáticos da disciplina: pontos críticos, variações, extremos relativos, concavidade e pontos de inflexão. E por ter tomado esta sequência, parece que demos possibilidade para que o procedimento de derivar a função e igualar à zero já pudesse ser associado à obtenção de alguma informação a respeito do gráfico da função, neste caso, obter algum ponto crítico.

Este procedimento foi várias vezes repetido para se estudar as variações, os extremos relativos e, finalmente, a concavidade. Começar a prática trabalhando com funções polinomiais também é um fator que entendemos ter legitimado ainda mais o conflito.

Uma reorganização que poderia ser adotada para que este conflito não aconteça, ou pelo menos diminua seu impacto no processo de aprendizagem, é adotar outra sequência para o estudo dos conteúdos nas primeiras aulas, sequência esta que partiria das variações e concavidades da função atreladas ao estudo de sinais das derivadas primeira e segunda, para somente depois realizar as análises pontuais para identificar pontos críticos, extremos relativos e pontos e inflexão.

Ao revisar como o esboço de curvas é apresentado em livros de Cálculo, é nítida uma separação que parece seguir uma ordenação do tipo: primeiro se deve estudar sobre as informações que a derivada primeira fornece a respeito do gráfico da função, para, em seguida, estudar sobre as informações que a derivada segunda fornece a respeito do mesmo gráfico.

Considerações mais gerais

Ainda na introdução deste artigo apresentamos a questão que serviu de direcionamento para nossa escrita: “De que maneira uma análise do uso da linguagem

matemática na prática de esboço de curvas, no ensino superior, permite intervenções didáticas no processo de ensino e aprendizagem desta prática?”. Entendemos que as duas considerações que acabamos de apresentar neste artigo nos permitem sugerir algumas respostas para ela.

Analisando o uso que os estudantes fizeram da linguagem matemática identificamos muitos fragmentos a respeito de seus aprendizados, estes fragmentos foram expressos através de configurações cognitivas e forneceram alguns rastros das linhas de racionalidades dos estudantes durante muitas de suas práticas, o que provoca reformulações na condução do processo de ensino.

Para pensar o ensino das práticas referentes ao esboço de curvas, as configurações epistêmicas construídas serviram de parâmetro para comparação e redirecionamento das práticas dos estudantes visando que os mesmos se inserissem nas práticas acadêmicas.

Portanto, entendemos que as intervenções que uma análise do uso da linguagem matemática, em práticas de esboço de curvas, fornece ao processo de aprendizagem são um mapeamento e uma interpretação dos processos de significação que vem ocorrendo em sala de aula, mapeamento este organizado a partir do uso que os estudantes fazem da linguagem matemática que, neste trabalho, puderam ser traçadas através das configurações cognitivas; e para o processo de ensino, as intervenções aconteceram através da precisão e pontualidade que as configurações cognitivas forneceram para se realizar reformulações neste processo.

O objetivo de realizar um estudo a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de matemática através dos usos que são feitos da linguagem nos parece ter sido alcançado. As ferramentas teóricas utilizadas, a TRRS e o EOS, permitiram elaborar importantes classificações dos usos da linguagem que, por sua vez, forneceram maior compreensão a respeito destes processos.

REFERÊNCIAS

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales**. Santiago de Cali, Colômbia: Universidad del Valle, Instituto de Educación e Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 2004.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Fascículo I. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. **Revista Eletrônica de Educação Matemática MTM/PPGECT/UFSC**, v.6, n.2, p.96-112, 2011. doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2011v6n2p96>.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revista Eletrônica de Educação Matemática MTM/PPGECT/UFSC**, v.7, n.1, p.97-117, 2012. doi: <http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97>.

GODINO, J.D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches en Didactiques des Mathematiques**, v.22, n.2-3, p.237-284, 2002.

GODINO, J.D. **Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático**. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2010. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/indice_fundamentos.htm. Acesso em: 31 ago. 2015.

GODINO, J.D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v.14, n.3, p.325-355, 1994.

GODINO, J.D.; BATANERO, C.; FONT, V. Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v.10, n.2, p.7-37, 2008.

GODINO, J.D. *et al.* Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. **Educational Studies in Mathematics**, v.77, n.2, p.247-265, 2011.

GONÇALVES, M.B.; FLEMMING, D.M. **Cálculo A**. São Paulo: Makron Books, 2000.

GUIDORIZZI, H.L. **Um Curso de Cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.

LUIZ, L.S. **Esboço de curvas no ensino superior**: uma proposta baseada na interpretação global de propriedades figurais e uso de tecnologias. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

MORETTI, M.T. O papel dos Registros de representação na aprendizagem de Matemática. **Contrapontos**, v.1, n.1, p.343-362, 2002.

MORETTI, M.T. A Translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. *In*: MACHADO, S.D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.149-160.

MORETTI, M.T.; FERRAZ, G.A.; FERREIRA, V.G.G. Estudo da conversão de funções entre registros simbólico e gráfico no ensino universitário. **Revista Quadrante**, v.17, n.2, p.97-122, 2008.

MORETTI, M.T.; LUIZ, L.S. O procedimento informático de interpretação global no esboço de curvas no ensino universitário. **Educação Matemática Pesquisa**. v.12, n.3, p.529-547 2010.

NÉ, A.L.S. **A análise da linguagem matemática como elemento para pensar o ensino e a aprendizagem da prática de esboço de curvas no ensino superior**. 2013. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

SILVA, M.O. **Esboço de curvas**: uma análise sob a perspectiva dos registros de representação semiótica. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.

STEWART, J. **Cálculo**. 5. ed. São Paulo: CENGAGE Learning, 2009.

Submetido: Setembro de 2015

Aceito: Novembro de 2015