

# O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ESTUDO DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS POR MEIO DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

**Antonio Jailson dos Santos Fonseca**<sup>1</sup>

Universidade Federal de Sergipe

**Divanízia do Nascimento Souza**<sup>2</sup>

Universidade Federal de Sergipe

**Marlene Alves Dias**<sup>3</sup>

Universidade Anhanguera de São Paulo

## RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica em uma proposta de ensino de Análise Combinatória construída com base na resolução de problemas para alunos da 2<sup>o</sup> série do Ensino Médio. O referencial teórico desta investigação está centrado nas abordagens em termos de registro de representação semiótica, níveis de conhecimento esperados dos estudantes e resolução de problemas, que estão relacionadas com o processo de ensino e aprendizagem da disciplina Matemática. Trata-se de um estudo de caso, cujo desenvolvimento se deu por meio da utilização de aspectos metodológicos da Engenharia Didática. A análise envolve principalmente a relação entre as análises *a priori* e *a posteriori*. Participaram da pesquisa alunos da segunda série do Ensino Médio de uma escola pública estadual em Aracaju, SE. Os resultados mostram que a aplicação de uma sequência didática baseada em experiências de aulas, que estimulem a mobilização dos registros de representação semióticos e com atividades relacionadas ao cotidiano do discente, contribui de forma efetiva para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória.

**Palavras-Chave:** Análise Combinatória. Educação Matemática. Registro de Representação Semiótica. Engenharia Didática.

---

<sup>1</sup> antoniojailson@yahoo.com.br

<sup>2</sup> divanizia@gmail.com

<sup>3</sup> maralvesdias@gmail.com

## **ABSTRACT**

In this research we aim to investigate the potential of transformation of semiotic representation registers in a Combinatorial Analysis of teaching proposal built on problem solving for students of 2nd year of high school. The theoretical framework of this research is focusing on approaches in terms of semiotics representation registration, knowledge levels expected of students and troubleshooting, which is related to the teaching and learning of mathematics discipline. It is a case study whose development was through the use of methodological aspects of Didactic Engineering. The analysis primarily involves the relationship between a priori and a posteriori analysis. The participants were students of the second year of high school from a public school in Aracaju, SE. The results show that the application of a didactic sequence based on lessons from experiences that stimulate the mobilization of semiotic representation registers and activities related to the student's daily life contributes effectively to the teaching and learning of Combinatorial Analysis.

**Keywords:** Combinatorial Analysis. Mathematics education. Semiotics Representation record. Didactic Engineering.

## INTRODUÇÃO

Com alguns anos lecionando a disciplina Matemática no Ensino Médio e também no pré-vestibular da rede estadual de ensino de Sergipe, foi possível verificar a dificuldade dos alunos na resolução de problemas de Álgebra, em particular quando se introduz a Análise Combinatória.

É consenso entre os educadores matemáticos que para ensinar Matemática não basta conhecer somente o conteúdo da disciplina, pois é necessário considerar outros aspectos, como estratégias de ensino e meios e métodos utilizados em sala de aula quando se deseja desenvolver uma aprendizagem que tenha significado para os estudantes.

Além disso, é possível observar que os resultados dos alunos do Ensino Médio em avaliações que envolvem tarefas de Análise Combinatória são, em geral, pouco satisfatórios, o que pode estar associado ao fato de tais tarefas serem relacionadas ao cotidiano, ou seja, contextualizadas e no formato de situações-problemas.

Considerando as observações acima apresentadas, elaboramos uma proposta de ensino voltada para a valorização do raciocínio combinatório, com ideias que possam contribuir para o desenvolvimento no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória. Com isso, verificamos a hipótese de que a aplicação de uma sequência didática, que possibilite a articulação entre os diferentes registros de representação semiótica, propicia aos alunos uma melhor compreensão das noções matemáticas associadas à Análise Combinatória. Nesse sentido, a abordagem dessas noções por meio de problemas que retratem situações do cotidiano dos alunos irá proporcionar a eles significado para a aprendizagem.

Sendo assim, esta pesquisa foi norteada pela seguinte questão: Quais contribuições uma proposta de ensino que enfatiza a mobilização dos registros de representação semiótica pode trazer para o ensino e a aprendizagem de Análise Combinatória em uma turma da 2ª série do Ensino Médio?

A pesquisa teve como objetivo geral: investigar o potencial das transformações dos registros de representação semiótica em uma proposta de ensino de Análise Combinatória construída com base na resolução de problemas.

Para isso, estabelecemos alguns objetivos específicos:

- 1- Examinar a contribuição da coordenação dos registros de representação semiótica para o ensino de Análise Combinatória;
- 2- Identificar as principais estratégias utilizadas na resolução dos problemas propostos;
- 3- Analisar os argumentos apresentados pelos alunos nas atividades desenvolvidas na sequência de ensino a partir de apontamentos dos protocolos de pesquisa.

Este estudo pretende se somar a outros que procuraram melhorar o ensino e a aprendizagem de Matemática com ênfase no desenvolvimento do raciocínio combinatório, no funcionamento cognitivo da compreensão das noções associadas a essa forma de raciocínio e na utilização de recursos pedagógicos tecnológicos que auxiliem na visualização e motivação para o estudo, em detrimento ao ensino memorístico baseado em definições, fórmulas e exercício de fixação sobre atividades descontextualizadas.

A seguir circunscrevemos, brevemente, a Análise Combinatória no ensino e em seu campo de aplicação, considerando suas definições enquanto processo de contagem e análise de estruturas e relações discretas.

## **ANÁLISE COMBINATÓRIA: DIFICULDADES E NOVAS EXPERIÊNCIAS DE ENSINO, DEFINIÇÃO E CAMPO DE APLICAÇÃO**

A Análise Combinatória, em geral, é considerada um conteúdo matemático de difícil compreensão pelos alunos e seu ensino se mostra complexo segundo os professores.

De acordo com Lima *et al.* (2013, p.140):

Problemas de contagem estão entre os considerados mais difíceis pelos alunos (e professores) do Ensino Médio. Em parte, isto se deve ao fato de que este assunto é introduzido apenas na segunda série do Ensino Médio, apesar das técnicas matemáticas necessárias serem

bastante elementares: essencialmente, o conhecimento das operações aritméticas de soma, subtração, multiplicação e divisão.

As pesquisas voltadas às questões envolvendo o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória vêm se configurando como importante área de investigações em Educação Matemática, por terem o intuito de amenizar as dificuldades enfrentadas por discentes e docentes no ambiente escolar. Em se tratando do conteúdo Análise Combinatória, por exemplo, podemos apresentar algumas dessas pesquisas, como as a seguir destacadas:

Barreto e Borba (2012) investigaram a influência de diferentes representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios, usando formas de representação distintas, tais como listagem e /ou árvore de possibilidades, levando os alunos a refletir sobre propriedades e relações combinatórias.

As autoras Borba e Azevedo (2010) defendem que o uso de árvore de possibilidades pode ser um rico meio de entendimento de diferentes situações combinatórias utilizando um software para construção de árvore, levando à reflexão das relações combinatórias; concluindo que esse método pode ser uma ferramenta para ampliação do conhecimento matemático adquirido pelos discentes.

Pessoa e Borba (2009) buscaram levantar dados sobre a compreensão de problemas combinatórios por alunos e observaram as estratégias por eles utilizadas na resolução das atividades propostas que envolveram os diferentes tipos de propriedades de Análise Combinatória, tais como produto cartesiano, arranjos, combinação e permutação. Na pesquisa observaram que problemas em que os alunos necessitam considerar a ordem dos elementos, ou seja, se são arranjo ou combinação, apresentaram baixos percentuais de acertos, isso pela dificuldade que os estudantes tiveram em levantar todas as possibilidades de solução. As autoras concluem, enfatizando, que se deve reconhecer que o raciocínio combinatório se constrói dentro e fora da escola, por isso é necessário que os alunos desenvolvam atividades com resolução dos problemas, de modo sistematizado, considerando todas as possibilidades em uma situação-problema de combinatória. Enfatizam também que esse conteúdo seja introduzido nas séries iniciais de escolarização, nos anos iniciais do ensino fundamental, e destacam que ensinar a partir da resolução problemas

favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório e auxilia, inclusive, em outras disciplinas.

Parece-nos importante rever a definição de Análise Combinatória e seu atual campo de aplicação, pois tal campo mostra sua relevância para aplicações em outras ciências, em particular, para a computação e informática. Assim, colocamos a seguinte questão: Então o que é mesmo Análise Combinatória?

Para Hazzan (2004, p.1), “A Análise Combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos agrupamentos formados sob certas condições”.

Morgado *et al.* (2004, p.1) definem que Análise Combinatória “é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas”

As definições acima mostram duas formas distintas de tratamento da Análise Combinatória, sendo a primeira a mais adequada para a aplicação das técnicas que lhe são associadas e a segunda relacionada ao tratamento teórico dessas técnicas. Assim a primeira é mais adequada para os alunos da Educação Básica e a segunda já exigindo conhecimentos de Álgebra, em geral, tratados no ensino superior.

Ao abordar a Análise Combinatória de um ponto de vista mais teórico, Morgado *et al.* (2004) avançam sobre as aplicações da Análise Combinatória nas diversas áreas do conhecimento, principalmente na tecnologia, como podemos constatar no extrato que segue (MORGADO *et al.*, 2004, p.5).

A Análise Combinatória tem tido um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido enormemente, devido a necessidades em teoria dos grafos, em análise de algoritmos, etc.

Ao considerar a Análise Combinatória do ponto de vista do ensino, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio trazem uma abordagem sobre o significativo progresso de Análise Combinatória (BRASIL, 2008). O documento enfatiza a necessidade de se trabalhar com a matemática discreta na ciência e tecnologia, salientando sobre a importância que esse tema seja tratado na Educação Básica, não apenas como problemas de contagem, mas já utilizando conjuntos finitos e enunciados simples. Considerando-se essa ênfase, tem-se que esses problemas

estão associados à definição de Morgado *et al.* (2004), conforme se pode se observar no seguinte texto das Orientações:

No entanto, no decorrer do século XX, novas necessidades tecnológicas advindas da introdução dos computadores – que têm uma matemática discreta no seu funcionamento – provocaram um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos discretos. Desse processo decorre um desenvolvimento significativo da área de combinatória, que é a matemática dos conjuntos finitos. No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. (BRASIL, 2008, p.94)

A partir das constatações acima decidimos abordar os tópicos: Princípio Fundamental de Contagem (P.F.C.), Arranjos, Combinações e Permutações, que são partes integrantes da proposta de estudo de Análise Combinatória para o Ensino Médio. Mas, antes dessa decisão colocamos a seguinte questão: Por que é dado ênfase a esses tópicos no ensino da Análise Combinatória? Encontramos a justificativa para essa ênfase no trabalho de Morgado *et al.* (2004, p. 2), a saber:

Por que privilegiar o estudo das combinações, arranjos e permutações em um primeiro curso de Análise Combinatória? Em primeiro lugar, entre os vários tipos de “números para contagem” da Análise Combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória. Outra razão para seu estudo é a aplicabilidade desses números a problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante da Análise Combinatória.

Assim, o estudo desses números é justificado pelo fato de sua aplicabilidade na área de informática, problemas de probabilidades finitas, entre outros, que são importantes em diversos campos do conhecimento. Nesse contexto, os problemas de combinatória obedecem ao princípio de contagem.

Mas, na resolução de alguns problemas empregando-se o princípio fundamental de contagem, que é considerado o instrumento básico para a Análise Combinatória, a aplicação direta desse princípio pode se tornar muito trabalhosa. Sendo assim, algumas definições de modos de formar agrupamentos são importantes para auxiliar na resolução de diversos problemas de contagem (HAZZAN, 2004).

Assim, os problemas de contagem, que, em geral, são trabalhados no Ensino Médio, são tratados por meio de fórmulas, que correspondem às técnicas de permutação com e sem repetição, arranjos com e sem repetição e combinações sem repetição, sem associá-las a um conjunto finito. Além dessas técnicas, são também considerados os problemas que envolvem várias escolhas, ou seja, aqueles associados às operações.

Após situar a pesquisa, apresentamos a seguir alguns elementos da teoria de Duval sobre registros de representação semiótica.

## REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Iniciamos esta parte considerando as ideias de autores como Lima *et al.* (2013), que apontam que a Análise Combinatória poderia ser introduzida já no Ensino Fundamental, uma vez que necessita apenas de técnicas matemáticas elementares. Consideramos também que é preciso compreender as dificuldades apresentadas por professores e estudantes e assim encontrar meios para melhorar a formação matemática inicial dos discentes do ensino básico e dos futuros professores, a fim de prepará-los para lidar com uma sociedade cada vez mais informatizada e tecnologicamente mais avançada (DUVAL, 2003).

Para Damm (2012, p.167), existe uma relação estreita entre a Matemática e a forma como se estabelece seu ensino, em particular, a comunicação da primeira precisa considerar as diferentes formas de representação do objeto matemático de estudo.

Em matemática, toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

No mesmo sentido, D'Amore (2005, p.55) considera que o ensino de Matemática, por se tratar “de uma necessidade tipicamente humana, uma elaboração (com características internas ou sociais ou ambas) que se organiza ao redor ou nos



sistemas semióticos de representações”, torna necessária a reflexão profunda “sobre o fato de que na aprendizagem matemática conceitual não é possível existir *noésis* sem *sémiosis*.” (D’amore, 2005, p.64).

Segundo Duval (1995), a *noésis* corresponde às “ações cognitivas, como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência” (DUVAL, 1995, p.2-3), e a *sémiosis* à “apreensão ou à produção de uma representação semiótica”. (DUVAL, 1995, p.2).

Damm (2012, p.177) destaca que para se estabelecer a aquisição do conhecimento de objeto matemático “é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *sémiosis* (representações) ”.

Duval (1995, p.36) define registro de representação semiótica como um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como um sistema formal; ou seja, caracteriza-se essencialmente pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar. Trata-se de um sistema semiótico que deve permitir as três atividades cognitivas fundamentais associadas à *sémiosis*, a saber:

1. a *formação de uma representação* que possa ser identificada como uma representação de um determinado registro [...] uma seleção de traços e dados no conteúdo a representar; [...] que se faz em função das regras de formação próprias ao registro semiótico no qual a representação é produzida [...];

2. o *tratamento de uma representação* é a transformação desta representação no mesmo registro que ela foi formada. [...];

3. a *conversão de uma representação* é a transformação desta representação em uma representação de outro registro, conservando a totalidade dessa representação ou uma parte essencial do conteúdo da representação inicial.

Duval (2003) também destaca que é imprescindível uma abordagem cognitiva no ensino de Matemática, porque o objetivo da Educação Matemática no ensino básico não é formar somente o matemático, nem oferecer instrumentos que serão úteis somente no futuro, e sim oferecê-los de forma que estes sejam úteis para o desenvolvimento geral de competências de raciocínio, de análise e de visualização. Para o autor:

A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em situação de ensino (DUVAL, 2003, p.12).

Assim, o autor enfatiza a importância das várias formas de representação semiótica utilizadas em Matemática, e dentre elas, destaca: o sistema de numeração e as escritas algébricas formais, as figuras geométricas, representações gráficas e a língua natural. Ele salienta também que existem quatro tipos diferentes de registros, dois deles classificados em Registros Multifuncionais e os outros dois em Registros Monofuncionais. O quadro 1 apresenta os tipos de registros de representação semiótica definidos por Duval.

**Quadro 1:** Tipos de Registros de Representações Semiótica.

<b>REGISTROS</b>	<b>REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA</b>	<b>REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA</b>
<b>MULTIFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos não são algoritmizáveis.	<i>Língua natural</i> Associações verbais (conceituais) Formas de raciocinar: – Argumentação a partir de observações, de crenças; – Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	<i>Figuras geométricas planas ou em perspectivas</i> (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). – Apreensão operatória e não somente perceptiva; – Construção com instrumentos.
<b>MONOFUNCIONAIS:</b> Os tratamentos são principalmente algoritmos.	<i>Sistemas de escritas:</i> – Numéricas (binária, decimal, fracionária ...); – Algébricas; – Simbólicas (línguas formais). Cálculo	<i>Gráficos cartesianos</i> – Mudanças de sistemas de coordenadas; – Interpolação, extrapolação.

**Fonte:** Duval (2003, p.14).

Os fracassos ou os bloqueios de entendimento dos discentes aumentam quando é necessária a mudança de registro ou quando a mobilização simultânea de dois registros é requisitada (DUVAL, 2003). De tal modo, o autor enfatiza que “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro”, pois a atividade matemática tem como característica a utilização de uma diversidade dos registros de representação semiótica que são mobilizados obrigatoriamente. Segundo o autor, para analisar as dificuldades na aprendizagem em Matemática é necessário dar prioridade ao estudo das conversões das representações semióticas e não aos tratamentos dessas representações, pois a articulação dos registros constitui o não enclausuramento em um determinado registro (DUVAL, 2003).

Colombo, Flores e Moretti (2008) trazem reflexões sobre a forma de utilização dos estudos de Duval, enfatizando o papel dos registros de representação semiótica no ensino e na aprendizagem da Matemática. A leitura sobre essas reflexões nos conduziram a concordar com os autores, compreendendo que um ensino de matemática direcionado para a mobilização dos registros de representação semiótica pode contribuir significativamente para que o trabalho do professor de matemática em sala de aula venha a atingir os objetivos, previamente planejados, uma vez que ao utilizar diversas representações, mostrando que elas podem ser usadas no desenvolvimento de tarefas que envolvem um mesmo objeto matemático. Com isso, podem-se diminuir as dificuldades de aprendizagem dos objetos dessa disciplina.

## **NÍVEIS DE CONHECIMENTOS ESPERADOS DOS ESTUDANTES**

Para a nossa pesquisa, além da teoria sobre os registros de representação semiótica, consideramos a abordagem teórica em termos de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, que apresentamos de forma breve a seguir. Essa abordagem nos auxilia a compreender as formas de organização dos conhecimentos; formas que dependem dos diferentes registros associados a um mesmo objeto matemático.

Os níveis de conhecimentos esperados dos estudantes foram definidos por Robert (1997) enquanto ferramentas didáticas indicadas para a construção de engenharias didáticas. A autora, após considerar os fracassos dos estudantes e as práticas dos especialistas, observa a necessidade das mudanças de quadros, pontos de vista e o trabalho com diferentes registros de representação semiótica como ferramentas para o desenvolvimento de cenários de aprendizagem centrados sobre a metodologia da engenharia didática. Isto a conduz a identificar as diferentes naturezas das noções a ensinar, assim como o nível de conceituação que podemos tratá-las, ou seja, a forma como podemos organizar um campo conceitual que corresponda a uma organização coerente de uma parte do campo.

A partir dessas reflexões Robert (1997) define os três níveis de conhecimento esperados dos estudantes, observando que os mesmos são relativos a um

determinado nível de conceituação. Deste modo, a autora introduz os níveis técnico, mobilizável e disponível, que descrevemos a seguir.

O *nível técnico* corresponde à execução da tarefa de maneira isolada, local e concreta, ou seja, trata-se da utilização das ferramentas que permitem resolver determinada tarefa. Nesse nível aplicamos diretamente uma fórmula, uma definição, um teorema. Por exemplo: Calcular  $2!$ ,  $3!$ .

O *nível mobilizável* é aquele em que existe um início de justaposição de saberes de um determinado quadro, até mesmo uma organização. Nele, vários métodos podem ser mobilizados, os caracteres ferramenta e objeto são considerados, mas o que se pede está explícito na tarefa. Exemplo: De quantas maneiras podemos permutar três cores?

O *nível disponível* corresponde a saber resolver o que é proposto sem indicações; de poder dar contraexemplos, mudar de quadros, aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas, que o estudante sabe que as conhece, ou seja, que servem de terreno de experimentação. Assim, nesse nível o estudante dispõe de sistemas de referência, é capaz de questionar em função da organização de conhecimentos que pode realizar o que lhe possibilita propor para si problemas e fazer resumos. Exemplo: Quantos números de 4 algarismos (sem repetição num mesmo número) podemos formar com os algarismos 3, 4, 5 e 6?

Lima *et al.* (2013) observam que a Análise Combinatória, apesar de exigir essencialmente o conhecimento das operações aritméticas de adição, subtração, multiplicação e divisão, normalmente coloca muitas dificuldades para professores e estudantes. Isso pode estar associado ao fato que as tarefas a ela relacionadas estão, em geral, classificadas no nível técnico ou disponível, pois ou se trata de aplicar diretamente uma definição ou é preciso dispor de diferentes modos de representar a tarefa proposta para compreender qual dos casos está sendo tratado.

No item a seguir apresentamos uma concisa discussão sobre a metodologia de resolução de problemas, que nos parece adequada para desenvolver tarefas como as que, em geral, podemos propor em Análise Combinatória, uma vez que essas devem fazer parte de um sistema de referências dos estudantes.

## RESOLUÇÕES DE PROBLEMAS NO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A resolução de problemas vem sendo considerada como metodologia de ensino em Matemática, em que, comumente, o professor propõe situações associadas ao cotidiano do aluno. Essa metodologia possui a característica de ensino investigativo, por explorar novos caminhos para a aquisição do conhecimento (MENDES, 2008).

Considerando essa metodologia, Polya (2006, p.3) coloca dois objetivos essenciais que os professores devem observar em suas aulas em relação ao aluno: “primeiro, auxiliá-lo a resolver o problema que lhe é apresentado; segundo, desenvolver no estudante a capacidade de resolver futuros problemas por si próprio”. O referido autor ainda orienta que é preciso visualizar o problema como um todo, com muita clareza e nitidez, ou seja, “É preciso compreender o problema, familiarizar-se com ele, gravar na mente o seu objetivo.” (POLYA, 2006, p.29).

Alguns pesquisadores em Educação Matemática, como Polya (2006), Mendes (2008) e Onuchic (1999), enfatizam que essa tendência para o ensino de matemática visa o desenvolvimento de habilidades metacognitivas<sup>4</sup>, levando os sujeitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem a terem autonomia na construção do conhecimento matemático. Portanto, essa forma de ensinar se contrapõe ao ensino memorístico, levando o aluno a pensar por si mesmo, levantando hipóteses, analisando-as e chegando a conclusões em meio a uma discussão com os colegas de classe (MENDES, 2008).

Nesse sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio sinalizam para a articulação entre contextualização e resolução de problemas, salientando que “a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola” (BRASIL, 2008, p.83).

---

<sup>4</sup>De acordo com Ribeiro (2003), habilidades metacognitivas dizem respeito, entre outras coisas, ao conhecimento do próprio conhecimento, à avaliação, à regulação e à organização dos próprios processos cognitivos.

Trabalhar a Análise Combinatória por meio de resolução de problemas, destacando aquelas situações problemas que utilizam fatos e situações que tenham significado para aluno, é uma forma de desmitificar esse conteúdo. A resolução de problemas favorece ao aluno o desenvolvimento cognitivo, contribuindo para a construção de conceitos e trabalhando habilidades que ajudarão na formação de sua estrutura de pensamento matemático. Além disso, como já ressaltamos acima, a Análise Combinatória conduz a um trabalho com tarefas cujo nível de conhecimento esperado dos estudantes é o disponível.

## **CONTEXTO DA PESQUISA: A ESCOLA E OS SUJEITOS ENVOLVIDOS NA INVESTIGAÇÃO**

A pesquisa teve sua parte experimental desenvolvida no Colégio Estadual Vitória de Santa Maria, localizado no bairro Santa Maria, na cidade de Aracaju, Sergipe. O colégio oferece o Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano, Ensino Médio em duas modalidades (Ensino Médio regular e Ensino Médio integral)<sup>5</sup> e projetos educacionais como: Projeto de Música Clássica, Mais Educação e Escola Comunidade.

Na época da pesquisa, a instituição de ensino contava com uma equipe diretiva composta por um diretor, três coordenadores, uma pedagoga e dois secretários, responsáveis por administrar e orientar pedagogicamente aos professores e funcionários.

Em relação à estrutura física, o colégio tem 16 salas de aulas, biblioteca, laboratório de informática educativa, laboratório de ciências, sala de vídeos, sala de recurso para atendimento a alunos especiais, sala dos professores, pátio com cozinha, quadra de esportes, sala da direção e sala da secretaria. A instituição funciona nos três turnos de ensino.

---

<sup>5</sup> Ensino regular é aquele onde o aluno segue, regularmente, somente um turno na escola. No ensino integral o aluno estuda em dois turnos na escola.

Na modalidade de Ensino Médio integral, em 2014 o colégio tinha quatro turmas de 1ª série, duas turmas de 2ª série e uma turma de 3ª série, totalizando sete turmas.

De acordo com o Guia de livros didáticos PNLD 2012, o conteúdo Análise Combinatória aparece no livro da 2ª série do Ensino Médio. Como o planejado para o desenvolvimento do projeto foi trabalhar somente com uma turma, para a escolha levou-se em consideração a turma cujas aulas de matemática ocorriam em um mesmo turno. A turma escolhida era composta por 31 alunos; porém, dois alunos abandonaram a escola logo no início do ano letivo, ficando 29 frequentando regularmente as aulas. Quanto ao sexo, tínhamos 21 femininos e 8 masculinos. O professor regente da turma era licenciado em matemática e especialista em matemática financeira, lecionando a disciplina matemática no Ensino Médio há 10 anos.

As sessões de ensino foram desenvolvidas na sala de aula e no laboratório de informática educativa.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS DA ENGENHARIA DIDÁTICA

A noção de engenharia didática surgiu na Educação Matemática na década de 1980, sendo uma metodologia de pesquisa desenvolvida pela escola francesa.

Segundo Artigue (2010), a engenharia didática tem como base as realizações didáticas em classe, ou seja, ela se fundamenta sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino, cuja validação é essencialmente interna, fundamentada sobre a confrontação entre análise *a priori* e análise *a posteriori*. Trata-se de uma metodologia estruturada em quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação, análise *a posteriori* e avaliação, cujas características são precisamente identificadas.

As análises preliminares são desenvolvidas em função dos objetivos da engenharia didática e compreendem as seguintes análises: análise epistemológica, análise institucional, análise cognitiva e análise de restrições.

Para a concepção e análise *a priori* é necessário que se escolham as variáveis de comando macro e micro-didáticas, pois são elas que governam a construção das situações tanto no nível das situações matemáticas como de sua organização didática. A análise *a priori* é concebida como análise do controle das relações entre sentido e situações, sendo ao mesmo tempo descritiva e preditiva, centrada sobre um funcionamento adidático, ou seja, na capacidade do estudante de interagir com o meio por meio de decisões e ações regulares e eficazes, sem que para isso possa ou não identificar, explicitar ou explicar o conhecimento necessário.

Na sequência são consideradas a experimentação, a análise *a posteriori* e a validação interna, que envolvem principalmente a relação das análises *a priori* e *a posteriori*. Artigue (2010) ressalta ainda que as distorções inevitáveis e constatadas não são necessariamente consideradas para invalidar as hipóteses feitas.

Finalmente, Artigue (2010) salienta a importância da evolução dos níveis de controle associados à análise do saber; à definição das situações e dos meios com um enfraquecimento sobre os meios, de forma a considerar outras restrições para controle das potencialidades adidáticas do meio e permitir as mediações do professor que interferem negativamente na aprendizagem; aos conhecimentos dos alunos que, em geral, apresentam contextos cognitivos diversos, o que conduz à necessidade de antecipá-los para prever as possibilidades de adaptação em função dessa diversidade; ao papel do professor que, mesmo tendo um controle menor da situação, necessita agir de forma clara e flexível sobre o meio nas diferentes fases da engenharia; às restrições institucionais; e à relação pesquisador e professor.

Dessa forma, observamos que para as *análises preliminares* foi feito um estudo do conteúdo programático proposto, por meio da análise e organização didática de Análise Combinatória em documentos oficiais, tais como: Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - 9.394/96 (LDB) (BRASIL, 1996), Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) (PCN) (BRASIL, 2000), Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCNEM) (BRASIL, 2002), Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) e análise de um livro didático disposto no Guia de livros didáticos PNLD 2015 (BRASIL, 2015), ou seja, restringimo-nos à análise institucional.



Ressaltamos que para a análise do livro didático se buscou enfatizar a proposta feita no livro adotado pela escola em que foi aplicada a sequência de ensino, mesmo que outras obras tenham sido analisadas e consideradas na construção da sequência didática.

Na *Concepção e análise a priori*, com o intuito de responder às questões propostas e validar as hipóteses colocadas na fase das análises preliminares, para este estudo, foi elaborada uma sequência didática sobre Análise Combinatória, com ênfase na metodologia de Resolução de Problemas, utilizando como referências Polya (2006), Mendes (2008) e Onuchic (1999).

Assim, para atingir os objetivos dessa pesquisa determinamos as variáveis didáticas que poderiam provocar as mudanças pretendidas no processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Na análise *a priori* das situações-problemas devemos considerar dois aspectos. O primeiro aspecto refere-se à análise dos conhecimentos matemáticos necessários para a solução da tarefa, para identificar as possíveis estratégias e métodos que possibilitam a resolução da situação proposta, evidenciando os saberes, os conhecimentos matemáticos e os registros de representação utilizados. O segundo, à análise didática, para verificar a pertinência da sequência de ensino, identificar as variáveis de comando, refutar e analisar as dificuldades que os discentes poderiam enfrentar na resolução das atividades e identificar novos saberes ou métodos para a aprendizagem do tema de estudo.

A *Aplicação da Sequência de Ensino ou experimentação* é uma etapa de grande importância na garantia de uma coerência entre os resultados em sala de aula e o referencial teórico discutido no estudo. As sessões de ensino planejadas neste trabalho tiveram por finalidade a observação de situações de aprendizagem, envolvendo principalmente a utilização dos diferentes registros de representação semiótica, relacionados aos conceitos em jogo na situação proposta.

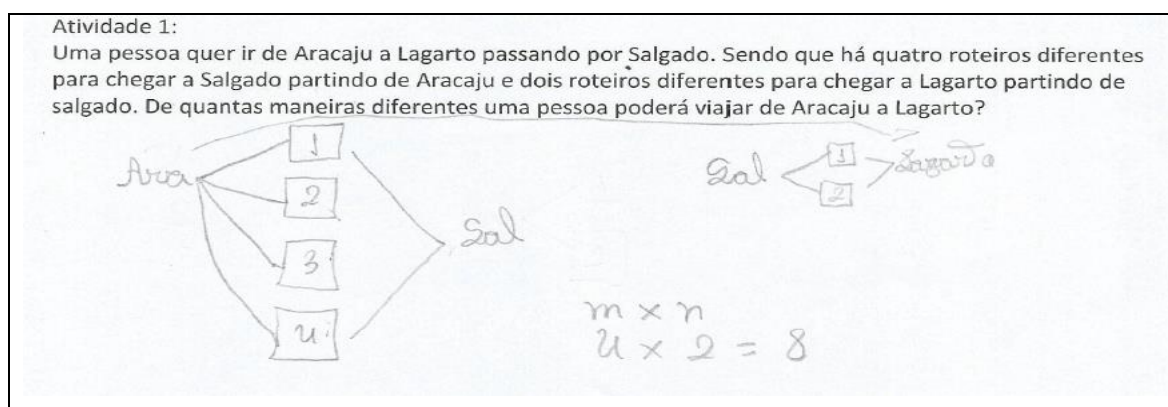
Quanto à *Análise a posteriori e validação*, nessa etapa da pesquisa foi feita uma apreciação dos dados obtidos por meio dos protocolos da experiência, de forma predominantemente qualitativa, a fim de verificar a hipótese colocada nesse estudo.

## ANÁLISE A PRIORI E EXPERIMENTAÇÃO

A sequência didática elaborada foi composta por cinco sessões de ensino, divididas em duas partes, conforme descritas a seguir.

A primeira parte constou de três sessões, sendo que na *primeira sessão* iniciamos explicando os objetivos e enfatizando que os alunos seriam voluntários. Logo em seguida, os alunos assistiram ao filme “De malas prontas”, disponibilizado em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1083>. Após o filme foram discutidas com os alunos as noções matemáticas associadas à Análise Combinatória, ou seja, o princípio fundamental de contagem, o fatorial e a permutação. Ao final, aplicou-se o primeiro protocolo com três atividades sobre as noções acima consideradas. Os estudantes resolveram individualmente as atividades e entregaram um protocolo com as soluções por eles propostas. Na Figura 1 é apresentada a atividade 1, na qual também aparece a resposta de um aluno. Observamos que na sua resposta, ele mobilizou dois tipos de registro de representação semiótica: situação esquemática e numérico.

**Figura 1:** Extrato da solução proposta por u



Fonte: Fonseca (2015)

Na *segunda sessão*, foram discutidas com os alunos três (novas) atividades de Princípio Fundamental de Contagem e uma atividade de Fatorial. Para essas atividades o enfoque dado era a possibilidade de utilizar diferentes registros de representação semiótica nas soluções, com ênfase na Situação Esquemática por meio do diagrama de árvore.

Novamente, os alunos trabalharam individualmente e na sequência apresentaram suas soluções, que foram discutidas pela turma, para identificação das diferentes formas de representar os objetos matemáticos em jogo nas atividades e dar sentido aos mesmos.

Na terceira sessão, abordou-se a noção de permutação, sendo a atividade desenvolvida da mesma forma que na segunda sessão, ou seja, foram propostas três atividades nas quais eram consideradas as diversas formas de representar a noção de permutação. Após a discussão entre professor/pesquisador e estudantes sobre os diferentes registros de representação que poderiam ser utilizados na solução das atividades, os alunos trabalharam individualmente, respondendo o protocolo de atividades que foi utilizado para a análise dos dados.

A atividade 2 da figura 2 é uma das três que foram discutidas com os estudantes. O recorte a seguir apresenta tal atividade e a resposta apresentada por um estudante, que empregou os registros diagrama de árvore e algébrico.

**Figura 2:** Extrato da atividade 2 com uma proposta de solução

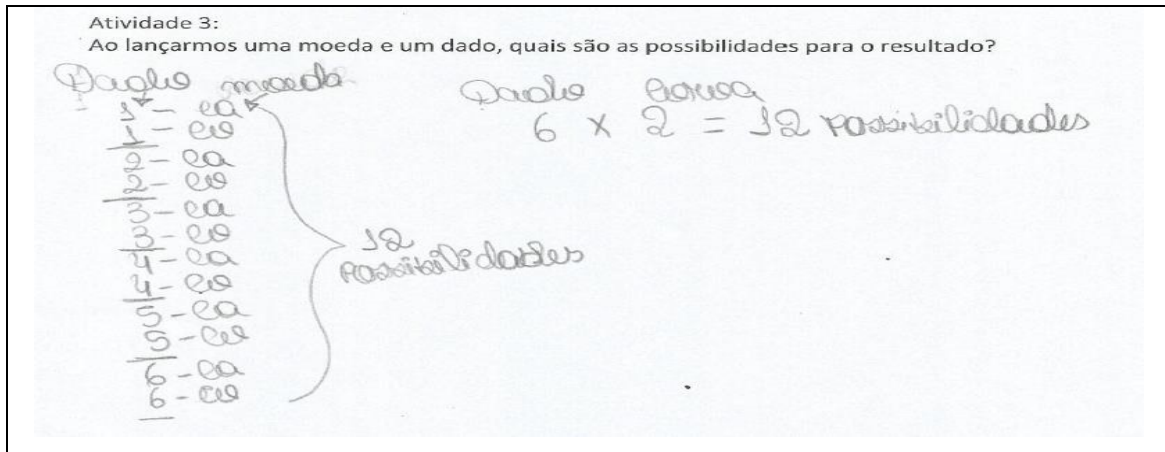
Atividade 2:  
Num restaurante há dois tipos de salada, três tipos de pratos quentes e dois tipos de sobremesa. De quantas formas se pode fazer uma refeição?

$S_2 \times P_3 = 2 \times 3 = 6$   $\times$   $S_2 = 6 \times 2 = 12$  formas

**Fonte:** Fonseca (2015).

No recorte da figura 3 a seguir está apresentada a resposta de um estudante, que empregou como registros situação esquemática e algébrica.

**Figura 3:** Atividade 3 com a resposta de um dos estudantes



Fonte: Fonseca (2015)

Na aplicação do primeiro protocolo estavam presentes em sala de aula 26 alunos, que resolveram as questões propostas. As atividades do primeiro protocolo tinham por objetivo verificar quais registros foram utilizados pelos alunos e quais conversões foram mobilizadas no conteúdo Princípio Fundamental de Contagem.

A segunda parte da sequência didática constou de duas sessões, descritas a seguir.

Na quarta sessão foram abordadas as noções de arranjos e combinação, a partir do filme “Desejos”, e como nas sessões anteriores, discutidas quatro atividades relacionadas com as mobilizações dos registros semióticos relacionados a essas noções.

Na quinta sessão foi retomada a discussão sobre princípio fundamental de contagem, permutação, arranjos e combinação com atividades baseadas na resolução de problemas, dando-se destaque à mobilização dos registros semióticos. Por fim, foi aplicado o segundo protocolo com quatro atividades. Nessa última sessão estavam presentes 28 alunos.

O recorte apresentado na figura 4 a seguir, traz a atividade 1 do segundo protocolo, com a resposta de um aluno, em que é observada a utilização de dois tipos de registro de representação semiótica: diagrama de árvore e algébrico.

**Figura 4:** Atividade 1 do segundo protocolo

Atividade 1: P.F.E  
 Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal? Quais são?

$H_1 \begin{cases} M_1 = H_1 M_1 \\ M_2 = H_1 M_2 \\ M_3 = H_1 M_3 \\ M_4 = H_1 M_4 \end{cases}$

$H_2 \begin{cases} M_1 = H_2 M_1 \\ M_2 = H_2 M_2 \\ M_3 = H_2 M_3 \\ M_4 = H_2 M_4 \end{cases}$

$H_3 \begin{cases} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{cases}$

$4 \cdot 3 = 12$

Atividade 2:

Fonte: Fonseca (2015)

Para essa atividade, na análise *a priori* buscamos observar as dificuldades dos alunos na resolução das atividades, a identificação dos registros semióticos e as conversões utilizadas. No geral, verificamos que o nível de conhecimento esperado dos estudantes nas atividades pôde ser classificado majoritariamente como Técnico e Mobilizável, e em menor quantidade observou-se o nível Disponível.

## ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Após a experimentação da sequência didática, analisamos os dados coletados por meio dos dois protocolos que continham um total de sete atividades.

No primeiro protocolo, que se refere às três primeiras sessões da sequência didática, contendo três atividades relacionadas ao princípio fundamental de contagem e à noção de fatorial, observamos na análise das respostas das atividades resolvidas pelos alunos que eles empregaram diferentes estratégias de resolução, sendo utilizado o diagrama de árvore, a situação esquemática e a algébrica, principalmente. Isso mostra o desenvolvimento de uma visualização geral do problema e uma diversidade na utilização dos registros semióticos.

Deste modo, podemos considerar por meio das propostas de solução dos alunos, demonstradas nos recortes, que houve uma mobilização do registro de partida, a língua natural, para os registros de chegada, o algébrico e a situação esquemática.

Com isso, podemos considerar que os alunos desenvolveram habilidades associadas à representação do objeto matemático em estudo. Isso foi possível em função da discussão estabelecida pelo pesquisador, suscitada por meio das

atividades construídas, que tiveram a finalidade de sustentar a importância de um trabalho no qual se considere a utilização de diferentes registros de representação semiótica e a coordenação dos mesmos.

Assim, a motivação do estudo por meio do filme e o desenvolvimento dessas três sessões com a participação ativa dos alunos permitiu que eles compreendessem a importância das diferentes representações para um mesmo objeto matemático. Isso possibilita aos alunos optar pela representação que lhes pareça mais adequada para a solução de problemas que envolvem as noções desenvolvidas nas três primeiras sessões.

O segundo protocolo referia-se às duas últimas sessões da sequência didática, que continham cinco atividades relacionadas às noções de base da Análise Combinatória, que são o princípio fundamental de contagem, fatorial, permutação, arranjo e combinação.

As atividades utilizaram como registro de partida situações enunciadas no registro semiótico da língua natural, e para as resoluções os alunos empregaram os registros de chegada algébrico e situação esquemática. Essas mobilizações dos alunos estabelecem uma visualização geral e ampla do objeto matemático em estudo.

Já para as noções de arranjos e combinação, evidencia-se uma maior dificuldade em elaborar uma situação esquemática ou um diagrama de árvore, embora na abordagem do princípio fundamental de contagem essas habilidades tenham sido utilizadas de forma ampla. Logo, pode-se inferir que é importante um trabalho mais longo sobre essas noções específicas, pois podemos ter aqui um hábito associado ao contrato didático usual desses alunos, que pode estar associado à identificação dos dados de uma situação ou problema e à aplicação direta em uma fórmula matemática. É preciso lembrar que os alunos que participaram da pesquisa estão na segunda série do ensino médio, isto é, já estão na escola há pelo menos 11 anos, o que dificulta a mudança de contrato.

As questões utilizadas nos protocolos e nas sessões de ensino tinham, em maior parte, o intuito de representar uma situação do cotidiano, sendo consideradas como problemas abertos, que exigem do aluno uma interpretação para a resolução.

Além disso, também identificamos que os alunos, ao serem solicitados a se envolver na resolução dos problemas em sala de aula, mostraram-se favoráveis a essa nova metodologia de trabalho. Por exemplo, destacamos o seguinte registro no diário de campo pelo pesquisador, relativo à fala de uma aluna da turma: *Realmente aprendi esse assunto, gostei professor da forma que você ensinou a gente*. Observamos que essa observação feita pela aluna foi proferida logo após o término da resolução de uma atividade em que se utilizou o diagrama de árvore.

Desse modo, conduzindo as sessões de ensino de forma dinâmica, com discussões voltadas para a diversidade e mobilização dos registros de representação semiótica e com atividades que retratam o cotidiano, pudemos manter a atenção e o interesse dos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória que é um ramo importante da matemática.

Nas análises *a priori* das atividades propostas foi considerada a hipótese da pesquisa, que foi a aplicação de uma sequência didática que possibilite a articulação entre os diferentes registros de representação semiótica propicia aos alunos uma melhor compreensão dos objetos matemáticos associados ao domínio da Análise Combinatória, o que permitiu identificá-la no trabalho dos estudantes.

Além disso, é importante ressaltar que as atividades dos protocolos foram construídas considerando ainda noção de níveis de conhecimento esperado dos estudantes e a metodologia de pesquisa centrada na resolução de problemas, o que auxiliou na identificação dos problemas que poderiam ser trabalhados inicialmente e aqueles que seriam introduzidos na sequência de forma a possibilitar a participação efetiva dos estudantes.

Na análise *a posteriori*, podemos perceber nas resoluções das questões que os alunos visualizaram e realizaram as transformações do objeto matemático em estudo, sendo capazes de coordenar os diferentes registros de representação semiótica utilizados no estudo. Isso corrobora com as ideias de Duval (2003, p. 21), quando considera que “A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro”.

Assim, os resultados das análises dos dados coletados comprovam a validade da hipótese, ou seja, de que a aplicação de uma sequência didática que possibilite a

articulação entre os diferentes registros de representação semiótica propicia aos alunos uma melhor compreensão do objeto matemático Análise Combinatória.

## CONCLUSÃO

O estudo desenvolvido nessa pesquisa buscou planejar e aplicar uma sequência didática com atividades relacionadas ao ensino de Análise Combinatória, buscando mostrar sua importância por meio de situações centradas no cotidiano e relacionando com a aplicabilidade nas diversas áreas do conhecimento científico.

Os vídeos apresentados se mostraram como ferramentas de motivação dos discentes para o estudo e entendimento dos conceitos e também das possibilidades de trabalho com os diferentes registros de representação semiótica envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

Dos estudos, planejamentos e aplicação da sequência didática, da análise do livro didático, das observações feitas em sala aula e dos depoimentos dos alunos é possível concluir que alcançamos plenamente os objetivos propostos inicialmente.

Durante o desenvolvimento das sessões de ensino foi observado que os alunos tinham dificuldades de participar das discussões durante a resolução dos problemas, porém, com o desenvolvimento das sessões, percebeu-se que eles começaram a se envolver e contribuir com sugestões para a resolução dos problemas.

Em geral, na fase da experimentação da pesquisa, os discentes buscavam entender e utilizar os registros de representações semióticas realizando os tratamentos e as conversões. Dessa forma, o trabalho nessa perspectiva evidencia uma estratégia que permite aos alunos visualizarem os diferentes registros de representação semiótica dos objetos matemáticos estudados, proporcionando a capacidade de transformação desses registros, e dessa forma, contribuindo na construção do conhecimento visado.

A análise dos dados coletados na aplicação da sequência didática se mostrou positiva para o processo de ensino e aprendizagem dos conceitos acerca de Análise



Combinatória, pois os discentes contribuíram em todas as sessões de forma motivada e participativa na fase da experimentação.

A metodologia utilizada na condução das sessões de ensino estabeleceu um ambiente favorável para discussão entre discente e pesquisador e entre os discentes no momento da introdução e desenvolvimento das noções associadas à Análise Combinatória, pois as noções trabalhadas foram construídas com participação do aluno por meio da resolução dos problemas propostos. Assim, esta pesquisa também corrobora com a afirmação de Lima *et al.* (2013, p.140) que é importante ir “habitando o aluno a trabalhar com problemas de contagem e a ver que, afinal de contas, tais problemas podem ser resolvidos com raciocínio simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas”.

A articulação por meio das transformações dos registros de representação semiótica favoreceu ao desenvolvimento do raciocínio combinatório e a visualização do objeto matemático e suas representações, possibilitando tanto as conversões quanto os tratamentos, mesmo se as conversões não são trabalhadas de forma sistemática.

Com as sessões de ensino ministradas por meio da discussão entre alunos e pesquisador e alunos e alunos procurou-se promover uma forma de ensinar e aprender que permite a compreensão do objeto matemático em estudo através de seus diferentes registros de representação semiótica, o que favoreceu a participação dos alunos nas atividades de resolução de problemas, para os quais os próprios alunos foram capazes de constatar que seus conhecimentos das operações básicas da matemática eram suficientes.

A partir dos resultados encontrados na pesquisa, pode-se considerar que a sequência didática representou um recurso importante no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória para o grupo de alunos que participaram da pesquisa. Dessa forma, podemos considerar que a aplicação de sequências didáticas, utilizando ferramentas didáticas conhecidas pelo professor, são recursos importantes para a introdução e desenvolvimento de novos conhecimentos matemáticos.

## REFERÊNCIAS

- ARTIGUE, M. Notas do curso monográfico da Escola de Altos Estudos da Capes. São Paulo: Uniban, 2010.
- BARRETO, F.L.S.; BORBA, R.E.S.R. Estudantes de Anos Iniciais da Educação de Jovens e Adultos Resolvendo Problemas Combinatórios com Listagens e com Árvores de Possibilidades. **Educação Matemática em Revista - SBEM**, v.35, p.26-31, 2012.
- BORBA, R.E.S.R.; AZEVEDO, J. Construindo Árvores de Possibilidades para Compreensão de Relações Combinatórias. **Educação Matemática em Revista - SBEM**, v.31, p.24-32, 2010.
- BRASIL. **Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza Matemática e suas tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília: MEC; SEMTEC, 2008.
- BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Brasília: MRC, 1996.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Secretaria de Educação Básica Média e tecnológica. Brasília: MEC/Semtec, 2000.
- BRASIL. **PCN+ Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Básica Média e tecnológica. Brasília: MEC/Semtec, 2002.
- BRASIL. **Guia de livros didáticos PNLD 2015 Ensino médio**: Matemática. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. Brasília: SEF/MEC, 2015.
- COLOMBO, J.A.A.; FLORES, C.R.; MORETTI, M.T. Registros de Representação Semiótica nas pesquisas brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. **ZETETIKÉ** v.16, n.29, p.41-72, 2008.
- D'AMORE, B. **Epistemologia e didática da Matemática**. São Paulo: Escrituras, 2005.
- DAMM, R. F. **Registros de representação**. In: Machado, S.D.A. et al. (org.) Educação Matemática: uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2012, p.135-154.
- DUVAL, R. Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). **Aprendizagem em matemática**: registros de representações semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-34.
- DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**. Registres semiotiques et apprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang. S.A., 1995.
- FONSECA, A.J.S. **O ensino da análise combinatória**: um estudo dos registros de representações semióticas por meio de sequência didática. Dissertação (Mestrado em Ciências Matemáticas) - Universidade Federal de Sergipe. Sergipe, 2015.
- Guia de livros didáticos: **PNLD 2012: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.
- HAZZAN, S. Fundamentos da Matemática Elementar. São Paulo: Atual, 2004.
- LIMA, E.L. et al. *Temas e problemas elementares*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.
- MENDES, I.A. Tendências metodológicas no ensino de Matemática. Belém: UFPA, 2008.
- MORGADO, A.C.O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

ONUICHIC, L.R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M.A.V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p.199-218.

PESSOA, C.; BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ**, v.17, n.31, p.105-150, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

RIBEIRO, C. Metacognição: um apoio ao processo de aprendizagem. **Psicologia: Reflexão e Crítica**, v.16, n. 1, p. 109-116, 2003.

ROBERT, A. Quelques outils d'analyse épistemologique et didactique de connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *In*: **Actes De La Ix Ecole D'ete De Didactique Des Mathematiques**. Anais... Houlgate: ARDM, 1997, p.192-212.

Submetido: Junho de 2015

Aceito: Novembro de 2015