MATHÉMATIQUES, RÉALITÉ ET DIDACTIQUE DES DOMAINES D'EXPÉRIENCE

Nadia Douek
França
ndouek@wanadoo.fr

Une caractéristique de la didactique des domaines d'expérience est de construire les savoirs mathématiques à partir de « domaines d'expérience » généralement pluridisciplinaires et traitant une certaine « réalité ». Nous questionnerons le mot « réalité », et présenterons la théorie des domaines d'expérience. La théorie des champs conceptuels de Vergnaud et les travaux de Vygotsky constituent les références théoriques épistémologiques et cognitives sur lesquels s'appuie la didactique des D.E. pour analyser le potentiel d'un domaine d'expérience pour la construction de savoirs, et pour concevoir les situations didactiques qui permettent ces constructions.

Quel réel?

On considèrera un "réel", avec des éléments manufacturés ou naturels, ainsi que l'activité dont a l'expérience l'élève, dans la mesure où ce « réel » est susceptible de faire sens pour le sujet, soutenir ses élaborations conceptuelles et fournir des appuis pour développer des savoirs scolaires.

Nous faisons l'hypothèse qu'un objet de savoir fait sens pour un sujet s'il a un caractère culturel et plus spécialement s'il est susceptible d'être « instrumentalisé » (Rabardel, 1995) par le sujet. Un élément de « réalité » nous intéressera donc dans la mesure où il est (potentiellement pour l'élève) pris en charge par sa culture de référence, suivant un ensemble de pratiques, de valeurs, de croyances, d'outils...

De la définition de culture donnée par Hatano & Wertsch (2001)

> 'Culture' means the special medium of human life consisting of a set of interrelated artefacts [Cole, 1996], shared to some extent among members of the community and often inherited over generations. These artefacts include physical tools, common sense knowledge and beliefs, social organizations, and conventional patterns of behaviour associated with the physical, symbolic, and social tools.

... nous retenons trois choses: L'acception instrumentale (Rabardel, 1995) des éléments ("artefacts") par lesquels est définie une culture (les instruments matériels, les connaissances et les croyances qui relèvent du sens communs, les organisations sociales, les schèmes de comportement, etc.). Le caractère « lié » de ces artefacts ("interrelated artefacts"), qu'il est intéressant de rapprocher de l'idée des liens systémiques par lesquels Vygotsky caractérise les « concepts scientifiques » (voir plus loin). Et la transmissibilité de la culture et sa référence à une communauté.

Et nous en déduisons une caractérisation opérationnelle de ce qui est susceptible de faire sens pour l'élève, et qui peut nous guider dans le choix des éléments de réalité sur lesquels peuvent s'appuyer les travaux scolaires... afin de travailler à partir de ce qui fait sens.

Le "réel" peut-il fonder la construction de savoirs mathématiques?

La dialectique concept quotidien concept scientifique de Vygotsky comme base de notre cadre théorique

Les concepts quotidiens (CQ) seront un outil théorique qui permet de considérer la nature de la conceptualisation spontanée du « réel » chez l'élève, et d'analyser, d'un point de vue cognitif, son rapport avec la conceptualisation visée par l'école. Cette dernière est bien modélisée par ce que Vygotsky (1985, Ch. VI) nomme les concepts scientifiques (CS), et nous identifierons la construction de savoirs scolaires à une "conceptualisation scientifique". Notre « instrumentation » (et interprétation) des CQ et CS est une élaboration que nous allons préciser dans le paragraphe suivant. La dialectique CQ/CS est le cadre théorique auquel nous nous appuyons et dont nous adoptons les résultats, en particulier pour expliquer l'importance de construire les savoirs scolaires sur l'expérience de l'élève (dont celle du « réel »). Nous concevons alors les moyens didactiques de la construction des savoirs mathématiques sur la base de ce cadre et de ces résultats.

Les concepts quotidiens sont décrits par Vygotsky comme riches en sens, " saturé(s) de la riche expérience personnelle de l'enfant ". Leur utilisation et les systèmes auxquels ils se relient sont plutôt implicites. Ils se forment spontanément chez le sujet en rapport avec son expérience, sa culture et son entourage. Ils sont plutôt de portée locale.

Les concepts scientifiques sont décrits par Vygotsky par le fait qu'ils sont utilisés de façon consciente, et intentionnelle. Ils sont maniés et maîtrisés de façon explicite. On les relie à d'autres concepts en des systèmes. Ils ont un caractère de généralité, dans le sens où ils sont théoriques et ont un caractère systémique. Ils sous-entendent une recherche de rigueur, et on a tendance à les présenter par des définitions.

La dialectique concept quotidien concept scientifique est motrice de l'apprentissage. Les CS et CQ se distinguent, du point de vue de l'expérience de l'enfant, par des rapports différents qu'il élabore avec leur(s) objet(s). Quant aux implications dans l'enseignement-apprentissage, Vygotsky utilise l'image de la germination des *CQ « vers le haut »,* vers une plus grande généralisation, *et celle des CS « vers le bas »* puisqu'ils se développent à travers l'application des généralités et des liens systémiques aux situation particulières (comme dans la recherche d'exemples).

Interprétation et usage du cadre Vygotskien

Le caractère de scientificité (ou de quotidienneté), concerne, pour nous, l'usage des concepts et non pas les concepts en eux-mêmes. Ainsi des concepts algébriques peuvent être mobilisés de façon quotidienne et fonder des intuitions de structure lors d'un travail sur des espaces fonctionnels. La distinction n'est donc pas essentiellement d'ordre épistémologique. Le rapport avec la question de la « réalité » concerne ce mode d'accessibilité décrit comme « quotidien »: le réel pour un sujet est accessible sur le mode quotidien.

On retiendra des travaux de Vygotsky que les développements de ces deux pôles (CQ, CS) forment un jeu dialectique. Ceci justifie pour nous la nécessité de s'appuyer sur des concepts à caractère quotidien développés chez l'élève pour parvenir à construire ou développer l'usage scientifique de ce concept (ou d'un autre analysé comme proche et lié), ce qui permet l'enracinement de la conceptualisation scientifique au concept(s) quotidien(s); et, réciproquement, la nécessité d'assurer le développement « quotidien » des concepts et constructions scolaires. Notons que les rapports d'enracinement et de développement entre CQ et CS n'est pas toujours sans opposition et distanciation.

La nécessité de l'ancrage des apprentissages mathématiques au réel, du point de vue développemental, n'est alors que l'application de l'hypothèse de Vygotsky sur la dialectique CQ/CS au domaine qui nous intéresse. Cependant d'autres arguments encore pourraient soutenir ce choix.

Approfondissement et motivations complémentaires du choix Vygotskien

Concernant la perspective de l'ancrage au réel, la motivation de l'activité mathématique pour l'élève peut se fonder sur la *valeur culturelle* de la maîtrise de pratiques qui font sens. Ces pratiques peuvent être extrascolaires, comme l'utilisation de la monnaie. Elles peuvent aussi concerner des domaines disciplinaires offrant plus facilement prise à la curiosité scientifique des enfants, comme l'étude de la croissance de plantes ou la construction d'objets en technologie, en primaire. Ces domaines permettent une dévolution plus aisée que ne le permettent les problèmes mathématiques décontextualisés, ou contextualisés mais artificiels (détachés d'un réel investissement culturel dans le cadre du travail en classe). Ainsi contextualisés, les problèmes mathématiques sont approchés comme une modélisation et donc plutôt sur le mode quotidien (vis à vis d'un problème mathématique posé dans un cadre mathématique).

Enfin, quelque soit le contexte où il s'inscrit, le travail mathématique lié à la conceptualisation quotidienne permet aux élèves de s'engager dans l'activité plus aisément qu'à partir d'une conceptualisation scientifique. En effet, quand l'enseignant(e) traite un savoir à partir d'un mode de conceptualisation scientifique de façon prématurée, plusieurs aspects propres à un tel choix risquent de mettre les élèves en difficulté :

- Un temps premier de mise en place de formes langagières et de représentations sémiotiques spécifiques, et de définitions devient nécessaire pour traiter des objets qui n'ont pas encore "la bonne résonance" chez le sujet.

- Une exigence de rigueur prématurée peut écraser l'intuition de la situation, alors que celle-ci s'accompagne souvent d'une expression maladroite et insuffisante. Intuition et fragilités de l'expression sont plus acceptables dans le traitement quotidien, et elles sont nécessaires pour saisir une situation et la signification du problème à résoudre.

- Le contexte ou des représentations sémiotiques « trop » mathématisés, nécessitent, pour être saisis, d'être « exemplifiés ». Or il faut pour cela que des situations à la portée de l'imagination (proches de l'expérience) soient accessibles, ce dont on ne peut être sûr que si l'on a travaillé en classe pour assurer la disponibilité d'une conceptualisation quotidienne.

- L'appel à des relations entre concepts, ou entre concepts et situations, dont l'élève n'a pas encore internalisé (ou développé) les liens systémiques. Dans ce cas il risque de mobiliser ces relations comme procédures efficaces par contrat didactique, alors qu'elles ne sont pas assez maîtrisées et surtout elles ne sont pas mobilisées dans la conscience de leur rôle. Ceci se voit bien quand les élèves font des erreurs grossières de transfert d'une procédure qu'ils manient bien... sans lui prêter de sens.

Dans ces différents cas, il n'y pas l'espace pour une « germination vers le haut », et les « germinations vers le bas » possibles sont limitées dans d'étroits chemins. La conséquence de l'entrée par l'usage scientifique des concepts pourrait être une rigidification de la conceptualisation avec des ruptures de sens et des difficultés de transfert. Il nous paraît préférable que la conceptualisation soit mobile, qu'elle évolue avec les nouvelles situations dans lesquelles elle devra être mobilisée, et adaptée.

Nous rencontrons, par exemple, dans le primaire en France cette « rigidification » dans l'apprentissage du système de numération. Les élèves apprennent le plus souvent la numération à partir d'échanges groupements abstraits (voir plus de détails dans la section Exemple…) soit encadrés par un matériel qui impose les règles d'échanges, soit par un jeu de société qui n'a cours qu'en classe de mathématique. Dans les deux cas, l'entrée est plutôt sur un mode scientifique, essentiellement dans la mesure où l'élève n'a pas de ressources culturelles suffisantes pour produire l'expression verbale ou les représentations sémiotiques nécessaires pour s'engager dans l'activité qui concerne ces situations. Il doit commencer par les apprendre. Et bien sûr il est inévitable d'exiger qu'il les apprenne avec une certaine rigueur et une certaine généralité sinon les interactions ne sont pas possibles (du fait même que les situations ne relèvent d'aucune des activités spontanées de l'élève et donc pas non plus sur des références communes). Et concernant l'intuition, celle-ci ne peut être appelée si l'objet n'est pas conceptualisé sous une forme ou une autre, en particulier sous la forme quotidienne. Par exemple, la construction de la valeur de position d'un chiffre ne peut s'appuyer sur l'intuition que pour les élèves qui ont l'habitude du jeu de société, si c'est le parcours choisi dans cette classe. Pourtant tous les élèves de cet âge, dans notre société, rencontrent ce concept de valeur sous un traitement quotidien à propos de la valeur de leurs vêtements, de leurs objets personnels ou de friandises qu'ils peuvent acquérir ou non, mais ce concept-là est trop éloigné.

Cette entrée par la conceptualisation scientifique et par la mise en place des représentations sémiotiques, en amont de l'activité dans laquelle l'élève doit s'impliquer, peut donc rebuter. Mais de plus, une telle conceptualisation scientifique n'est pas mobile: une fois la numération mise en place, les élèves travaillent sur la monnaie (les euros), et beaucoup d'enseignants rapportent les difficultés des élèves (et pas les plus “mauvais”) à transférer les compétences acquises dans le cadre « plus mathématique » des échanges- groupements au cadre qui pourrait (et devrait) être familier de la monnaie. On verra plus loin que l'effet de la rigidification de la conceptualisation du système de numération se fait sentir assez longtemps. Cette réflexion sera développée ci-dessous dans l'exemple.

Considérant qu'on peut fonder les apprentissages mathématiques sur le réel, que c'est même une condition favorable, et que pour cela la dialectique CQ/CS modélise un apprentissage efficace, il nous faut maintenant réfléchir sur les conditions qui favorisent la mise en place d'une dialectique CQ/CS.

La théorie des domaines d'expérience

La théorie des domaines d’expérience, élaborée par P. Boero et son équipe de l'université de Gênes (Boero et al., 1995; Douek, 2003), étudie comment la nature des savoirs construits par le sujet est fonction des diverses pratiques et cadres culturels dans lesquels ces savoirs sont impliqués. Elle s’inspire de la dialectique CQ/CS de Vygotsky et prend en considération les deux tendances dans l’usage des concepts, “quotidienne” et “scientifique”. La perspective est d'accompagner l'élève dans l'appropriation des objets de savoir visés par l'école à partir de la culture développée à travers ses propres pratiques situées, et de développer sa maîtrise de ses concepts quotidiens.

On peut repérer des champs culturels d'activités humaines par la stabilité, dans une communauté donnée, des pratiques et des concepts qu’ils impliquent. Ils constituent des *domaines d’expérience* potentiels pour le travail de classe.

Un domaine d’expérience (D.E.) implique plusieurs types de pratique et de concepts mobilisés sur le mode quotidien et d'autres sur le mode scientifique, spécifiquement sous-jacents à ces diverses pratiques, et diverses représentations (symboliques ou autres) qui y sont en usage. Un D.E. est caractérisé non seulement d'un point de vue épistémologique, mais aussi par la réalité culturelle et cognitive des sujets qui y sont impliqués, à travers ces trois pôles :

Le contexte externe du domaine d’expérience: des contraintes provenant de la “réalité”-même (le soleil a un mouvement régulier, certaines mesures sont impossibles directement), des moyens plus ou moins matériels (les instruments), des représentations symboliques (les schémas par exemple) ; des règles et usages sociaux (l'usage de la monnaie).

Le contexte interne de l'enseignant caractérisé par ses savoirs (dont ses compétences didactiques concernant le domaine), ses pratiques et ses conceptions, avec leur part de subjectivité, et ses appartenances culturelles.

Le contexte interne de l'élève, caractérisé lui aussi par ses savoirs, ses pratiques et ses conceptions, avec leur part de subjectivité, et ses appartenances culturelles.

Ainsi un domaine d'expérience sera traité d'une façon qui dépend de l'enseignant (des aspects qu'il questionne le plus, dont il est le plus conscient, des problèmes qu'ils conçoit comme significatifs du point de vue de ses conceptions des mathématiques et de leur enseignement) et des élèves de la classe (de leur engagement dans le domaine, de leurs ressources culturelles...). Ce qui ne contredit en rien qu'une ingénierie soit élaborée en équipe et réalisée par différents enseignants dans différentes classes.

Ayant choisi un domaine d'expérience, construire un ensemble cohérent de situations didactiques dans ce domaine nécessite plusieurs étapes de travail : Il faut cerner les racines et les échos des conceptualisations scientifiques dans les pratiques dont les élèves sont (ou sont susceptibles d'être) imprégnés dans leur vie quotidienne et à travers les pratiques scolaires dans les différents domaines disciplinaires; Choisir des éléments exploitables au niveau didactique grâce à une analyse épistémologique et cognitive des activités engagées dans les pratiques quotidiennes et dans celles qui sont liées à la conceptualisation scientifique. Ces étapes dépendent des contextes internes potentiels des enseignants et des élèves et de leurs variations possibles.

Un point crucial dont il faut tenir compte est que l'élève ne développe pas nécessairement une conceptualisation quotidienne « suffisante » de façon spontanée pour que la dialectique CQ/CS puisse être engagée. Il faut généralement l'aider, dans le cadre scolaire, à stabiliser certaines pratiques et l'expression les concernant.

L'approche des domaines d'expérience répond à la motivation de l'élève qui cherche à s'insérer, comme mieux adapté, plus compétant, dans la culture qui a valeur de référence pour lui. La « motivation » dépend en partie de l'ancrage des concepts, développés dans le cadre scolaire, aux constructions issues des cultures de l'apprenant, et de la conscience de ce rapport.

Analyse épistémologique et cognitive des concepts

La définition des concepts de Vergnaud (1990) est un outil d'analyse épistémologique et cognitive que nous appliquons aux concepts de l'école, à ceux d'un domaine d'expérience et à l'activité de l'élève, dans sa diversité, pour estimer la conceptualisation qui la sous-tend, et son évolution. Avec la dialectique CQ/CS, ce sont des outils efficaces dans la construction des ingénieries de la didactique des domaines d'expériences.

G. Vergnaud définit les concepts par leurs trois composantes :

Les situations de référence sont « l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ». Soulignons que, dans le cadre scolaire, une situation de référence l'est, pour l'élève concerné, s'il lui est possible d'y faire référence dans le cours d'une activité.

Les invariants opératoires sont « l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (les signifiés) ». Ils « se trouvent à la charnière des rapports entre le réel et la connaissance pratique et théorique que le sujet s'en forme ».

Les représentations externes sont les signifiants: langage verbal, symboles, schémas, gestes... Les outils et certains dispositifs matériels peuvent avoir des fonctions de représentation.

Ces trois composantes offrent des critères pour analyser les contextes externe et internes d'un domaine d'expérience. Elles permettent de cerner la conceptualisation de ce qui fait le « réel » pour un sujet avec une certaine rigueur, et d'en estimer le développement, qu'elle soit sur le mode quotidien ou scientifique, en rapport avec différents types d'activité.

Exemple d'analyse et réflexion sur le « réel »

La conceptualisation du système de numération.

Pour commencer à construire la numération, les enseignants établissent généralement des situations de référence, pour les élèves de première année du primaire, à partir de dispositifs matériels. Citons, par exemple, les réglettes Cuisenaire (barres de longueurs 1 à 10 et de sections 1x1) pour représenter les nombres jusqu'à 99 en combinant/additionnant leurs valeurs/mesures-de-longueur; les jetons d'un jeu de banquier dont les différentes couleurs représentent des niveaux de groupement et les valeurs correspondantes; les billes, les boites de 10 billes, et les valises de 10 boites des ouvrages de Brissiaud; et la monnaie (les euros et centimes d'euros), avec ses différentes pièces dont celles qui représentent des groupements de 10, 100 et ont pour valeurs 10, 100.

Dans ces exemples, les objets matériels sont en même temps des représentations externes de groupements et/ou de valeurs. Au fil du travail, les élèves s'y familiarisent et résolvent des problèmes posés dans ces contextes (échanges-groupements, passages de représentations à d'autres). Les activités sollicitent des invariants opératoires (pour former des décompositions additives, par exemple). Les explications des enseignants et des élèves prennent appuis sur ces objets organisés et sur les procédures mises en place: des situations de référence se forment.

Les contextes externes et les procédures des situations avec les réglettes ou avec les billes de Brissiaud sont spécifiques à l'école. Ceux du jeu du banquier sont proches de ceux des jeux de société (dont seulement certains élèves ont l'expérience). Tandis que ceux de la monnaie sont proches de ceux de pratiques culturelles communes.

C'est seulement dans le cas de la monnaie que les procédures que doivent maîtriser les élèves peuvent être développées, avec l'aide de l'enseignant, comme des évolutions/adaptation de schèmes soit déjà en place, soit se développant en parallèle et en cohérence dans la vie extrascolaire. En terme d'artefact, les pièces de monnaie, les schèmes et procédures associés, ne sont pas seulement instrumentalisées dans le cadre scolaire, mais sont généralement reconnues utiles par les élèves comme susceptibles de résoudre des problèmes qui peuvent les intéresser directement hors de l'école.

Dans la didactique de ce domaine d'expérience, l'activité langagière, les raisonnements et les explications, surtout au début du travail, se développent à partir d'expressions courantes dans la culture environnante des élèves en référence à des arguments non spécifiques aux mathématiques. Par exemple: « je peux payer ce bonbon avec les pièces de 1c, 1c... et 1c ou bien avec une pièce de 10c », utilisant le mot *et* à l'oral et à l'écrit, et faisant référence aux usages acceptés par la boulangère. Les représentations externes spécifiques aux mathématiques (les signes et les schémas comme entourer ce qui fait 10c, ou comme le tableau de numération) sont introduits graduellement pour formaliser des activités et des procédures qui ont déjà lieu sur un mode qui tend à devenir scientifique, pour commencer à résoudre des problèmes plus *théoriques*. Par exemple, après avoir fait de nombreux travaux de type échange-groupement pour résoudre des problèmes de payement, vient une question qui tend à structurer et formaliser, donc d'une certaine façon, théoriser : « pourquoi écrit-on le prix 36c avec un 3 et un 6? ». Ces structurations coexistent avec le langage familier et avec les dessins. Par ailleurs l'importance et la place faite à la production écrite dans la didactique des domaines d'expérience sont un moyen de structurer à la fois les représentations externes et les raisonnements de résolution de problèmes (voir Duval 1998 pour le rôle de l'écrit dans la structuration du récit).

La dialectique CQ/CS est possible car les concepts à construire font échos à des conceptualisation quotidiennes liées à l'expérience. L'expérience de la *valeur* vécue dans les rapports à autrui peut être réinvestie et donner du sens à la valeur de ces pièces de monnaie. Elle peut alors être questionnée et poussée vers une conceptualisation scientifique de la valeur expressément différenciée de la quantité, et liée au nombre et à son écriture (à partir de situations où on découvre que cinq pièces de 1 valent moins que deux pièces de cinq, par exemple). Le concept de valeur n'a donc pas ici un caractère spécifique arbitrairement accolé à ces pièces dans le travail de la classe.

Quand des situations de référence n'appartiennent pas à la culture de l'élève, les procédures de résolution de problèmes doivent suivre des règles qu'on découvre et qu'on apprend comme nouvelles et spécifiques au travail de classe, en même temps que l'essentiel des représentations externes concernées. De fait, des représentations externes importantes (langage verbal, matériel organisé, schéma) doivent être mises en place spécifiquement pour que l'activité puisse avoir lieu, puisque l'élève n'a pas d'autres ressources culturelles. L'activité langagière, les raisonnements et les explications dépendent de ces représentations externes spécifiques et d'arguments spécifiques qui sont généralement les règles d'utilisation du matériel établies en classe. Et pour ce qui concerne le concept de valeur, celui-ci se forme d'emblée au niveau plutôt scientifique de la règle d'échange dix-contre-un.

Une première déduction est que la dialectique CQ/CS est plutôt difficile à mettre en place quand le contexte et les situations d'apprentissage ne sont pas solidement construits sur ce qui constitue le “réel” pour l'élève. Et la didactique des domaines d'expérience cherche précisément à développer un domaine d'expérience à partir de ce “réel” pour en faire le cadre d'une longue série de travaux à travers laquelle la dialectique, avec ses pôles quotidien et scientifique, peut se développer.

La distance entre les situations de classe et le “réel” de l'élève, étude de cas

Outre la perte de motivation possible évoquée plus haut, il peut résulter de cette distance: une formation de sens plus « étroite » (les liens systémiques ne concernent pas d'autres zones de la culture de l'élève). Il en résulte souvent aussi une instrumentalisation limitée du concept visé (par exemple de ses situations de références, de ses représentations, ou des schèmes et procédures qui l'impliquent). Il ne fonctionne alors pas comme artefact mais comme production scolaire à usage précis et limité. Nous rencontrons souvent ces représentations externes entendues comme « réservées » aux usages de la classe de mathématiques. Cette distance peut donc être la source de difficultés à transférer les éléments de conceptualisation à d'autres contextes.

Nous présentons ci-dessous le cas des élèves d'une classe de CM2 (5$^{\text{ième}}$ année de l’école primaire en France) qui devaient écrire avec des décimaux le nombre qui correspond à l'expression « un euro cinq ». Il s'agissait de questionner et transférer les règles de numération décimale pour résoudre un problème d'écriture numérique dans le contexte de la monnaie.

Elements d'analyse à priori

... en ce qui concerne le problème posé. Bien sûr le terme « quotidien » est ambigu dans le cadre scolaire. La règle d'usage verbal extrascolaire ne coïncide pas avec la règle de numération décimale écrite travaillée en classe. Mais c'est la prise en charge consciente de cette ambigüité qui est le problème à résoudre à travers l'explicitation de la règle d'usage et la mobilisation consciente de la règle de numération (donc son instrumentation). C'est une situation problème qui nous paraît bien adaptée car ce travail de prise de conscience de la proximité et de la différence entre deux systèmes de numération et leur comparaison favorise le développement de la conceptualisation scientifique du système de numération décimale . Et, mis en rapport avec un système « quotidien », on favorise aussi le développement de la conceptualisation quotidienne. On espère ainsi réaliser ces progrès de conceptualisation en mettant en place les ingrédients d'une dialectique CQ/CS.

Ce travail scolaire est nécessaire pour des raisons pratiques, nous rallions ainsi un point fort de la didactique des D.E. que nous « importons » dans cette classe.

C'est aussi une éducation à la prise en charge des ambigüités (et aux contradictions) importante pour construire des compétences de résolution de problèmes en mathématiques. En effet celles-ci sont fréquentes, par exemple elles se situent dans le passage d'une représentation orale à une représentation écrite (quatorze -> 14 selon un mécanisme différent de dix-huit -> 18,) ou d'un domaine mathématique à un autre (comme dans le cas des notations écrites Tx en algèbre et T(x) en Analyse).

... en ce qui concerne cette classe. Nous considérons qu'une conceptualisation assez « scientifique » du système numérique se reflète dans la capacité à formuler les liens systémiques en jeu (travaillés depuis le CP), à reconnaître leur existence comme leur rupture, et à transférer ou questionner, de façon consciente, les règles d'écriture et d'expression d'un cadre à un cadre voisin. Ce qu'ils ont dû faire en travaillant sur les unités de mesures. S'il en avait été ainsi, les élèves auraient perçu (et discuté) cette ambiguïté.

Eléments d'analyse à postériori

Tous ont été bloqués. Le problème du contrat didactique n'est pas, dans cette classe de maître formateur, celui de l'inhibition du débat et de la divergence. Le problème à mon avis est que les liens systémiques ne se font pas facilement, les élèves n'ont pas les moyens de mobiliser les règles de la numération pour questionner une situation « nouvelle ». Dans notre exemple, la conceptualisation scientifique de la numération décimale est restreinte à un domaine très étroit, celui de l'écriture des nombres (entiers ou décimaux) avec des liens systémiques limités et un faible jeu de généralisation/exemplification.

Hypothèse sur l'origine de la distance entre situation de classe et « réel » observée dans cette expérimentation.

Le travail en classe qui se base strictement sur la conceptualisation scientifique ne favorise pas suffisamment sa propre évolution. En effet, dans le cas considéré certains liens systémiques et situations de référence manquaient. Il a fallu un travail soutenu pour que les élèves mobilisent un savoir devenu quotidien à leur niveau (il y a 100 centimes dans 1 euro) pour s'en servir, et pour qu'ils le mettent en lien avec une représentation et un système plus "scientifique" (5 centimes c'est 5 centièmes d'un euro) pour arriver à choisir entre les écritures 1,5 et 1,05 et à argumenter leur choix.

Je tente, dans les paragraphes qui suivent, d'expliquer la difficulté à inscrire les constructions d'apprentissage mathématique dans le « réel » des élèves dans nos classes en France.

Le contexte interne de l'enseignant, les choix épistémologiques, et l'exploitation de la "réalité"

Nous avons vu qu'un domaine d'expérience en classe dépend du contexte interne de l'enseignant. Ce point de vue peut révéler des obstacles à une exploitation efficace de la « réalité » telle qu'on l'a définie au début de cet article. En particulier, il peut être difficile de trouver un domaine d'expérience pour lequel l'intersection entre le contexte interne de l'enseignant et celui de l'élève soit intéressant à explorer en vue du développement des concepts mathématiques des élèves à travers une dialectique CQ/CS. La réflexion qui suit est basée sur mon expérience de travail avec les enseignants et les classes, et n'est pas élaborée en un travail théorique (qu'il serait probablement intéressant de mener).

Sur ce que veut dire faire des mathématiques: Dans notre système scolaire français, on a tendance à considérer les mathématiques comme nécessairement décontextualisées. On quitte assez rapidement les situations contextualisées introductives (sauf avec des élèves en grande difficulté). Se référer à des groupements abstraits semble « plus mathématique » que de se référer à la monnaie, quand bien même des activités sur la monnaie engageraient des raisonnements de haut niveau de généralisation. Le plus souvent, la modélisation n'est pas considérée par l'enseignant comme faisant partie de l'activité mathématique et n'est généralement pas objet de travail soutenu en classe, même avec des élèves du collège ou du lycée. Et quand les élèves traitent des problèmes « réels » ils ne modélisent pas, ils appliquent des outils mathématiques à des situations déjà « mathématisées »!

Dans le cadre de la didactique des domaines d'expérience, nous faisons l'hypothèse que dans les cas ù un objet mathématique modéliserait une situation accessible au sujet (à travers son expérience et sa culture), la plupart des élèves s'engageraient plus facilement dans le travail sur celle-ci que sur la situation mathématisée. Leur contexte interne est marqué par leur expérience et leur culture. Cette préférence n'est évidemment pas parlante (ni probablement vraie) pour ceux qui s'orientent vers les études de mathématiques, mais plutôt en primaire, en collège et pour une partie importante des élèves plus âgés.

Or, précisément la conception de ce que sont les mathématiques, décrite ci-dessus, mènera bon nombre d'enseignants à travailler sans aucun contact avec le contexte interne de la majorité des élèves. Les élèves perdent ainsi l'occasion de former certaines situations de référence qui seraient significatives (celles qui sont contextualisées en dehors des mathématiques). Les liens systémiques, les jeux de généralisation-exemplification et les transferts potentiels sont réduits quand les élèves n'ont pas pu s'engager dans le travail de modélisation.

Sur les conditions favorables aux apprentissages: En mathématiques, les situations riches en références culturelles sont généralement complexes (les pièces de monnaie ne correspondent pas strictement aux groupements par 10). Celles qui sont proches de la structure mathématique de référence (comme le jeu du banquier) sont généralement simples, d'un point de vue épistémologique. Mais alors les situations de références, les représentations externes, et les invariant opératoires doivent être entièrement construits ad hoc et sont plus restreints, l'activité sémiotique plus limitée, les raisonnements développés dans des registres plus délimités, avec par exemple des analogies plus restreintes. L'argument *1c et 1c et 1c et 1c et 1c valent comme une pièce de 5c,* ou l'argument *deux pièces de 10c valent comme une pièce de 20c, puisque la boulangère accepterait aussi bien ces pièces que celle-là pour un bonbon* (référence à l'expérience réelle ou accessible), sont basés sur les règles d'échange qui ont cours dans l'environnement de l'élève. Ils entrent dans un raisonnement bien construit, mais pas situé dans le cadre mathématique en usage. Ces arguments sont impossible avec les jetons de couleurs. Avec les jetons seule la règle abstraite (et qui peut être perçue comme arbitraire), 10 contre 1, est acceptable. Le raisonnement sera tout aussi bien construit et peut bien sûr être utiliser dans le cas de la monnaie. Le contexte de la monnaie offre donc aux élèves un spectre d'arguments et de significations plus large.

Ces situations plus simples sont souvent plus éloignées de la culture de l'élève et de ses conceptualisations quotidiennes les plus riches en sens et en référence (donc de son contexte interne). Elles rendent caduque la dialectique CQ/CS. Or beaucoup d'enseignants se montrent sensibles à la simplicité et leur conception des mathématiques aidant, lui donneront la priorité sur l'ancrage au “réel”. La préférence donnée à la simplicité épistémologique, plutôt qu'à l'accessibilité cognitive et à la complexité et adaptabilité des acquis cognitifs peut, pour certains élèves, affecter le développement d'une activité mathématique de qualité suffisante.

Cette réflexion sur le contexte interne de l'enseignant peut se prolonger: on pourrait opposer au choix de construire des apprentissages mathématiques sur la “réalité” la difficulté, qui en résulterait, d'amener les élèves vers une pensée plus théorique. Cette idée provient en partie d'une confusion entre théorisation et décontextualisation. Non seulement nous pensons qu'il n'en est rien, mais que l'exploitation bien conçue de la “réalité” offre une prise plus importante à la construction d'une pensée théorique.

Décontextualisation et théorisation

La « théorisation » caractérise l'activité mathématique, et caractérise aussi la conceptualisation scientifique. Elle peut consister à: passer d'une procédure réalisée à son explicitation sous une forme générale (en contexte ou non); énoncer une règle par induction à partir de calculs particuliers, etc... La théorisation n'exige pas la décontextualisation, ni la symbolisation, mais la généralisation. La décontextualisation n'est qu'une des formes de théorisation, la plus visible (par le registre sémiotique).

Ainsi une résolution de problème située dans un “réel” de domaine d'expérience est une opportunité offerte à l'élève de généraliser une procédure en se référant à des éléments d'un “réel” qu'il maîtrise. Voici un exemple de généralisation dans un contexte non spécifiquement mathématique. Elle est formatrice pour le développement de la pensée mathématique mais plus difficile à produire dans un contexte mathématique pour des élèves de première année du primaire (comme ceux de l’exemple). Dans un débat collectif concernant l’utilité du thermomètre, le maître lit la phrase que lui ont dicté ses élèves :

> le maître lit: nous devons comparer … et nous devons nous assurer qu’aujourd’hui il fait plus chaud qu’hier… et lundi prochain ?
>
> e1 : aujourd’hui… pas seulement aujourd’hui, n’importe quel jour
>
> e2 : c’est …c’est tous les jours… lundi, mardi, …
>
> (...)
>
> le maître : qu’un jour est plus froid ou plus chaud qu’hier
>
> e1 : non, pas hier, *le jour qui vient avant*

Il nous paraît plus facile d'engager la conceptualisation scientifique sur des contextes significatifs (accessible au contexte interne des élèves du fait de la culture), que dans un contexte trop mathématisé ou trop formalisé. Ensuite, quand ce type de pensée théorique a pu se développer, il devient plus aisé de le transférer aux contextes mathématiques. Plus précisément, il importe plus que l'élève puisse développer une capacité de généralisation d'un concept en rapport avec les aspects plus particuliers que le sujet maîtrise, plutôt que de

maîtriser un concept déjà généralisé, alors qu'il n'a pas été actif dans la généralisation même.
La didactique des domaines d'expérience vise spécialement la théorisation. Elle la favorise par des questions de type « comment feriez-vous » tout en empêchant le faire, quitte à disposer devant les élèves le matériel qui aurait permis de faire. La résolution de ce type de problème est en général validée par l'argumentation. Ces argumentations favorisent l'élaboration de liens systémiques explicites et l'évolution de la maîtrise de représentations externes au sein et au delà des situations contextualisées. Mais surtout ces argumentations forment la base de la construction d'une pensée théorique. Cette pratique est alors transférable sur des domaines plus formels.

Conclusion et perspectives

Les travaux théoriques et expérimentaux de l'équipe de Gênes montrent que l'appui sur la « réalité » de l'expérience de l'élève favorise une conceptualisation scientifique des notions mathématiques. La « reconstitution » d'un domaine d'expérience dans le cadre scolaire, le questionnement théorique et l'argumentation d'une part, et un travail dans une certaine globalité et une certaine complexité, de l'autre, sont des facteurs essentiels. Les travaux dont quelques résultats ont été présentés ici doivent se poursuivre dans différentes directions: approfondissement de la recherche sur les mécanismes de passage de l'expérience vers une pensée plus théorique, d'un contexte à un autre, sur les différents rôles des systèmes sémiotiques, le travail sur les positions épistémologiques et cognitives sous jacentes aux choix didactiques, l'extension de ces travaux pour qu'ils répondent à des objectifs didactiques situés dans des cultures autres.

BIBLIOGRAPHIE

Boero, P., Dapueto, C., Ferrari, P., Ferrero, E., Garuti, R., Lemut, E., Parenti, L., Scali, E. (1995). Aspects of the Mathematics-Culture Relationship in Mathematics Teaching-Learning in Compulsory School. *Proc. of PME-XIX*, Recife, vol. 1, pp. 151-166.
Douek, N. (1999b). Argumentation and conceptualisation in context: a case study on sun shadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics.* 39, 89-110.
Douek, N. (2003). *Les rapports entre l'argumentation et la conceptualisation dans les domaines d'expérience*. Thèse, Université R. Descartes, Paris5.
Duval, R.. (1998). Signe et objet, trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, vol.6, ULP, IREM de Strasbourg.
Hatano & Wertsch (2001). Sociocultural approaches to cognitive development: The constitutions of culture in mind. *Human Development, 44*, 77–83.
Rabardel, P. (1999). Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. M. Bailleul (Ed.), *Actes de la Xème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, pp. 203-213,

Houlgate, IUFM de Caen.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-170.
Vygotsky, L. S. (1985,).*Pensée et langage*, Editions Sociales, Paris.

Submitted: june 2009
Accepted: september 2009