METÁFORA E MATEMÁTICA

Kécio Gonçalves Leite[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia
Michael Friedrich Otte[2]
Universidade Federal de Mato Grosso

RESUMO

Este artigo discute a possibilidade teórica da metáfora na Matemática e na Educação Matemática, partindo da premissa de que muitas equações A=B são metáforas, isto é, são construções teóricas somente possíveis de serem concebidas a partir de uma perspectiva particular e inusitada de estabelecimento de semelhança entre desiguais, de modo que a criatividade matemática consiste em representar um objeto A como um outro objeto B para, desta maneira, resolver um problema. Discutir a representação e comunicação com foco na metáfora pode contribuir para uma compreensão diferente de como se desenvolvem as idéias matemáticas, as particularidades de sua gênese, e particularmente o modo como se dá a intercomunicação de tais idéias em contextos educativos.

Palavras-chave: Metáfora. Matemática. Epistemologia.

[1] kecio.goncalves@ifro.edu.br
[2] michaelontra@aol.com

1. INTRODUÇÃO

É comum se observar entre matemáticos e educadores matemáticos o pressuposto de que a matemática é objetiva, precisa e representa um conhecimento literal, descontextualizado e universal. Esta visão sobre a natureza da matemática se fortaleceu com filósofos e cientistas a partir do advento da Idade Moderna, dentro de um movimento que procurou impor à ciência os predicativos de precisão, clareza e objetividade. Deste ponto de vista, a linguagem figurada tornou-se um obstáculo ao conhecimento, e a metáfora, por ser vista dentro deste mesmo movimento como um desvio de sentido ou como erro de linguagem por gerar uma relação de semelhança entre distintos, foi considerada inútil, aberrante e imprópria à ciência e à matemática. Deste modo, pensadores notáveis como Hobbes e Locke rotularam a metáfora como recurso legítimo apenas para os poetas, que dela fazem uso para adornar os seus versos. De uma perspectiva não muito diferente, o filósofo e matemático alemão Friedrich Gottlob Frege costumava dizer, já no início do século XX: “Matemática não é poesia”.

Esta forma como Frege concebeu a natureza da matemática é paradigmática de um pensamento que tomou corpo a partir do século XVII e ilustra o fato de que, ao longo dos séculos, uma visão do que sejam teorias e objetos matemáticos se desenvolveu e se fortaleceu na direção de uma concepção absolutista em relação à objetividade, literalidade e exatidão. Frege acreditou inicialmente na existência de números, funções, conceitos teóricos e leis da natureza como se fossem objetos comuns no universo. Mais tarde, o filósofo e matemático alemão considerou que qualquer conceito tem uma extensão, ou seja, um conjunto de objetos comuns a que se refere literalmente e ao qual poderia ser reduzido. Nesse sentido, a matemática seria especialmente uma ciência extensional. Não importaria como se define um conceito matemático, um número ou uma cônica, por exemplo. Importante seria a referência objetiva. Por isso Frege interpretou A = B como a relação de duas representações com a mesma extensão, com os mesmos objetos. Este reducionismo produziu paradoxos lógicos, pois nem sempre existe um objeto a que uma definição arbitrária possa se referir.

Na verdade, a matemática opera realmente com conceitos, ou seja, com definições. Sendo assim, seu interesse se dá por verdades “objetivas”. Por isso, muitos teoremas matemáticos têm a forma de equações do tipo A=B, uma vez que a criatividade matemática consiste em estabelecer relações de semelhança entre distintos. Por este motivo, tanto na matemática, quanto na Educação Matemática, muitas equações A=B são metáforas, isto é, são construções teóricas somente possíveis de serem concebidas a partir de uma perspectiva particular e inusitada de estabelecimento de semelhança entre desiguais. Na matemática, por exemplo, concebe-se uma “causa” como uma “função”, uma “força” como um “vetor”, uma “grandeza” como uma “relação entre grandezas”. São perspectivas como esta última que possibilitam conceber como número tanto o “1”, quanto o “$\frac{1}{3}$”, pois, embora de tipos distintos, tornam-se semelhantes por poderem ser, de uma perspectiva funcional, operados sob as mesmas regras aritméticas, que os definem como objetos com os quais se podem calcular. Na Educação Matemática, por sua vez, muitas vezes tem-se que representar uma coisa com uma outra coisa de natureza totalmente diferente para se comunicar uma idéia ou para se gerar um entendimento sobre determinado assunto abordado. Deste modo, por exemplo, uma expressão algébrica como o Teorema de Pitágoras é explicada como relação entre áreas de quadrados construídos sobre os lados de um triângulo, ou a idéia do módulo de um número real é identificada com a distância entre dois pontos sobre uma linha reta.

Estando permeadas de construções do tipo A=B, tanto a matemática quanto a Educação Matemática possuem e se utilizam de construções teóricas, cujas perspectivas extrapolam todo significado literal. Uma equação do tipo A=B contém, para além da igualdade, algo que difere, e os dois sinais distintos utilizados, A e B, indicam isto, o que é diferente da equação A=A, cuja literalidade é evidente, mas que nada informa além da obviedade tautológica. Se todos os significados fossem literalmente verdadeiros, todos os conhecimentos seriam restritos a certos contextos e situações. No entanto, a criatividade matemática consiste em representar um objeto A como um outro objeto B para, desta maneira, resolver um problema. Sendo assim, o fazer e o pensar matemáticos não se dão na descoberta de objetos platônicos universais, enquanto formas fixas, resultado de uma mera contemplação do mundo das idéias. Para existirem, os objetos matemáticos (para uns) ou idéias matemáticas (para outros) necessitam de representações que perpassam por tomadas de perspectivas particulares.

Idéias ou conceitos poderiam ser de fato universais no sentido de Platão. Mas como tal nunca seriam totalmente acessíveis. A acessibilidade a idéias e conceitos pressupõe uma representação em termos mais ou menos concretos. Estas representações são metáforas, pois um particular nunca poderia substituir um universal em todos os seus aspectos.

O problema dos conceitos universais é que não sabemos os limites de suas aplicações. Números, por exemplo, foram primeiramente nomes de grandezas empíricas. Por esse motivo, Descartes, por exemplo, chamava os números negativos de números fictícios, pois não existiriam grandezas menores do que o nada. E desde Cardano, chamam-se certos números de imaginários. No entanto, tanto os "números fictícios", quanto os "números imaginários" se justificaram enquanto tais a partir das aplicações que conquistaram na matemática. Em Educação Matemática, a aplicação possui importância central. Assim, embora os conceitos da matemática sejam tratados de um lado como universais, de outro lado pressupõe-se que só podem ser ensinados através de aplicações ou modelos concretos, presumindo-se uma relação exata entre idéias e aplicações.

2. MATEMÁTICA, EDUCAÇÃO E METÁFORA: A QUESTÃO DA REPRESENTAÇÃO E DA COMUNICAÇÃO

Estas concepções acerca da natureza da matemática influenciam o seu ensino, de modo que a matemática, enquanto disciplina escolar, é tradicionalmente tomada como sendo um conjunto de representações exatas de idéias e conceitos universais. Sendo assim, uma epistemologia que tem dominado as reflexões voltadas para a matemática e seu ensino na atualidade tem partido destes pressupostos, estando impregnada de tais pré-noções acerca da natureza dos seus objetos. É comum se afirmar que a matemática é a linguagem da natureza, sendo seus objetos um reflexo direto dos fenômenos do mundo objetivo. A idéia de que se pode "modelar" os fenômenos naturais através de equações e leis matemáticas contribui para essa impressão de que a matemática realmente serve para descrever absoluta e literalmente o universo, e que ela é também parte deste universo, no sentido de estar nele. Nesse sentido, como diria Galileu Galilei, o livro da natureza estaria escrito em caracteres matemáticos.

Porém, qual é a realidade das idéias matemáticas e como elas são representadas e comunicadas? Será que os objetos matemáticos surgem no mundo independentemente de uma representação e de uma linguagem? A matemática realmente possui objetos? Na tentativa de darmos respostas a estas perguntas, somos levados a questionar o caráter de objetividade e literalidade que tem sido atribuído à matemática, e em especial no espaço da instituição escolar, onde este saber é perpetuado. A busca por respostas a questões desse tipo nos coloca diante da possibilidade de discussão de uma nova epistemologia, assentada numa caracterização da matemática que seja originalmente e essencialmente diferente.

Teorias recentes, situadas na interface entre as áreas das ciências cognitivas, da linguagem e da filosofia da ciência, têm sugerido que muito daquilo que se acreditava ser objetivo e externo, pertencente ao mundo "lá fora", não passa de construções mentais projetadas por esquemas semióticos que se baseiam nos planos biológico e cultural. Desta nova perspectiva, tem-se especulado sobre uma possível estrutura metafórica das idéias matemáticas, concebendo assim a origem, o desenvolvimento e a comunicação de tais idéias de uma forma menos literal e mais contingente, com destaque para a importância da linguagem figurada nesse processo.

Na verdade, desde o início do século XIX tem havido uma tendência para se substituir o olhar tradicional a respeito do conhecimento matemático e científico, e pode ser que este tenha sido o século do início da virada paradigmática das concepções sobre as relações entre linguagem e conhecimento. A partir de então, a ciência e a matemática se libertaram dos limites que as grandes obras, de Newton a Euler, haviam lhes imposto, entrando em novos campos, como eletricidade e termodinâmica, e alçando novos níveis de abstração. Com esta tendência cada vez maior de abstração das ciências, as metáforas se tornaram indispensáveis à generalização teórica e por isso ganharam interesse por parte da filosofia da ciência. Este interesse se intensificou sobremaneira nos últimos 50 anos do século XX, quando novas teorias de metáfora surgiram. A esse respeito, diz Booth (1992, p. 53):

"estendi os cálculos com minha calculadora de bolso até o ano 2039, quando haverá mais estudiosos da metáfora do que indivíduos".

No entanto, embora tenha havido essa explosão de interesse pelo tema na contemporaneidade, isso não implicou imediata mudança paradigmática na concepção de muitos daqueles que lidam com a Educação Matemática. Como afirma Otte (2008a), alguns educadores matemáticos não gostam de metáforas por causa de um alegado reducionismo ou ainda porque, devido a sua contingência, parecem carecer de fundamentos lógicos – o que, alegam, estaria em desacordo com a natureza da matemática. Tal concepção remonta ao início da Idade Moderna.

A concepção característica do paradigma da modernidade toma a matemática como objetiva, precisa e representante de um conhecimento literal, descontextualizado e universal. Esta foi a concepção de Descartes-Hobbes-Leibniz. Deste modo, o modelo explicativo moderno que concebe a matemática como ramo objetivo do conhecimento, com existência independente e livre das mentes humanas, não contribui para explicar o modo como tal conhecimento é produzido, representado e comunicado, assim como não contribui para a superação das dificuldades relacionadas ao ensino-aprendizagem dos objetos matemáticos.

Dentro de um paradigma moderno, as chamadas *verdades matemáticas* refletem no tratamento dado à disciplina escolar *matemática* a necessidade e legitimidade de uma super-linguagem, enfatizando-se sempre a busca da literalidade, da exatidão, da objetividade absoluta, isto é, uma desvinculação total entre objeto e sujeito, tomando-se os objetos matemáticos como elementos pré-existentes, independentes de construções e passíveis tão somente de descobertas. No contexto escolar, a "objetividade" postulada para a matemática pressupõe a existência de "objetos", de modo que a literalidade imposta no ensino pressupõe a explicação de idéias e conceitos em termos de objetos e suas características. Desta perspectiva, por exemplo, "1", "2" e "3" poderiam ser entendidos literalmente como sendo "1 pedra", "2 pedras", "3 pedras". Do mesmo modo, "8-2" e "$\frac{8}{2}$" também poderiam ser entendidos literalmente. No entanto, "2-8" e "$\frac{8}{3}$" não são passíveis de se entender literalmente, uma vez que são relações que não podem ser expressas em termos de "pedras", por exemplo. Para se estabelecer relações, é necessário adotar uma perspectiva, de modo a não ser possível uma total separação entre sujeito e objeto de conhecimento. Dito de outro modo, "relações" (abstratas) não existem na natureza como "pedras" existem. Por outro lado, tais abstrações são possíveis de serem concebidas porque podem ser representadas. A representação de objetos abstratos não só condiciona sua existência, como também possibilita sua manipulação.

Uma nova maneira de se conceber a natureza dos objetos matemáticos é necessária, no intuito de possibilitar um novo olhar para a representação e comunicação de seus objetos, com as conseqüentes implicações para o seu ensino. Mas esse novo olhar não pode se originar dentro desta mesma matemática, ou da maneira dominante contemporânea de concebê-la, cuja essência se baseia num paradigma da modernidade. Nesse sentido, a busca por novas explicações de qual seja a natureza dos objetos matemáticos, como eles surgem e como podem ser representados e comunicados é um problema que extrapola os domínios da própria matemática, não sendo passível de se transformar em objeto de teorias propriamente matemáticas. Um problema desta natureza está mais intimamente relacionado a questões de ordem epistemológica, e como tal são legitimamente problemas que se convertem em objetos de reflexões filosóficas, originalmente discutidos a partir de uma perspectiva teórica.

É possível que os elementos iniciais para o condicionamento ou possibilidade de uma nova maneira de se conceber a natureza dos objetos matemáticos, ou mesmo da ciência em geral, tenha surgido no século XVIII, dado o novo contexto sócio-cultural criado, e as conseqüentes transformações de pensamento ocorridas. Nota-se, neste século, uma tendência em se negar certos pressupostos cartesianos na relação entre linguagem e conhecimento (ver CONDILLAC, 1979; ROUSSEAU, 1978), e inicia-se uma abertura para o reconhecimento do papel da linguagem figurada, especialmente a metáfora, tanto para a representação quanto para a comunicação de idéias. A partir de então, a matemática começou também a ser vista em termos de relações, como fizeram Gauss, Grassmann e Cauchy, por exemplo, e não simplesmente em termos de objetos e suas aplicações. Ao se considerar que as relações "existem" no sentido metafórico, isto é, existem pois podem ser representadas, pode-se tentar calcular com expressões "imaginárias" do tipo "$\frac{7}{2}+\frac{2}{3}$",

"$(2-8)-3$". Ou seja, a metáfora seria útil ao possibilitar a generalização das operações.

É compreensível que esse tipo de questão e de reflexão, relacionadas à representação e comunicação de idéias matemáticas, não tenha sido comum nas discussões filosóficas e científicas que se desenvolveram até o século XVIII, pois não havia significativa preocupação em se ensinar matemática para grandes públicos e, mesmo nas pesquisas matemáticas, houve nesse período um certo pessimismo quanto ao desenvolvimento desse ramo do conhecimento humano. Chegou-se inclusive a ser prevista a estagnação da matemática nesse século, considerando-se que os problemas matemáticos significativos já haviam sido resolvidos, não havendo muito mais o que se pesquisar. O pessimismo de *fin de siècle* que Lagrange exprimiu no fim do século XVIII é um exemplo disso.

No entanto, a partir do século XIX houve uma revolução nesse campo do conhecimento, com um salto em seu desenvolvimento. Tal avanço se deu a partir de uma nova maneira de se conceber a matemática, e de uma preocupação com a formação de sua estrutura básica. Buscou-se impor ainda mais rigor aos diferentes ramos da matemática, tais como aritmética, álgebra e análise, esta última consideravelmente desenvolvida a partir de uma expansão da teoria das funções, acompanhada de uma rigorosa aritmetização do campo. Nesta busca pelo rigor, a preocupação com a linguagem se intensificou, sendo acentuada inclusive em trabalhos que procuraram aproximar a matemática da lógica. Aqui, Frege é um exemplo, com seu programa logicista, cuja proposta, apresentada em seu *Grundgesetze der Arithmetik*[3], de 1893, era derivar os conceitos de aritmética dos conceitos da lógica formal. Conforme Eves (2004), o projeto logicista estava relacionado com a busca do rigor na análise matemática a partir da introdução do conceito de limite por Cauchy e da insistência de Weierstrass em fundamentar a análise na teoria dos números reais. Segundo Font (2001), em seu programa logicista, Frege buscou dotar a aritmética de fundamentos seguros, acreditando que estes deveriam ser de natureza lógica. Assim, considerando que os números reais passaram a ser definidos em termos de sucessões convergentes de números

[3] *Leis básicas da aritmética*.

racionais e, considerando que os números racionais puderam ser definidos em termos de números naturais, Frege buscou completar o processo redutivo, procurando definir os números naturais em termos puramente lógicos.

A partir de duas principais vertentes, a busca pela formalização pode, de certa forma, ser considerada como a grande preocupação dos matemáticos a partir do século XIX. No entanto, entendemos que isto não conduziu a uma superação da concepção já constituída sobre a natureza da matemática, contribuindo, isto sim, ainda mais para o fortalecimento de uma concepção de matemática como conhecimento absoluto e universal, para o qual a linguagem figurada não teria utilidade e deveria ser evitada. É certo, todavia, que a preocupação com a linguagem tornou-se uma constante entre os matemáticos, dada a necessidade de comunicação dos resultados de pesquisas e dada a expansão do ensino.

3. FORMALISMO, COMUNICAÇÃO E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

De modo geral, o desenvolvimento da matemática do século XIX foi marcado e influenciado pela necessidade de expansão do ensino e pela produção de textos em maior escala para um público leitor mais amplo, e, como salienta Otte (2008a), as instituições matemáticas também passaram a ser influenciadas pela filologia. Houve entre os matemáticos a partir de então dois principais movimentos. De um lado, deu-se primeiramente o movimento do “rigor aritmético”, tendo como principais representantes Lagrange (1736-1813), Gauss (1777-1855), Bolzano (1781-1848) e Cauchy (1789-1857). De outro lado, e imediatamente após o primeiro, surgiu o movimento da “axiomática moderna”, cujos principais representantes foram Grassmann (1809-1877), Peano (1858-1932) e Hilbert (1862-1943). A principal diferença entre estes dois movimentos reside na maneira como cada um buscou resolver os, assim então considerados, problemas fundamentais da matemática.

O movimento da busca de rigor através da aritmetização abordou tais problemas de uma perspectiva reducionista, procurando definir os conceitos matemáticos em termos de entidades básicas, tais como os números naturais. O movimento axiomático, por sua vez, procurou resolver os problemas fundamentais da matemática através da extensão e da generalização de suas estruturas relacionais e de suas regras de inferência. Desse ponto de vista, a matemática passou a ser concebida não mais como uma ciência com conteúdo e objetos, mas sim como a ciência das estruturas formais e suas relações axiomaticamente definidas. A álgebra moderna como teoria de estruturas apenas formalmente definidas é um resultado desse segundo movimento, e um exemplo ilustrativo neste caso é a queda da comutatividade do produto geral produzida por Grassmann e sua definição do produto vetorial anti-comutativo.

Segundo Otte (2008b), estes dois movimentos refletiram opiniões diferentes sobre teorias matemáticas e suas aplicações. Para esse autor, o movimento da aritmetização considerou que a teoria matemática deveria ter uma aplicação direta, ao passo que a abordagem axiomática salientou que teorias seriam realidades *sui generis* que deveriam ser compreendidas em seus próprios termos antes de se pensar em sentidos ou de se planejar aplicações.

A abordagem reducionista do movimento do rigor aritmético sempre foi dominante em contextos educacionais, uma vez que a concepção de matemática existente nestes meios sempre foi a de uma ciência dotada de objetos, tendo o número como o principal deles. Afinal, em situações formais de ensino sempre foi mais comum se perguntar “o que é isso?”, “o que é número?”, “o que é equação?”, no entanto visando sempre a utilidade de tais “objetos”, ou seja, as formas de se usá-los, ao invés de simplesmente reproduzir e se entender regras de inferências gerais, como estruturas axiomaticamente definidas. No entanto, como aponta Eves (2004), a partir da segunda metade do século XX, percebem-se tentativas de se escrever textos didáticos de matemática voltados para o ensino médio, em especial sobre tópicos de geometria, tendo por fundamento o método axiomático, sendo que em geral se adota o conjunto de postulados de Hilbert.

Um bom exemplo sobre a diferença entre o movimento do rigor aritmético e o da axiomatização é a atitude de cada um diante da metáfora do plano complexo gaussiano. Para os membros do grupo do rigor aritmético, a representação geométrica dos números complexos não foi vista como algo importante, pois estes números foram concebidos simplesmente como sendo pares de números reais (uma noção determinada pelo reducionismo de uma resposta à pergunta “o que é isto?”). Por sua vez, para os integrantes do movimento axiomático, tais como Grassmann, a representação geométrica dos complexos significou o reconhecimento do fato de que conceitos matemáticos devem ser desenvolvidos por uma interação recursiva de raciocínio operatório e intuitivo, reconhecendo-os como estruturas formalmente definidas. Segundo Otte (2008a), este reconhecimento levou a novas teorias estruturais, como a álgebra linear ou a teoria de grupo, por exemplo.

O movimento axiomático também se caracterizou pela busca excessiva de um simbolismo formal na matemática, sendo o italiano Giuseppe Peano (1858-1932) um dos principais representantes deste movimento no período. Em seu *Arithmetices principia nova methodo exposita*, de 1889, são apresentados os seus, hoje famosos e muito utilizados em construções da álgebra e análise, *axiomas de Peano*. Tais axiomas contribuíram significativamente para o desenvolvimento de uma linguagem formalizada e sua introdução na aritmética comum, o que foi reforçado em seu *Formulaire de mathématiques*, de 1894, cujo propósito foi expandir tal formalismo para todos os ramos importantes da matemática, através do método postulacional. Conforme Boyer (2006), em seus postulados, Peano buscou substituir palavras comuns por símbolos, com o intuito de atingir o máximo de precisão e de se evitar ambigüidades de sentidos ou hipóteses não totalmente claras.

Segundo Font (2001), para o formalismo extremo iniciado por Hilbert, o que deveria fundamentar a matemática seriam regras mediante as quais se poderiam deduzir fórmulas a partir de outras fórmulas, sendo que tais fórmulas não se referiam a nada, compondo-se basicamente de símbolos sem significados ou valor de verdade. Nesse sentido, o objetivo do movimento da axiomática foi o de uma completa formalização de um sistema dedutivo, o que implica a eliminação dos significados das expressões existentes no sistema, devendo tais expressões serem consideradas apenas como signos vazios a serem manipulados por um conjunto de regras formuladas com precisão. Deste modo,

> *La finalidad de este procedimiento estriba en construir un sistema de signos (llamado un “cálculo”) que no oculte nada y que solamente contenga lo que expresamente se haya puesto en él. Los postulados y los teoremas de un sistema completamente formalizado son “hileras” (o sucesiones de longitud finita) de signos carentes de significado construidas conforme a las reglas establecidas para combinar los signos elementales del sistema formar más amplios conjuntos. Además, cuando un sistema ha sido completamente formalizado, la derivación de teoremas a partir de los postulados se limita, simplemente, a la transformación (siguiendo la regla) de un*

> *conjunto de estas "hileras" en otro conjunto de "hileras" (FONT, 2001, p. 72).*

Ainda conforme Font (2001), o formalismo hilbertiano se converteu em um ponto de vista predominante nas instituições universitárias durante o século XX, e a influência do Positivismo Lógico foi determinante para o seu auge na filosofia da matemática nesse século. Isso porque o positivismo lógico intentava por uma ciência unificada, baseada em um cálculo lógico formal e com um único método dedutivo. Deste ponto de vista, a formalização deveria ser imposta a todas as ciências, sendo que formalizar significava construir um vocabulário de termos básicos, enunciar leis fundamentais a partir de tais termos e compor, a partir de tais leis fundamentais, uma teoria rigorosa por meio da lógica.

É importante notar que a busca pelo rigor em todos os ramos da matemática, assim como a preocupação com o formalismo simbólico a ser utilizado, se dá a partir da intensificação da intercomunicação de matemáticos de diversos países, e de uma maior articulação da comunidade global de matemáticos a partir da segunda metade do século XIX voltados para a pesquisa. Esta explosão da pesquisa matemática é indicada por Eves (2004) tendo em vista a variação do número de periódicos de publicação de artigos matemáticos: antes de 1700 havia apenas 17 periódicos, passando para 210 no século XVIII, e para 950 no século XIX. Essa intensificação da troca de idéias matemáticas foi ainda mais estimulada pela realização de eventos propriamente matemáticos de nível internacional e pelo surgimento de sociedades matemáticas em diferentes países e regiões. Conforme relata Boyer (2006), são exemplos a *London Mathematical Society*, criada em 1865, a *Société Mathématique de France*, fundada em 1872, a *Edinburgh Mathematical Society* na Escócia, o *Circolo Matematico di Palermo* na Itália e a *New York Mathematical Society*, transformada em *American Mathematical Society*, todas criadas na década de 1880-90, e a *Deustche Mathematiker-Vereinigung*, fundada em 1890. Em conseqüência desta organização institucional de matemáticos, realizou-se em 1893 um Congresso Internacional de Matemáticos em Chicago, e outro congresso oficial de matemáticos em Zurique, no ano de 1897, seguido de muitos outros, somente interrompidos nos períodos das grandes guerras do século XX.

Acrescente-se a essa maior institucionalização da matemática, e a esse aumento de comunicação de idéias matemáticas, uma maior demanda por educação escolar, gerada pelo novo contexto sócio-econômico originado no período como reflexo da Revolução Industrial iniciada no século anterior (o que estimulou o surgimento dos primeiros livros didáticos em grande escala), e definitivamente intensificaram-se as preocupações com a maneira de se comunicar e de se ensinar objetos matemáticos (na perspectiva do rigor aritmético) ou estruturas formalmente definidas e suas relações (na perspectiva do movimento axiomático). É possível que Frege, por exemplo, tenha se interessado pelos fundamentos da matemática a partir de reflexões sobre a didática desta disciplina no ambiente escolar de sua época. Como pode ser verificado no prefácio de Frege (1992, p. 9), o primeiro texto publicado pelo matemático alemão, em 1874, foi uma crítica a um manual escolar de aritmética. Suas críticas são no sentido de que o manual não demonstra as leis básicas da aritmética e dá definições muito rudimentares dos seus conceitos fundamentais.

Um grande e importante diferencial dos matemáticos a partir do século XIX em relação aos seus antecessores é que, em sua maioria, envolveram-se diretamente com o ensino de matemática, quer seja em *Écoles Polytechniques*, quer seja em universidades. Isso propiciou um contato dos pesquisadores matemáticos com a dimensão didático-pedagógica da disciplina, o que resultou nas preocupações com o ensino da matemática intensificadas na segunda metade do século XIX, culminando com a criação da *International Commission on Mathematical Instruction*, durante o Congresso Internacional de Matemáticos, ocorrido em Roma no ano de 1908, sob liderança de Felix Klein (1849-1925). Neste mesmo ano, Klein publicou o livro intitulado *Matemática elementar de um ponto de vista avançado*, no qual defendeu a idéia de que nas escolas o ensino de matemática deveria se ater mais às bases psicológicas do que às sistemáticas, salientando deste modo a necessidade de o professor levar em consideração os processos psíquicos do aluno, e também a necessidade de se ensinar matemática de uma forma intuitivamente compreensível.

Pode-se dizer que se consolidou, no ano de 1908, o que se denomina hoje de campo de natureza interdisciplinar *Educação Matemática*, embora, conforme salientam Miguel *et al* (2004), já tivesse havido precursores de uma discussão de cunho didático-pedagógico sobre o ensino da matemática por nomes tais como John Dewey (1859-1952), que propôs em seu livro *Psicologia do número*, de 1895, uma reação contra o formalismo e uma relação não tensa, mas cooperativa, entre aluno e professor, além de uma integração entre todas as disciplinas; e o matemático americano Eliakim H. Moore (1862-1932), que em um artigo de 1902 escreveu sobre um sistema de instrução com a integração entre matemática e física, cujo principal objetivo seria desenvolver na escola o máximo possível do verdadeiro espírito de pesquisa, conduzindo à apreciação dos métodos fundamentais da ciência.

Concomitantemente com a convergência da preocupação com o ensino de matemática e o reconhecimento da importância da linguagem na comunicação de idéias matemáticas, percebe-se que a matemática do século XIX sofreu um considerável avanço, com a criação de novos objetos e teorias matemáticas, e ficou aberto o caminho para as idéias que surgem no século XX. Porém, aparece um vácuo no campo da epistemologia que possa romper com as idéias do período moderno, uma vez que a busca pelo rigor e pelo formalismo não pôs em questão a concepção de natureza da matemática originada no século XVII, de modo que somente na segunda metade do século XX é que surgem teorias que tentam dar conta de uma nova base epistemológica para a ciência em geral e para a matemática em particular.

Se por um lado houve uma preocupação com o aspecto da linguagem na comunicação de idéias matemáticas, por outro lado tornou-se dominante uma epistemologia positivista em seu tratamento, perspectiva esta adotada, divulgada e aprofundada ainda mais pelos positivistas lógicos do Círculo de Viena, de modo que a matemática continuou a ter, como paradigma dominante na comunidade científica, o *status* de universal, objetiva, precisa, lógica, neutra, exata e até mesmo natural, sendo considerada inclusive como a linguagem pela qual está escrita a natureza.

Tal epistemologia positivista atravessou os dois últimos séculos quase que inquestionada, mas, assim como toda a ciência moderna, foi posta em discussão a partir da segunda metade do século XX, quando novos resultados em outras áreas, como na física e mesmo nas ciências da cognição, evidenciaram novas possibilidades de se conceber a ciência e, pode-se acrescentar, a própria matemática.

No campo da Educação Matemática, aparentemente o que se tem feito é discutir novos caminhos metodológicos, levando em consideração fatores sociais, econômicos e culturais, mas sem que a natureza dos objetos matemáticos e a maneira de representá-los e comunicá-los seja questionada substancialmente. Nesse contexto, surgiram na segunda metade do século XX propostas inovadoras para o processo educacional, sendo que em Educação Matemática passou-se a se discutir o desenvolvimento curricular, tomando como principal suporte as teorias de aprendizagem construídas por psicólogos tais como Jean Piaget (1896 – 1980), Burrhus Skinner (1904 – 1990) e Jerome Bruner (1915 – Atual). Em particular, destacou-se um movimento que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna, cuja principal característica foi a ênfase dada ao ensino de matemática direcionado mais para a abstração do que para aplicações práticas. Um marco na história do Movimento da Matemática Moderna é a frase expressa pelo matemático francês Jean Dieudonné (1906 – 1992) durante uma conferência sobre Educação Matemática na cidade francesa de Royaumont, no ano de 1959, quando ele bradou *À bas Euclide!*[4], tendo com isso a intenção de enfatizar a necessidade de modernizar e reorganizar o ensino de matemática nas instituições escolares[5].

Algumas reformas posteriores ao Movimento da Matemática Moderna surgiram, em geral se contrapondo a conceitos e à estrutura didática propostos pelo movimento. No entanto, essas novas propostas se pautam em discussões de ordem metodológica, ou ainda de caráter curricular, não conseguindo desta maneira realizar a necessária ruptura com os pressupostos epistemológicos que sustentam uma concepção de matemática que se arrasta desde o advento da Idade Moderna. Nesse sentido, a construção de uma nova visão também sobre a natureza da matemática e de seus objetos, com a respectiva análise das implicações que tal

[4] Abaixo Euclides!

[5] Segundo Miguel et al (2004, p. 73), essa expressão de Dieudonné "foi interpretada por muitos como uma sugestão de abolir a geometria dos programas escolares. Mas a intenção de Dieudonné era outra. O significado da afirmação é que os métodos de tratar a geometria baseados nos *Elementos* de Euclides não respondem à evolução da matemática nos 2.300 anos que decorreram desde sua obra".

iniciativa pode promover na discussão de uma nova epistemologia da matemática (pós-moderna?) se configura como um promissor objeto de pesquisa. Uma abordagem da matemática na perspectiva da metáfora se desponta neste contexto como uma possibilidade de formulação de uma nova maneira de se conceber a natureza da matemática, e conseqüentemente o seu ensino.

4. METÁFORA E MATEMÁTICA: POSSIBILIDADES EPISTEMOLÓGICAS

Ao se tentar analisar os fundamentos da matemática da perspectiva da metáfora, a objetividade da matemática, isto é, explicações em termos de objetos e suas características, é posta em questão, de modo que os pressupostos filosóficos de tal discussão não podem deixar de passar pelo questionamento da objetividade da própria ciência, que tradicionalmente teve na matemática um dos modelos epistemológicos precisos e verdadeiros na construção do conhecimento.

Na verdade, uma discussão dessa natureza se situa em um conjunto de problemas atuais que buscam dar conta de uma nova epistemologia para a matemática. Mais especificamente, uma epistemologia que seja capaz de melhor atender às necessidades da Educação Matemática em situações formais de ensino-aprendizagem. Deste modo, uma tal tentativa de construção teórica se situa numa virada paradigmática, contribuindo para colocar em xeque o paradigma dominante e para possibilitar o surgimento de uma nova epistemologia. Nesse sentido, como afirma Santos (2008), já não é mais possível aceitar a ciência como objetiva e seguramente fundada. A pós-modernidade, ou o que quer que seja que supere a modernidade, surge como um momento de crise dos fundamentos da ciência moderna, desestruturando o que até então era inquestionável e seguro. Nesse contexto, conceber a matemática como baseada em linguagem metafórica, e teorizar sobre as conseqüentes implicações para a Educação Matemática está de acordo com o movimento de busca por um novo paradigma para este ramo do conhecimento.

Recentes teorias de metáfora (BLACK, 1962; DAVIDSON, 1978; SEARLE, 2002, OTTE, 2008a) sugerem que a bagagem de impressões, experiências e conhecimentos locais adquiridos ou construídos por um indivíduo serve de base para a exploração de novos contextos, contextos mais amplos e, inclusive, inéditos do conhecimento, possibilitando o movimento do local para o geral. Isto está de acordo com um dos aspectos do conhecimento pós-moderno evidenciados por Santos (2008), segundo o qual o conhecimento pós-moderno é local, mas também total, “porque reconstitui os projetos cognitivos locais, salientando-lhes a sua exemplaridade, e por essa via transforma-os em pensamento total ilustrado” (SANTOS, 2008, p. 77).

Vale ressaltar ainda que Santos (2008) destaca o caráter analógico da ciência do paradigma emergente, afirmando que tal ciência é “assumidamente tradutora, ou seja, incentiva as teorias e os conceitos desenvolvidos localmente a emigrarem para outros lugares cognitivos, de modo a poderem ser utilizados fora do seu contexto de origem” (SANTOS, 2008, p. 77). Essa é, justamente, uma das características atribuídas às metáforas como mecanismos subjacentes à produção de conhecimentos: a de permitirem inferências sobre novos contextos com base no já conhecido, ou, classicamente, tomar um *A* por um *B* (*A* é *B*; ou analogicamente *A* é como *B*), com *A* literalmente diferente de *B*, ou ainda com *A* proveniente de um contexto diferente do contexto de *B*. Nesse sentido, uma possibilidade para se considerar $A=B$ é tomar a igualdade em um sentido metafórico. Assim, metáfora também é considerada como uma equação, entendida no sentido de Frege, ou seja, a base da distinção entre sentido e significado, ou ainda, de um ponto de vista semiótico, é a base da distinção entre intenção e extensão de um signo.

Aparentemente, toda equação matemática é uma metáfora, pois a igualdade se estabelece entre dois membros literalmente diferentes, no entanto tornados iguais de acordo com uma propriedade que, especula-se aqui, seja de uma perspectiva metafórica. Dessa perspectiva, os teoremas e definições tão comuns na matemática, ao serem assumidos com estrutura de equações, tornam-se metáforas, uma vez que na expressão “sujeito” ***é*** “predicado” tem-se necessariamente uma literalidade “sujeito” ***não é*** “predicado”, uma vez que “sujeito” ***é*** “sujeito” nada diz sobre o objeto (sujeito) a ser definido. Assim, por exemplo, ao se definir ou, principalmente, se comunicar as definições de *número* e *fração*, recorre-se, no primeiro caso, a uma categorização, e no segundo a uma relação. No entanto, literalmente o objeto *número* não é uma categoria objetiva ou concreta, assim como *fração* não se refere a uma particular relação entre dois outros objetos concretos. Portanto, a compreensão destes objetos matemáticos (*número* e *fração*) só se dá através de uma perspectiva metafórica, a partir da qual, características concretas são atribuídas a objetos abstratos. Destaque-se aqui, como ilustração, diferentes idéias do que seja número ao longo da história da matemática. A começar por Russell, que em *Introduction to Mathematical Philosophy*, de 1919, afirmou que a apresentação axiomática de Peano era incompleta porque não respondia as perguntas “O que é um número?”, “O que é o número Um?”. Na verdade, no sentido da axiomática de Peano, tudo o que obedece a seus axiomas poderia ser chamado de número. No entanto, todas as tentativas de completar a frase “Número é...” cai em uma noção metafórica. Considere-se, também, as noções concebidas por Cantor - números são conjuntos ou grandezas; por John Conway - números são jogos; por Gauss e Grassmann - números são vetores; e por Hamilton - números são transformações ou matrizes no plano.

A uma relação estabelecida por uma metáfora entre dois objetos, segue-se uma ausência de limites definidos dos aspectos em que tais objetos se assemelham, de modo que a escolha de critérios para a determinação da correspondência é totalmente indefinida. Na matemática e na ciência em geral, esse é o principal mecanismo pelo qual um novo objeto se origina e é entendido. Nesse sentido, Kuhn (2007, p. 242) observa que na ciência a introdução de novos termos, tais como “massa”, “eletricidade” e “calor”, depende originalmente de relações metafóricas. Uma idéia científica nova nunca é acompanhada de uma referência imediata e definitiva, uma vez que a introdução de novos conceitos e objetos se dá sempre a partir de termos já estabelecidos na linguagem científica usual. Prosseguindo em tal raciocínio, Kuhn (2007, p. 243) observa que, uma vez estabelecidos padrões de referência no meio científico, tais padrões precisam ser restabelecidos para cada novo grupo de aprendizes da ciência. E para tal novo estabelecimento nesse grupo de aprendizes, os conceitos e idéias que lhes são apresentados passam necessariamente pelos mesmos processos contingentes que as metáforas originalmente criaram. Expandindo-se tal abordagem para a origem e desenvolvimento de idéias matemáticas, percebe-se a possibilidade teórica da importância do papel das metáforas para o estabelecimento de referentes tanto na atividade dos matemáticos, na oportunidade da formulação de novos objetos ou teorias, quanto para a Educação Matemática, onde os padrões de referência desenvolvidos na matemática precisam ser sempre restabelecidos, sendo imprescindíveis e inevitáveis para isso processos metafóricos. Nesse sentido, não se justifica a imposição do rigor e da exatidão praticada no ensino da matemática, como por exemplo em relação aos conceitos de número, equação de qualquer tipo, ou função, uma vez que é possível que tais objetos sejam, a partir de uma infinidade de aspectos, similares ou diferentes a referentes já usualmente estabelecidos entre os sujeitos (professores e estudantes). Para ficar em apenas duas referências para a noção de "número", considere-se que um tal conceito matemático pode ser concebido como sendo quantidades de objetos concretos, ou ainda como sendo meras distâncias de um ponto a outro sobre uma linha reta. Nesse sentido, o que garante a exatidão atribuída à matemática em contextos educativos, se seus conceitos possuem referências inevitavelmente não exatas, quando não uma multiplicidade de referências?

Objetos matemáticos não existem por si mesmos no mundo, mas são antes objetos de pensamento, e como tais dependentes de representações metafóricas. Representações são sempre dependentes de formas particulares de considerações na consciência dos sujeitos, e como tais, suscetíveis a variações interindividuais, com oscilações no tempo e no espaço. Dessa perspectiva, as assim chamadas *leis da matemática* perdem em grau de objetividade e universalidade. Por exemplo, fórmulas ou equações numéricas seriam sempre e totalmente demonstráveis, como queria Frege, no sentido do rigor matemático requerido pelo paradigma da modernidade? A prova do teorema da incompletude de Gödel já demonstrou que não (cf. GOLDSTEIN, 2008). E visto de uma maneira que reconheça o caráter de representação dos objetos matemáticos e sua conseqüente contingência, também é possível que não. Toda equação matemática pressupõe uma igualdade entre objetos literalmente distintos, isto é, considera-se A=B, embora se tenha literalmente A≠B. Observe-se que se A=A nada há que se demonstrar. Por sua vez, uma igualdade entre distintos pressupõe uma perspectiva que possibilite uma relação de semelhança. Por definição (aristotélica), essa perspectiva é metafórica e, portanto, não literal. Sendo assim, são indeterminadas as possibilidades de comparação por critérios comuns a A e a B previamente estabelecidos. Sempre é possível tomar A e

B de uma nova perspectiva que lhes tornem iguais. E as perspectivas não precisam ser necessariamente da mesma natureza ou categoria (quantidades de objetos concretos nada tem a ver literalmente com distâncias entre dois pontos em uma reta, por exemplo, embora possa se afirmar que número=quantidade ou número=distância), o que inviabiliza qualquer método de extrapolação de resultados de casos particulares.

Visto desta maneira, não se justifica o rigor e a objetividade presentes em situações de comunicação de idéias matemáticas, e em particular em contextos de ensino-aprendizagem de objetos matemáticos. É necessário reconhecer que, enquanto abstrações, objetos matemáticos só podem ser concebidos por meio de representações. E representações sempre estão suscetíveis a formas contingentes de compreensão, particularmente sujeitas a processos metafóricos.

Nesse sentido, metáforas são fundamentais para o pensamento matemático. A metáfora não é apenas um fenômeno lingüístico manifesto através da fala, mas é especialmente um mecanismo cognitivo, inerente ao domínio do pensamento. Metáforas atuam no sentido de permitir uma interação entre domínios conceituais distintos, tais como a geometria e a aritmética, e nesse sentido podem ter sido fundamentais para o próprio avanço da matemática ao longo dos tempos.

A metáfora não é apenas uma figura de linguagem, como comumente é classificada pela gramática ou definida em dicionários. Para além disso, é também um recurso semiótico que promove uma transferência ou desvio de significados próprios e costumeiros de termos em proposições, possibilitando a expansão não somente da língua como também do pensamento. Nesse sentido, é um elemento fundamental para as abstrações, que são espaços de fuga da realidade concreta, mas que estão intimamente relacionadas a esta em suas origens. Devido a este desvio de significado, metáforas são também chamadas de *tropos*, uma palavra de origem grega que significa giro ou desvio.

Em matemática, é possível que a metáfora possibilite pensar em uma coisa como se fosse outra. Conceitos fundamentais, como o de *número*, muitas vezes são tratados como objetos sensíveis ou “visualizáveis”. Considere-se a noção intuitiva de números reais como pontos sobre uma reta. Ou ainda a de conjuntos como coleções de objetos. Pode-se avançar ainda para as operações, como ajuntamentos, separações ou alongamentos de objetos físicos etc. Considere-se ainda a aproximação de ramos distintos da matemática tais como álgebra e geometria, que quando correlacionados possibilitaram o surgimento de novos objetos e a expansão da própria matemática. Considere-se, por exemplo, a metáfora do plano gaussiano, a representação geométrica dos números complexos, que possibilitou a extensão da teoria dos números do corpo real para o complexo. Isso foi genuinamente um desvio de significados, uma metáfora, que possibilitou "enxergar" as partes real e imaginária de um número complexo $a + bi$ como sendo coordenadas retangulares num plano, o que permitiu que os matemáticos passassem à completa aceitação dos números "imaginários".

Nesse sentido, como afirma Otte (2008a), a metáfora está intimamente relacionada à criatividade, e como tal sempre remete a um resultado que é novo em espécie, às vezes imprevisível, cujo caráter definitivo não pode ser reduzido à soma dos seus elementos. Isso é o que configura o *insight* metafórico, que é, na verdade, uma espécie de olhar ou intuição, uma tentativa de transformar uma possibilidade de pensamento em um explícito processo consciente. Ainda segundo Otte (2008a), a criatividade depende em grande medida tanto de continuidade e redundância quanto de espontaneidade e mudança, o que possibilita condições para se gerar e reconhecer novas idéias. Assim, todo o entendimento humano é mais ou menos metafórico, porque o sentido depende do contexto e do uso, de modo que idéias inicialmente absurdas podem ser férteis se concebidas em um contexto apropriado e de uma perspectiva adequada. Nesse sentido, a metáfora traz ferramentas de inferência sobre novos contextos, residindo nisto sua importância para o avanço do conhecimento humano.

Ao mesmo tempo em que aderem a particularidades contextuais, as metáforas estão intimamente relacionadas a generalizações, e essa relação possibilita o estabelecimento de idéias gerais, tais como na "equação" *calor=movimento*, criando a noção abstrata de energia (OTTE, 2008a). Essa noção somente é possível devido a afinidades, ainda que remotas, que a metáfora estabelece entre coisas distintas, gerando nexos necessários entre elas, aproximando-as a tal ponto de ser possível criar uma nova idéia ou compreensão generalizada. Na matemática, é ilustrativo neste caso a aproximação entre aritmética e álgebra, e em particular a transferência de estruturas entre os dois campos promovida pelo matemático britânico George Boole (1815 – 1864) ainda no século XIX. Boole (1948) concebeu classes como sendo números, e essa metáfora (classes são números) se deu a partir da noção geral de formas equivalentes, possibilitando a transferência e aplicação das operações com números para operações com classes. Assim, por exemplo, a adição de números na aritmética tem como forma equivalente na álgebra a união de classes; a propriedade comutativa da adição se converte na comutatividade da união de classes; a classe vazia é entendida como o zero etc. Essas generalizações promovidas por esses *links* metafóricos de Boole entre aritmética e álgebra, e suas reflexões sobre o caráter essencial da matemática apresentadas em seu *The Mathematical Analysis of Logic*, publicado em 1847, possibilitaram a concepção de matemática, a partir do século XIX, não mais como a ciência da grandeza e do número, mas sim como a ciência das formas equivalentes, cujas leis de combinação de símbolos procuram ser consistentes e ao mesmo tempo generalizantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De certa forma, reconhecer a importância da metáfora na matemática é entrar em desacordo com uma concepção há muito estabelecida de que a matemática e a lógica representam um conhecimento literal, descontextualizado e universal. Como dito no início deste artigo, esta visão se fortaleceu com o advento da Idade Moderna e ainda teve ecos no final do século XIX, sendo Frege e Peano bons exemplos disto. No entanto, como afirma Otte (2008a), ultimamente tem havido em particular uma forte tendência para substituir este olhar a respeito do conhecimento matemático.

A partir do século XIX, o discurso matemático tornou-se influenciado pelo contexto social devido ao aumento da demanda por educação escolar e pela produção de textos para um público leitor mais amplo, o que levou os próprios matemáticos e filósofos da ciência a dirigirem a atenção para a importância da linguagem na matemática. Entre os matemáticos, essa preocupação se refletiu no surgimento de dois principais movimentos, sendo um o do rigor aritmético, e o outro, o da busca pela formulação de uma axiomática como método fundamental. O primeiro, motivado pela questão do ensino, e o segundo, pelo desenvolvimento de pesquisas em matemática pura. No entanto, entendemos que nenhum destes dois movimentos superaram a concepção moderna da relação entre linguagem e matemática, com implicações epistemológicas significativas nesta direção.

Da perspectiva da metáfora, o discurso matemático se distancia da detalhada narração lógica que Frege desejava que fosse, de modo que a concepção de matemática exposta por Bolzano ou Frege dá lugar a uma concepção de matemática como ramo do conhecimento permeado de contingências e construções particulares, e como tal, sujeito às particularidades do espaço e do tempo em que está inserido. Novas idéias matemáticas surgem tendo por base idéias já existentes e conhecidas. E nesse sentido, uma tal concepção de matemática não vale apenas para a matemática contemporânea, cuja característica forte é a absoluta abstração, mas se aplica a teorias matemáticas em todos os tempos, de modo que, como salienta Otte (2008a), é possível que toda exposição de teorias matemáticas desde os *Elementos* de Euclides tenha sido essencialmente metafórica.

As novas possibilidades teóricas geradas pelo olhar para a matemática tendo como foco o papel da metáfora não se traduzem necessariamente em mudanças nos modos de se produzir matemática e não passam necessariamente pela reformulação desse campo de saber em si. Antes disso, essa nova perspectiva pode contribuir para uma compreensão diferente de como se desenvolvem as idéias matemáticas, as particularidades de sua gênese, e particularmente o modo como se dá a intercomunicação de tais idéias em contextos educativos.

REFERÊNCIAS

BLACK, M. *Models and Metaphors*. New York: Cornell University Press, 1962.

BOOLE, G. *The Mathematical Analysis of Logic*. New York: Philosophical Library, 1948.

BOOTH, W. C. A metáfora como retórica: o problema da avaliação. In: SACKS, S. (Org.). *Da Metáfora*. Tradução de Leila Cristina M. Darin et al., São Paulo: EDUC/Pontes, 1992.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgar Blücher, 2006.

CONDILLAC, É. B. A língua dos cálculos. In: CONDILLAC, É. B., HELVÉTIUS, C., DEGÉRANDO, M. *Textos escolhidos*. São Paulo: Abril Cultural, 1979.

DAVIDSON, D. What Metaphors Mean. *Critical Inquiry*, n. 5, p. 31-47, 1978.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

FONT, V. Matemáticas y cosas. Uma mirada desde la Educación Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, vol. 3, n. 2, pp. 59-112, 2001.

FREGE, G. *Os Fundamentos da Aritmética*. Tradução de Antônio Zilhão. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 1992.

GOLDSTEIN, R. *Incompletude: A prova e o paradoxo de Kurt Gödel*. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

KUHN, T. *A estrutura das revoluções científicas*. São Paulo: Perspectiva, 2007.

MIGUEL, A.; GARNICA, A. V. M.; IGLIORI, S. B. C.; D'AMBRÓSIO, U. A educação matemática: breve histórico, ações implementadas e questões sobre sua disciplinarização. *Revista Brasileira de Educação*, nº 27, Set /Out /Nov /Dez, 2004.

OTTE, M. F. Metaphor and Contingency. In: RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (Orgs.). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom, and Culture*. Rotterdam: Sense Publishers, 2008a.

OTTE, M. F. Space, Complementarity and Diagrammatic Reasoning. *Semiotica*, Berlin, 2008b.

ROUSSEAU, J. J. Ensaio sobre a origem das línguas. In: ROUSSEAU, J. J. *Os pensadores*. São Paulo: Abril Cultural, 1978.

SANTOS, B. S. *Um discurso sobre as ciências*. São Paulo: Cortez, 2008.

SEARLE, J. *Expressão e significado*. Trad. Ana Cecília Camargo e Ana Luiza Garcia. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

Submetido em março de 2010

Aprovado em agosto de 2010