UTILISATION DU TABLEAU DE VALEURS POUR L'ENSEIGNEMENT / L'APPRENTISSAGE DE LA NOTION DE FONCTION

İlyas Yavuz[1]
Université de Marmara, İstanbul, Turquie

RESUME

L'enseignement de la notion de fonction au début du lycée a subi de profondes mutations. Un des points les plus emblématiques de cette évolution a trait à un usage accru des divers modes de représentation des fonctions. Ainsi, Le tableau de valeurs, qui n'a longtemps joué qu'un rôle d'auxiliaire dans le passage de l'algébrique au graphique, apparaissent à présent de plus en plus explicitement comme un moyen à part entière de représentation des fonctions. Dans cet article, nous présenterons nos analyses visant à caractériser comment sont prises en compte le tableau de valeurs dans l'enseignement en seconde. Après avoir précisé les cadres théoriques, nous présenterons d'abord les résultats concernant les opinions et les choix didactiques des enseignants. Nous analyserons ensuite, les capacités des élèves à résoudre différentes tâches mettant en jeu l'utilisation des tableaux de valeurs. Nous tenterons dans nos conclusions de replacer ce travail dans une perspective plus large de l'apprentissage du concept de fonction.

Mots clés: tableau de valeurs, fonction, classe de seconde.

ABSTRACT

The teaching of function at the beginning of High School has been severely changed. One of the main points of this tendency concerns the increasing use of different ways to represent a function. In this way, a table of values, which for long had a secondary place in the passage from algebraic to graphic, it now seems to be more explicitly a way to represent functions. In this paper, we present our analysis aiming at to characterize how table of values are presented in the secondary school. After presenting theoretical frameworks, we will first present students capacities to

[1] ilyavuz@hotmail.com

solve different tasks involving the use of tables of values. We will attempt, in our conclusions, to place this study in a broader perspective of the learning the concept of function.

Key-words: table of values, functions, secondary school.

INTRODUCTION

Depuis le début de la réformer des mathématiques moderns en Turquie (2005), l'enseignement de la notion de fonction, a subi de profondes mutations. Ainsi, l'étude des fonctions se fait plus progressivement, puisqu'on introduit tout d'abord les fonctions affines à la fin du collège, en classe de troisième (élèves de 14-15 ans). Puis, au début du lycée, en classe de seconde (élèves de 15-16 ans), on introduit le langage des fonctions sans les outils théoriques classiques de l'analyse (dérivée, limites, etc.), qui n'apparaîtront qu'à partir de la classe de terminale (élèves de 17-18 ans). Parallèlement, le bestiaire des fonctions que les élèves doivent connaître reste limité en classe de seconde aux fonctions du second degré, racine et cosinus, sinus, alors qu'en première, apparaissent les fonctions polynômes, rationnelles, logarithmes et exponentielles, les fonctions valeur absolue et partie entière n'apparaissant qu'en classe de terminale (élèves de 17-18 ans).

En seconde, un des points les plus emblématiques de cette évolution a trait à un usage accru des divers modes de représentation des fonctions, spécialement dans les premières leçons. Ainsi, parallèlement à une diminution de la suprématie du registre algébrique, le registre graphique a acquis de nouveaux droits, mais les programmes préconisent également d'utiliser dans des conditions nouvelles les tableaux de valeurs. Traditionnellement, les représentations algébrique et graphique jouent un rôle dominant (le registre algébrique est d'ailleurs souvent le seul accepté pour démontrer), alors que les tableaux de valeurs ne jouent qu'un rôle d'auxiliaires dans le passage de l'algébrique au graphique. Cependant, suite aux diverses réformes du système d'enseignement depuis les années 70, les places et rôles de ces modes de représentation ont subi de nombreuses évolutions (Yavuz, 2005 et Coppé, Dorier & Yavuz, 2006). Ainsi, les tableaux de valeurs apparaissent de plus en plus explicitement dans les programmes, comme moyens à part entière de représentation des fonctions. Dans le dernier changement du programme appliqué a partir de 2005 ; pour la première fois, on demande de définir une fonction à partir d'un tableau de valeurs et on parle explicitement du passage d'un tableau de valeurs à une représentation graphique (ces types de tâches n'étaient jamais explicites dans les programmes antérieurs, même s'ils ont pu à certaines époques correspondre à une pratique effective) (MEB, 2005).

Ainsi, le tableau de valeurs peut ne plus être seulement un outil de représentation partielle de la courbe, mais devenir une façon de définir une fonction. La question reste de savoir dans quelle mesure les élèves peuvent comprendre que ces différentes représentations définissent bien un objet et, qui plus est, le même objet. Pour les professeurs, la tâche est également difficile dans la mesure où ils ont à prendre en compte ces différents modes de représentation, tout en travaillant à l'émergence et l'unité du concept de fonction. Ces constats nous ont amenés à faire une étude plus précise sur la façon dont les tableaux de valeurs sont utilisés dans les classes de seconde et ce qu'ils peuvent permettre dans l'apprentissage du concept de fonction.

PROBLÉMATIQUE

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques se sont intéressés à l'enseignement et l'apprentissage de la notion de fonction. Nombre d'entre eux s'appuient sur une analyse épistémologique de cette notion, en particulier en référence à son évolution historique (Comin, 2005, Schneider, 1994, Sierpinska, 1992, etc.). Ces travaux nous indiquent que la fonction a subi une évolution dans les mathématiques savantes, qui l'a, en partie, coupée de son origine épistémologique comme modèle d'une dépendance entre variables en décrivant une correspondance terme à terme entre les valeurs prises par ces variables.

Au niveau de l'enseignement, depuis les mathématiques modernes, la fonction occupe une place importante en troisième, et surtout en seconde. Cependant, les dernières évolutions des programmes ont eu en particulier deux effets sur cette place. D'une part, l'appauvrissement du travail algébrique au collège a réduit considérablement le bestiaire des formules algébriques étudiables à ce niveau; d'autre part, l'entrée dans une démarche spécifique de l'analyse a été repoussée entièrement à la classe de terminale. Ainsi, l'enseignement des fonctions occupe-t-il actuellement une place nouvelle et particulière dans la classe de seconde. Il ne peut en effet s'appuyer en amont que sur les exemples des fonctions linéaires et affines, à peine formalisées, et n'a plus vocation à nourrir immédiatement un travail dans le domaine de l'analyse. Ainsi, nous rejoignons le constat de Comin (2005) « qu'une partie importante des élèves de seconde ne sont pas prêts à recevoir un enseignement formel du concept de fonction ». Il définit à la suite les grandes lignes d'un projet curriculaire permettant de mieux organiser l'enseignement des fonctions au collège et au lycée. Par ailleurs, plusieurs travaux ont permis de mieux comprendre et de préparer l'enseignement des fonctions comme entrée dans le domaine de l'analyse (Artigue 1993, Bloch 1999, 2000, 2002 et 2003, Hauchart et Schneider 1996, René de Cotret 1985, Schneider 1994, Sierpinska, 1992, etc.).

Parallèlement à ces études qui montrent les difficultés et les obstacles et font des propositions curriculaires, il nous a semblé important de mieux mesurer les effets, dans les programmes, sur les pratiques enseignantes et in fine dans les apprentissages, des dernières modifications de programme. Dans cet article, nous présenterons ainsi nos analyses visant à caractériser comment sont prises en compte, par les différents acteurs de l'institution, ces récentes modifications, en particulier l'usage des tableaux de valeurs dans le chapitre des généralités sur les fonctions en classe de seconde.

Connaissances liées au tableau de valeurs

Pour une fonction, un tableau de valeurs donne un « échantillon » des couples formés par une valeur de la variable et la valeur correspondante de son image. C'est donc une représentation partielle (sauf dans le cas très particulier d'un ensemble fini) de la correspondance entre la variable et son image. Elle donne donc une vision finie pour quelque chose qui est en général infini. Qui plus est, dans la majorité des cas, c'est une discrétisation d'un phénomène continu. En outre, le tableau de valeurs n'a aucune raison, a priori, de contenir des valeurs remarquables de la fonction au regard de ses variations. Dans ce sens, c'est une représentation très partielle et arbitraire. A contrario, partant d'un tableau de valeurs, par nature fini, il existe une infinité de fonctions qui peuvent le satisfaire. Dans le cadre graphique, ceci se traduit par les différents choix possibles pour rejoindre certains points par des lignes. Si, théoriquement, la variabilité est infinie, en pratique, il existe certains implicites ou usages qui limitent ce choix, pouvant même laisser croire à l'unicité. D'un point de vue algébrique, l'interpolation est un domaine inabordable au niveau de la seconde dans toute sa généralité, même si la recherche de la droite représentant au mieux un nuage de points est abordée dans des cas simples. L'usage de la modélisation de phénomènes extra-mathématiques par des fonctions dans d'autres disciplines pourrait être un point d'entrée intéressant permettant d'aborder la question du rapport d'un tableau de valeurs à une courbe ou une fonction. Il reste que les pratiques de tracé d'une courbe représentant au mieux un nuage de point sont courantes dans plusieurs domaines et que l'enseignement des mathématiques a du mal à s'en départir.

A l'entrée en seconde, les élèves ont déjà l'habitude de tableaux comprenant deux lignes de valeurs, en mathématiques comme dans d'autres disciplines ou dans des situations extérieures à l'école. De plus, ils ont eu à représenter graphiquement les données d'un tel tableau, par le tracé de points dans un repère et même éventuellement en reliant ces points, en général par des segments de droites. En classe de mathématiques, en 3ème, le travail sur les fonctions linéaires et affines conduit à la représentation des tableaux de proportionnalité (travaillés depuis le primaire) par des droites, mais aussi par des formules algébriques, sous forme fonctionnelle. C'est ici que se situe la première rencontre des élèves avec l'idée qu'il peut exister une formule permettant de passer de la première à la seconde ligne d'un tableau, modélisant ainsi la relation fonctionnelle sous-jacente.

Ainsi, en classe de seconde, le tableau de valeurs n'est pas un objet nouveau pour les élèves. De même, le lien avec les courbes a déjà été fait, mais sans forcément l'associer avec l'idée de fonction, objet encore flou dans la tête des élèves. Ces diverses expériences autour des tableaux de valeurs ont certainement formaté leur représentation de cet objet. Compte tenu de cette perspective, nous voulons ainsi voir les conceptions des élèves sur le tableau de valeurs, et donc comment ils le percevaient dans la relation avec la représentation de fonction. Quel est le domaine de fonctionnement de cet objet ? Comment prennent-ils leur place dans les pratiques des professeurs et dans les activités des élèves ? Quelles procédures sont mises en jeu par les élèves pour résoudre les exercices qui relèvent de types de tâches liés cet objet? Ces questions ont été à la base de notre problématique et ont guidé les choix théoriques et méthodologiques que nous allons maintenant présenter.

CADRE THEORIQUE

Nos deux cadres théoriques de référence principaux sont d'une part, les registres de représentation sémiotique de Duval et, d'autre part, le contrat didactique de Brousseau. Nous les présentons maintenant brièvement avec nos premiers éléments d'analyse sur les tableaux de valeurs. Nous situons ainsi le contexte théorique dans lequel va se développer notre étude.

Registres de représentation sémiotique

Duval (1993) introduit la notion de registre de représentation sémiotique et pour lui, la compréhension d'un concept passe par l'utilisation et la coordination de différents registres de représentation sémiotique. Ces registres de représentation permettent de disposer d'ostensifs d'une notion; ces ostensifs se constituent en registres, c'est-à-dire en systèmes organisés d'ostensifs. Nous disons systèmes organisés, car ces ostensifs sont liés entre eux par des relations, relations qui elles-mêmes se traduisent parfois par des ostensifs spécifiques. Ainsi dans le registre formel, des symboles qui permettent de parler de fonctions, f et g, sont liés par d'autres ostensifs, par exemple "o" qui permet de représenter la composition de f et g; il existe des flèches utilisées pour relier la variable x et son image ; ou des symboles qui permettent d'opérer sur des fonctions comme la somme, le produit, l'intégrale, le symbole exponentiel -1 qui permet de représenter l'inverse d'une fonction...

Tous les signes ne sont pas de même nature, certains sont surdéterminés alors que d'autres peuvent être affectés à n'importe quel objet mathématique: Duval (1995) parle de signes libres pour les signes qui n'ont pas de signifiance a priori, ce qui est le cas des signes qui servent à organiser les autres ostensifs (mais aussi de tous les signes du registre formel, comme x, f...) ; «droite » par exemple, n'est pas un signe libre, il ne peut désigner, dans un énoncé, n'importe quel objet mathématique: c'est un signe lié.

Pour qu'une connaissance ou un savoir mathématique puisse être mis en œuvre, il est alors nécessaire, toujours selon Duval :

- que le sujet dispose, non pas d'un mais de plusieurs registres de représentation (on ne peut en effet différencier un objet de sa représentation que si on dispose d'au moins une autre représentation, dans un autre registre);
- qu'il ait acquis la coordination de ces registres, faute de quoi on observe les effets du cloisonnement entre les différents registres.

On peut alors distinguer les transformations de représentations qui restent dans le même registre, et que Duval nomme traitements, des changements entre registres différents, qui sont des conversions. D'autre part, il importe de bien distinguer l'objet de la représentation de son contenu: l'objet est le concept mathématique qui est représenté, le contenu est ce qui est visible, et qui pourra être identifié comme forme explicite rendant accessibles certaines propriétés de l'objet (Duval 1995). Il paraît clair qu'un représentant d'un concept n'en livre alors qu'un aspect partiel, c'est un des points que nous étudierons dans ce travail.

Un représentant d'une fonction est donc un élément particulier de l'ensemble des outils sémiotiques recensés ci-dessus, par exemple une formule algébrique qui définit la fonction, ou le symbole «f», ou encore la représentation graphique de la fonction dans un repère (O, i, j). Un représentant est ce qui permet le traitement d'un concept; les possibilités de traitement ouvertes par un représentant ou un registre ne dépendent que du concept et du représentant, ce sont des éléments du savoir sur ce concept. Mais les représentants, qu'ils appartiennent à n'importe quel registre, ont des caractéristiques communes. Ces caractères peuvent être décrits comme étant essentiellement d'être partiels et ambigus. Remarquons que ces caractères correspondent assez bien à ce que J.Rogalski, en parlant des graphiques (Rogalski 1984), avait appelé leurs caractères réducteur et producteur. En effet le caractère réducteur vient de ce que le représentant n'est pas apte à rendre compte de la globalité du concept; et le caractère producteur de ce qu'un représentant détermine des observables non prévus à l'avance dans la représentation. Convenons donc d'adopter les qualificatifs réducteur et producteur pour les registres liés à la notion de fonction, plus particulièrement pour le tableau de valeurs.

Le caractère réducteur des représentants

Il est issu de la distinction entre l'objet et ses représentants. Il en résulte que chaque représentant d'une fonction (d'un concept plus généralement) n'hérite que d'une partie des propriétés du concept. On peut faire l'hypothèse que c'est de la multiplicité des représentants possibles que le concept et ses propriétés vont se dégager (coordination des représentants à l'intérieur d'un registre et entre registres), sans pour autant penser forcément que la coordination est un préalable au travail sur le concept.

On peut observer que le caractère réducteur d'un représentant le rend porteur de certaines propriétés du concept; ces propriétés ne sont pas les mêmes suivant la théorie à laquelle appartient ce représentant. Ainsi le tableau de valeurs ne permet pas de conjecturer la continuité, ou les limites, ni même les extrema d'une fonction; le cadre algébrique est muet sur le sens de variations, mais commode pour les opérations algébriques; le cadre formel ne donne pas de renseignements sur les valeurs prises par f(x) ni sur l'équation de la courbe.

Une conséquence fondamentale du caractère réducteur des représentants est la part d'arbitraire qui demeure dans certains représentants d'une fonction. Ainsi un tableau de valeurs de (x, f(x)) ne définit pas une fonction, du moins sur un intervalle de $\mathbb{R}$; par exemple :

x	-1	0	1
f(x)	-1	0	1

peut être le tableau de trois valeurs de $f(x) = x$ de $f(x) = x^3$, ou de $f(x) = \sin(\pi x)$, ou encore d'une autre fonction, absolument quelconque, dont on ne connait pas de forme algébrique. C'est dire que tout représentant donné correspond à plusieurs fonctions possibles. Ce caractère est plus ou moins marqué suivant les outils; les représentants algébriques peuvent sembler moins réducteurs que les autres, car ils paraissent peu porteurs d'arbitraire; s'ils définissent exactement, en effet, la fonction dont on parle, ils sont néanmoins incapables de rendre visibles certaines de ces propriétés, comme le sens de variations.

Le caractère producteur des représentants

Ce caractère est intrinsèque au fait de représenter, c'est-à-dire à l'utilisation des signes. Un signe (ou une série organisée de signes) peut être pris pour lui-même, ou bien pour quelque chose qui est représenté; auquel cas il peut renvoyer à plusieurs signifiés, que le contexte peut éventuellement départager. Dans le cas de la sémiotique de la langue naturelle, par exemple, le contexte est culturel et l'appui sur celui-ci fait qu'un signe organisé (un mot par exemple) ne se trouve pas sans signifié(s), ni celui-ci (ceux-ci) sans référent(s). Il n'en est pas forcément de même en mathématiques, où l'on peut imaginer manier les suites de symboles uniquement d'après les règles logiques qui les régissent - ces symboles et ces règles ont même été construits dans ce but - sans aucun contrôle sur ce qu'ils représentent. Ainsi le signe « f » peut n'être pris que comme un symbole sur lequel on a le droit d'appliquer certaines règles formelles; le fonctionnement interne de ces règles ne garantit pas que ce symbole renvoie au concept fonction.

D'autre part un même représentant peut représenter différents objets, mathématiques ou non: c'est en particulier vrai dans les registres géométriques ou graphiques, où l'on sait bien que l'élève peut voir le dessin là où le professeur voit la figure. Mais sans doute plus d'élèves qu'on ne le pense, même au niveau de Première scientifique, ne voient dans une formule algébrique que des signes agencés suivant des règles hermétiques, et n'ont que peu de moyens de contrôle sur le travail algébrique. Par ailleurs, le caractère réducteur signalé ci-dessus entraîne forcément une ambiguïté sur l'objet « total » représenté: ainsi du tableau numérique, comme nous l'avons vu; mais aussi du graphique, qui n'est vu que dans une fenêtre et qui pourrait être prolongé de plusieurs façons différentes; de plus le dessin-graphique, même dans la fenêtre représentée, n'est pas la RGC d'une fonction unique mais d'une classe de fonctions, étant donnée l'approximation du tracé.

Contrat Didactique

L'expression «contrat didactique», inventé par Guy Brousseau (1984, 1990, 1997), suggère l'existence de normes implicites qui fonctionnent comme un contrat, réglementer les trois interactions entre enseignant, étudiant, et le sujet d'études, de mathématiques. Le gros caractères de ce contrat est fixée à partir du moment où des enseignants et les étudiants se réunissent pour traiter de la question. Elle établit un l'obligation mutuelle entre enseignants et élèves à l'égard des mathématiques: L'enseignant doit enseigner les mathématiques pour les élèves et les étudiants doivent apprendre les mathématiques avec l'aide de l'enseignant (Brousseau & Otte, 1991). Brousseau postule que les clauses de ce contrat le montant de l'amende l'impression, pour ainsi dire, sont en permanence en cours de négociation dans le même temps qu'elles sont appliquées. Cette négociation de contrat permet à la didactique des enseignants et les étudiants à travailler ensemble et en même temps de s'acquitter de leurs rôles respectifs comme ils le font de leur part de travail.

Contrat didactique sur la nature des tableaux de valeurs

Il existe potentiellement une assez grande variabilité dans la nature des tableaux de valeurs. Néanmoins, on peut d'ores et déjà dire a priori que certaines de variables ne prendront en fait qu'un nombre restreint de valeurs dans le contrat classique. En effet, le nombre de colonnes sera vraisemblablement comprise entre 5 (moins cela ne vaut pas la peine) et 15 (au delà cela fait beaucoup). Valeurs maximale et minimale de la variable "x" dans le tableau correspond la plupart du temps aux bornes de l'intervalle de définition quand elles sont finies. Très souvent, les valeurs sont ordonnées dans l'ordre croissant et espacées d'un pas régulier qui est un entier (quelquefois 0,5 ou 0,1) ce qui fait que la plupart des valeurs sont des entiers (voire des demi-entiers ou des nombres décimaux « simples »).

Par ailleurs, très souvent les valeurs du tableau sont choisies pour donner une bonne représentativité de l'intervalle de définition indépendamment de la nature de la fonction, c'est le cas typique où on commence par la borne inférieure de l'intervalle avec un pas constant pour arriver à la borne supérieure en une petite dizaine de valeurs. C'est bien aussi l'idée que l'on se fait de la mesure d'un phénomène naturel:

taille d'une population tous les ans entre deux dates, prise de la température toutes les 5 min, etc.

Par exemple, pour une fonction définie sur [-2 ; 3] on donne le tableau suivant:

x	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-3.2	4	-1	0	26	0.5

Comme nous l'avons dit plus haut, un tableau de valeurs ne donne qu'une information partielle sur une fonction. De plus, il est lié à des choix qui ont un grand arbitraire. Le tableau de valeurs est avant tout un outil pour travailler les notions d'images et d'antécédents et pour tracer des courbes. Son usage peut paraître simple et donc les règles de son utilisation restent implicites dans l'enseignement. De plus, il semble que les connaissances liées à son usage ne sont pas mises en avant dans les pratiques. Par exemple, se pose t-on la question de savoir dans quelle mesure, un tableau d'une dizaine de valeurs peut rendre compte de façon pertinente d'une fonction définie sur tout IR ? Cela dépend bien sûr si on sait ou non par ailleurs que la fonction est par exemple affine, ou du second degré, etc. De même, les élèves ont-ils l'occasion de discuter sur la variabilité dans le choix d'un tableau de valeurs pour une fonction donnée, sur ce qui peut se passer entre les valeurs du tableau ? A quelle condition deux tableaux peuvent-ils représenter la même fonction ?

MÉTHODOLOGİE

Nous avons tout d'abord voulu connaître les choix des enseignants pour l'enseignement de la notion de fonction et plus particulièrement pour l'utilisation des tableaux de valeurs et les connaissances mathématiques et didactiques sous-jacentes à ces choix. Pour faire cela, nous avons élaboré un questionnaire dont nous regroupons les renseignements récoltés en deux catégories:

– La définition et les rôles attribués au tableau de valeurs,

– Les avis sur une question que les élèves ont eu à faire dans leur questionnaire

22 enseignants ont accepté de répondre à ce questionnaire. Leur ancienneté en seconde est diverse. Sept enseignants travaillent depuis plus de 20 ans ; trois enseignants travaillent dans la période 10-20 ans ; dix d'entre eux travaillent depuis moins de 10 ans. Enfin un enseignant commence à travailler après le dernier changement du programme et donc travaille depuis moins de 5 ans. Un enseignant ne répond pas à cette question.

Au-delà des choix des enseignants dans la préparation de leurs cours et l'organisation du travail de l'élève, il serait intéressant d'interroger les élèves eux-mêmes afin de voir ce qui avait été réellement appris. Nous avons ainsi élaboré un questionnaire qui vise à interroger leurs capacités à résoudre différentes tâches mettant en jeu l'utilisation des tableaux de valeurs, en particulier au regard du traitement du tableau de valeurs et de la conversion dans d'autres registres. Le test a été passé, pendant une séance (environ 40 minutes), dans 10 classes différentes réparties dans 6 établissements et de niveaux variés. 260 élèves ont répondu au questionnaire. Dans 3 classes, chacune d'un établissement différent, c'est le professeur qui a fait passer le test, sans notre présence ; dans les 7 autres classes de trois établissements différents, nous étions présents quand le professeur a fait passer le test. Cela nous a permis d'observer et de noter les questions des élèves sur les questionnaires. Dans tous les cas, le questionnaire a été passé après les premières séances sur les fonctions (voire dans certaines classes à la fin des chapitres sur les fonctions). L'enseignant avait pour consigne de ne pas intervenir pendant le test. Afin de compléter notre analyse, il nous a semblé intéressant d'expérimenter les questionnaires précédents dans quelques classes de terminale pour voir si certaines erreurs persistent ou s'il y a une évolution sur la façon dont les élèves utilisent le tableau de valeurs. Le test a été passé, pendant une séance (environ 40 minutes), dans 4 classes différents de terminale, 2 classes de S et 2 classes de ES[2], réparties dans 2 établissements et de niveaux variés. 111 élèves ont répondu au questionnaire. Dans toutes les classes, nous étions présents quand le professeur a fait passer le test.

[2] La section S est la section Scientifique, la section ES est celle d'Economie et Sciences Sociales.

RÉSULTATS ET DISCUTION

Questionnaire aux enseignants

La définition et les rôles attribués au tableau de valeurs

Voici la première question que nous avons posée aux enseignants :

1. a. Définissez-vous explicitement ce qu'est un tableau de valeurs a vos élèves ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

b. Indépendamment des programmes actuels, quelle est votre propre définition (conception) du tableau de valeurs ?

La plupart des enseignants pensent que cet objet ne nécessite pas de définition puisque les élèves le connaissent et l'utilisent déjà. Ils jugent en général qu'une définition explicite ne fait qu'alourdir le cours ou qu'ils introduisent cet objet à partir d'un exemple. Il semble pour eux que les connaissances sur les tableaux de valeurs sont peu importantes, voire transparentes, et donc qu'elles n'ont pas à être explicitées.

Quant à leurs propres définitions, on constate qu'elles diffèrent de façon importante et qu'on trouve certains éléments du contrat de la classe. On peut les classer ainsi: environ un tiers des enseignants précisent que le tableau de valeurs est un résumé de quelques valeurs et de leurs images sans choix sur la variable (huit enseignants), alors que pour six enseignants, le tableau de valeurs est soumis à des contraintes sur le choix de la variable (pas, valeurs particulières, etc.). De plus, pour deux autres enseignants, il est exhaustif de tous les couples (x, f(x)). Enfin six enseignants ne précisent pas de définition en répondant « aucun intérêt » ou ne répondent rien.

Quant au rôle du tableau de valeurs, la plupart des enseignants sont d'accord sur le fait qu'il aide à tracer la représentation graphique d'une fonction (trois enseignants précisent « tracer avec précision »). Les représentations des enseignants sur l'objet tableau de valeurs diffèrent donc assez largement, ce qui a certainement des conséquences sur les pratiques en classe, sur le choix des exercices et les réponses attendues des élèves. En revanche, les enseignants considèrent massivement que cet objet est, d'une part peu problématique pour les élèves, et, d'autre part, très lié au registre graphique. On peut donc penser qu'ils auront du mal à l'associer à d'autres types de tâches.

Les avis des enseignants sur une question que les élèves ont eu à faire dans leur questionnaire

Voici la deuxième question qui est l'une des questions posées aux élèves dans leur questionnaire. Il s'agit d'un traitement dans le registre tableau de valeurs.

2. Voici un exercice de Seconde :

« *Soit une fonction définie sur l'intervalle [-2 ; 14] dont on connait les valeurs suivantes :*

x	-2	3	8	14
f(x)	-7	41	7	34

- *Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquez.*
- *Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquez*. »

a. Donnez un corrigé de cet exercice.

b. Poseriez-vous cet exercice à vos élèves de Seconde ? Explicitez vos raisons.

c. Si vous le posiez à des élèves, l'envisageriez-vous comme un exercice (d'introduction, d'entrainement, de réinvestissement, une partie d'un DS[3], une partie d'un DM[4], autres,…)

d. Quelles seraient, selon vous, les principales difficultés qu'un élève de Seconde pourrait rencontrer dans la résolution de cet exercice ?

[3] DS: Devoir Surveillé (c'est-à-dire fait en classe et évalué)
[4] DM:Devoir à la Maison (travail donné à faire à la maison, qui peut ou non donner lieu à une évaluation).

Nous avons obtenu différents types de réponses pour cette questionnaire et nous donnons en détailles question par question.

Question a

18 enseignants disent qu'on ne peut pas répondre à ces questions. Deux d'entre eux n'utilisent aucun argument dans leur réponse. Voici les arguments utilisés par les autres :

- 5 donnent un contre-exemple à partir d'une représentation graphique.
- 3 donnent un contre-exemple à partir d'un tableau de variations et un autre précise qu'on a besoin d'un tableau de variations pour répondre à cette question.
- 5 précisent qu'il faut connaître le sens de variation de *f* sur cet intervalle.
- 1 enseignant donne un contre exemple numérique.

Ainsi, la plupart des enseignants, pour répondre à cette question, passent soit au registre graphique, soit au tableau de variations. Seul un enseignant donne un contre exemple numérique. Ceci nous montre que même si les enseignants ont des connaissances sur le tableau de valeurs, celles-ci sont vraiment liées aux autres registres.

Notons que deux enseignants répondent -7 et 41, un sans ajouter d'autre explication et l'autre en traçant un tableau de variations compatible avec le tableau de valeurs donné. Ils ne paraissent donc pas avoir vu le problème, ce qui explique qu'ils jugent l'intérêt de cet exercice quasi nul et qu'une lecture graphique ou un tableau de variations serait plus intéressant pour chercher les extrema d'une fonction. Ils déclarent ainsi qu'ils ne poseraient pas cet exercice dans leur classe.

Question b

8 enseignants répondent qu'ils ne poseraient pas cet exercice dans leur classe, Deux d'entre eux ne donnent aucune raison et les autres disent qu'il y a trop de connaissances sur la notion de variation qui sont exigées ou alors qu'il y a trop de possibilités qui déstabilisent les élèves. Certains arrivent même à dire que son intérêt

est quasi nul et qu'il donne des idées fausses. Deux enseignants ne se prononcent pas et proposent de faire un changement dans les valeurs du tableau et ils préfèrent un tableau complet avec toutes les valeurs entières.

Les autres déclarent qu'ils poseraient cet exercice dans leur classe. Ils donnent, en général, deux types de raison : montrer l'intérêt d'un tableau de variations et montrer les limites d'un tableau de valeurs et en particulier que la connaissance de quelques images constitue une information très partielle de la fonction.

Finalement, les réponses sont très partagées sur cet exercice, ce qui montre qu'il ne fait certainement partie de leur pratique de la classe de 2nde, ce qui est confirmé par les réponses à la question suivante.

Question c

Ceux qui n'envisagent pas à poser cet exercice dans leur classe ne répondent pas à cette question. La réponse « une partie d'un devoir maison » est apparue par 9 enseignants. Les réponses « un exercice de réinvestissement » et « un exercice d'entraînement » sont apparues, chacune, par 4 enseignants en enfin la réponse « un exercice d'introduction » est apparue par 3 enseignants.

Finalement, la plupart des enseignants envisage cet exercice comme une partie d'un devoir maison, il est plutôt considéré comme un exercice de recherche et est renvoyé au travail personnel des élèves.

Question d

5 enseignants n'ont pas donné une réponse à cette question. Voici les autres réponses qui prévoient les éventuelles difficultés des élèves de Seconde :

TABLEAU 1

Eventuelles difficultés prévues des élèves par les enseignants

Les difficultés des élèves selon les enseignants	**ΣP**
Les élèves ne prennent en compte que les valeurs du tableau, d’où -7 et 41	9
Le tableau de valeurs se transformerait immédiatement en tableau de variations	3
Ne penser qu’à une fonction affine par morceaux	2
Certains élèves confondent plus petite valeur avec son image, d’où -7 et 34	1

(P : enseignant)

Ce tableau montre que les enseignants sont conscientes sur le fait que leur rapport personnel est différent de celui des élèves sur l’utilisation (ou la connaissance) du tableau de valeurs.

En conclusion, nous constatons que cet exercice ouvert qui n’a pas une solution numérique ou unique mais qui a pour but de faire discuter les élèves n’est pas considéré par les enseignants comme conforme au rapport institutionnel. On peut donner deux types de raisons à cela : les connaissances mathématiques des enseignants ne leurs permettent pas d’envisager cette question ou bien le contrat de la classe ne permet pas d’avoir des exercices avec des réponses aussi ouvertes. On a vu que cet exercice est majoritairement rejeté et que s’il est accepté c’est comme partie d’un devoir à la maison, c'est-à-dire en dehors de la responsabilité du professeur.

Questionnaire des élèves

Question 1

Elle concerne le changement du registre tableau de valeurs vers le registre graphique. A partir d'un tableau de valeurs, on demande à l'élève de donner une courbe possible (1a), puis on lui demande s'il en existe d'autres (1b). Nous avons choisi de donner un tableau de valeurs classique (toutes les valeurs entières de x, pas constant, intervalle symétrique par rapport à O, cinq valeurs, valeurs de f(x) entières). De plus, les valeurs de f(x) sont toutes dans un ordre croissant, et peuvent même représenter une fonction affine (f(x) = 2x - 1). Ce choix rend la question a) particulièrement simple. Voici la question :

1. Soit une fonction f définie sur l'intervalle [-2 ; 2] dont on connaît les valeurs suivantes,

x	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*
f(x)	*-5*	*-3*	*-1*	*1*	*3*

a. Tracer une représentation graphique possible pour f.

b. Est-ce qu'on pourrait en tracer une autre ? Si oui, laquelle ? Si non, expliquer.

Pour la question a) 83% des élèves répondent correctement et que tous donnent comme réponse la droite représentant la fonction f(x) = 2x-1, sans citer cette fonction ni essayer de la déterminer. Ce pourcentage de réussite important montre que cette tâche est très classique et les élèves ont l'habitude de la faire depuis la 3ème du collège pour l'étude de la fonction affine. 13% des élèves montrent qu'ils ont des difficultés sur l'utilisation d'un repère ou dans la lecture des coordonnées dans le tableau de valeurs. Ainsi, ils ne tracent pas une droite. Il n'est pas certain que ces élèves commettent une erreur de conversion de registre, leur difficulté peut n'être liée qu'à une difficulté de traitement dans l'un des deux registres.

Seuls 3 élèves ne prennent en compte que deux couples de valeurs et tracent un segment à partir de ces deux points (d'après les traces sur la feuille). Ceci peut être accentué par le modèle de la fonction affine qui est suffisamment prégnant.

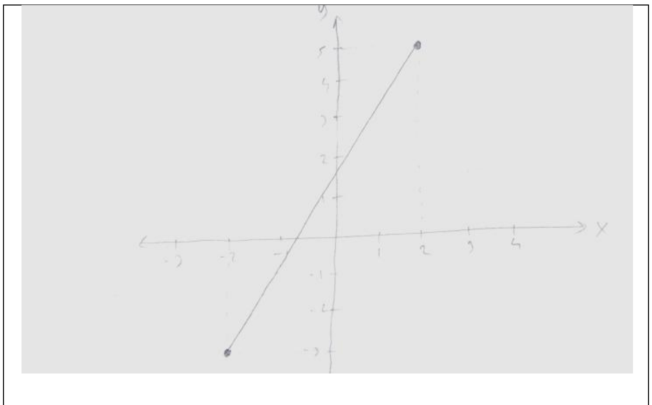


Figure 1 : La réponse d'un élève pour la question 1a.

Pour la question b) 28 élèves seulement (11%) ont pu donner une autre représentation graphique. Remarquons que dans tous les cas, la représentation donnée est celle d'une fonction croissante : ils la tracent en faisant des virages autour des points donnés. Puisqu'ils n'ont étudié jusque-là, que les fonctions affines, carrée et inverse, il leur est certainement difficile de voir une fonction « atypique » qui changerait plusieurs fois de sens.

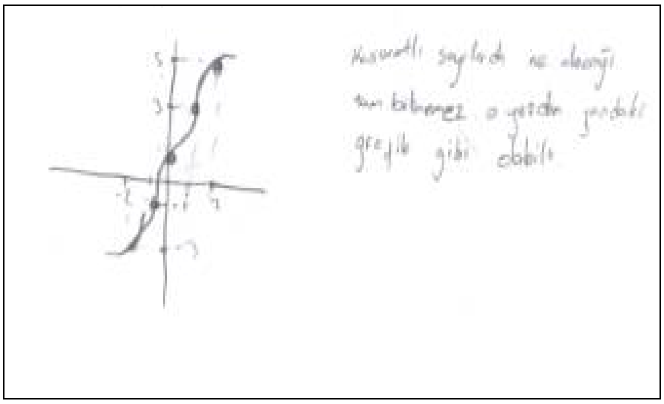


Figure 2 : La réponse d'un élève pour la question 1b.

7 élèves (3%) qui avaient aussi donné la bonne réponse à la question a), précisent que la fonction peut varier entre deux valeurs du tableau mais qu'il faut connaître d'autres points. Ces élèves ont une conception correcte du tableau de valeurs, mais ils n'ont pas encore une maîtrise suffisante de la représentation graphique pour répondre correctement ou, ils ne se donnent pas le droit d'«inventer » des variations.

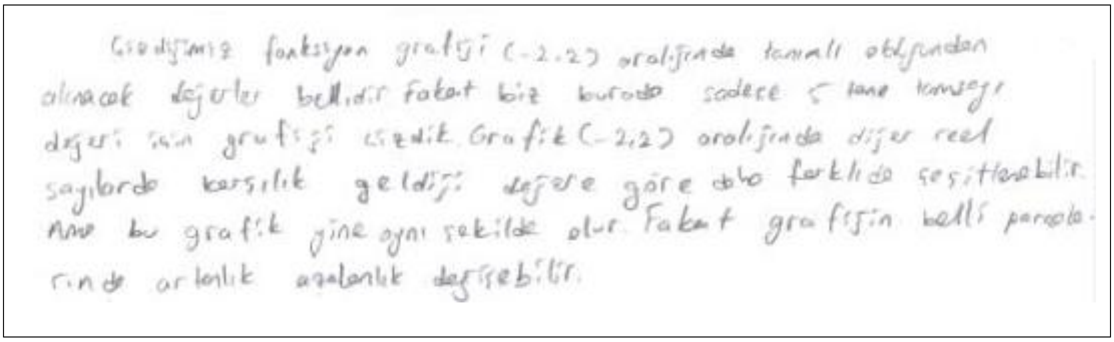


Figure 3 : La réponse d'un élève pour la question 1b.

48 élèves (19%) donnent la réponse du type "non, car il n'y a qu'une seule droite qui correspond à ce tableau" (45 élèves) ou "non car sur l'intervalle [-2; 2], la courbe n'a pas de variation, elle n'est que croissante" (3 élèves). Tous ces élèves ont

donné la bonne réponse à la première question. Ces élèves n'arrivent pas à imaginer un comportement « atypique » entre deux valeurs successives du tableau de valeurs. On peut dire qu'ils ont l'habitude de voir ces types de tableaux (avec toutes les valeurs entières et la proportionnalité) et qu'ils se bloquent sur la fonction affine.

Enfin 103 élèves (40%) donnent la réponse du type "non, car x a pour seule image f(x)" (leurs réponses à la question précédente sont variées). Ces élèves peuvent avoir été influencés par l'insistance, en début de seconde, faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x données. Une autre difficulté qu'on peut supposer pour ces élèves, viendrait de ce que la forme de la question posée est hors contrat dans l'étude de la notion de fonction, puisqu'ils ont l'habitude de tracer une seule représentation graphique à partir d'un tableau de valeurs dans le contrat classique.

Au total 171 élèves (66%) n'envisagent pas qu'il puisse y avoir une autre représentation graphique correspondante au tableau de valeurs. Ce pourcentage élevé montre que même si la conversion d'un tableau de valeurs à une courbe est globalement acquise, les élèves ont en majorité une compétence technique qui ne semble pas être soutenue par une conceptualisation suffisante du lien entre les deux registres.

Question 2

Cette question ne comporte pas de changement de registre explicite et a priori n'en nécessite pas. Il s'agit d'un traitement dans le registre tableau de valeurs. On demande à l'élève de donner la plus grande et la plus petite valeur prises par la fonction connue par un tableau de valeurs. L'analyse des réponses des enseignants sur cette question montre qu'elle ne fait pas réellement partie du rapport institutionnel de la classe de 2^{nde} puisque le contrat de la classe ne permet pas d'avoir des exercices avec des réponses aussi ouvertes. Dans ce sens, on peut considérer cette question comme peu habituelle, voire hors contrat. Nous avons posé cette question en deux versions pour éviter que deux élèves côte à côte ne copient l'un sur l'autre. De fait, cette dualité de questionnaires nous a permis de proposer quelques variations sur les caractéristiques du tableau donné ; Pour la question 2A, nous avons choisi de donner un tableau de valeurs qui comporte certaines valeurs entières de la variable, alors que dans le deuxième cas (question 2B), le tableau de valeurs proposé est « complet » au sens où toutes les valeurs entières de la variable sont prises en compte, de plus, il y a un pas régulier, ses valeurs sont symétriques par rapport à l'origine.

Voici les deux versions de cette question :

2A. *Soit une fonction g définie sur l'intervalle [-2 ; 14] dont on connaît les valeurs suivantes,*

x	*-2*	*3*	*8*	*14*
g(x)	*-7*	*41*	*7*	*34*

Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14]? Expliquer.

Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-2 ; 14] ? Expliquer.

2B. *Soit une fonction g définie sur l'intervalle [-4 ; 4] dont on connaît les valeurs suivantes*

x	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*
g(x)	*-1*	*0*	*7,5*	*-1*	*-2*	*2*	*6*	*8*	*9*

Quelle est, à votre avis, la plus grande valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4]? Expliquer.

Quelle est, à votre avis, la plus petite valeur prise par g sur l'intervalle [-4 ; 4]? Expliquer.

24 élèves (9%) seulement au total envisagent qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau de valeurs ou ils disent qu'on ne peut pas connaître les extrema d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs.

Nous constatons, par contre, qu'il y a un écart important entre les réponses des deux questionnaires : 14% des élèves ont répondu dans cette catégorie pour la question 2A, contre seulement 5%, pour la question 2B. Ceci laisse penser que la forme du tableau de valeurs donnée est une variable importante pour certains élèves (dans le premier cas on a donné certains valeurs entières de l'intervalle de définition, par contre, dans le deuxième cas on a donné toutes les valeurs entières).

La plupart des élèves répondent en restant dans les limites des valeurs du tableau: 56% au total (68 élèves) pour la question 2A et 60% (78 élèves) pour 2B. Leurs réponses aux questions 1b sont variées et même 8 d'entre eux arrivent à donner une réponse correcte à ces questions (une autre représentation graphique).

Enfin nous constatons qu'un nombre important d'élèves (28% au total - 74 élèves) donnent comme réponse la plus grande et la plus petite de toutes les valeurs des deux lignes du tableau en disant « car c'est la plus grande/petite valeur dans les deux lignes du tableau ». Comme nous l'avons déjà dit, on peut considérer ces questions comme peu habituelles dans le contrat classique de la classe de seconde, donc ces élèves peuvent avoir été perturbés par la nouveauté de cette tâche.

Nous examinons maintenant en détail les réponses du type « l'élève envisage qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau » et du type « l'élève ne sort pas des valeurs du tableau, mais a une vision correcte de la notion d'extremum dans cette limite ».

TABLEAU 2

Ceux qui envisagent qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau

Types de réponse	**ΣE (2A)**	**ΣE (2B)**
L'élève donne une réponse dans les valeurs du tableau en précisant quand même qu'on ne peut pas savoir s'il y avait une plus grande/petite valeur. Ils donnet alors une réponse du type "*la plus grande/petite valeur est inconnue car on ne sait pas la variation de la fonction. Mais, dans le tableau, la plus grande/petite valeur est –7/41 (question A) ou -2/9 (question B)*"	8	3
L'élève donne une reponse du type " *on ne peut pas savoir, car il nous manque des valeurs*" et s'arrête à cette justification	5	4
L'élève donne une reponse du type « *on ne peut pas savoir, car il nous manque des valeurs.* » et rajoute un argument plus convaincant du type : « *la fonction peut varier entre deux valeurs du tableau* » et aller jusqu'à donner un contre-exemple numérique (*par exemple, f(9) peut être inférieur à –7*)	4	-
L'élève donne une reponse du type « on ne peut pas savoir, car on ne sait pas comment varie la fonction. » en illustrant sur un contre-exemple à partir d'une courbe	1	-

(E : élève)

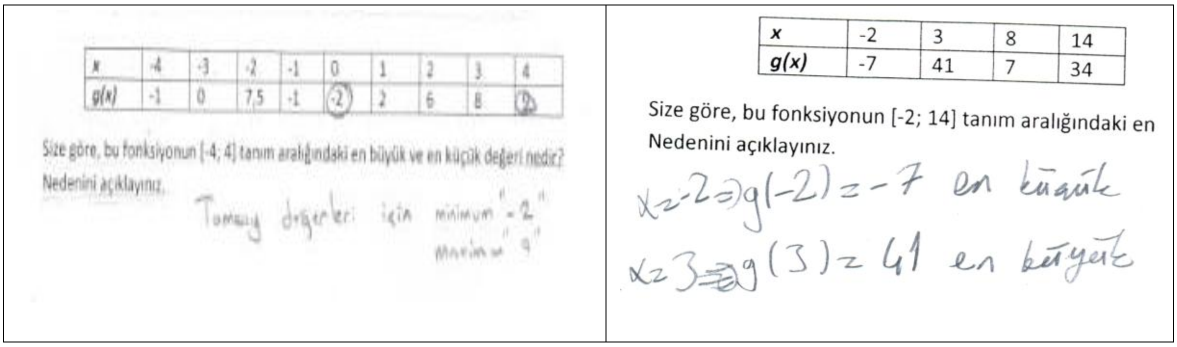
Nous pouvons dire, à partir de ce tableau, que dans cette catégorie de réponse, même si les élèves ont compris qu'un tableau de valeurs ne donne que des informations partielles sur la fonction, ils ont plutôt tendance à donner une réponse numérique. Ceci montre certainement un effet de contrat qui consiste à dire qu'en mathématiques la réponse « on ne peut pas savoir » ne peut pas être considérée comme une réponse valide. Nous constatons, en autre, qu'aucun élève n'a essayé d'utiliser le tableau de variations comme contre exemple, et que le registre graphique n'est, quant à lui, utilisé qu'une seule fois.

TABLEAU 3

Ceux qui restent dans les limites des valeurs du tableau

Types de réponse	**2A**	**2B**
L'élève répond en ne comparant que les valeurs du tableau. Il donne donc une réponse du type : « car c'est la plus grande/petite valeur dans le tableau » ou « car c'est la plus grande/petite valeur dans le ligne de la fonction»	31	36
L'élève trace une représentation graphique ou il utilise un argument du type « car la courbe passe par ces points" ou "le point la plus bas/haut de la droite ».	18	19
L'élève utilise un argument sur les variations, comme «on remonte à … puis l'on redescend à … »	9	2
L'élève donne cette réponse sans explication	10	21

L'argument le plus utilisé par les élèves, dans les deux cas, est celui de type « car c'est la plus grande/petite valeur dans le tableau » (au total 67 élèves – 26%). Pour cet argument, nous ne pouvons pas déterminer les raisonnements de ces élèves puisqu'il n'y a pas d'autre trace dans leurs copies : ils peuvent très bien ne comparer que les valeurs de la fonction dans le tableau de valeurs (dans ce cas-là, les élèves n'ont pas compris la question en tant que la recherche des extrema d'une fonction, mais plutôt la recherche de la plus grande/petite valeur du tableau) ou ils peuvent passer mentalement d'abord à un autre registre puis donner cette réponse.



x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
g(x)	-1	0	7,5	-1	-2	2	6	8	9

Size göre, bu fonksiyonun [-4; 4] tanım aralığındaki en büyük ve en küçük değeri nedir? Nedenini açıklayınız.

Tamsayı değerleri için minimum "-2" maximum "9"

x	-2	3	8	14
g(x)	-7	41	7	34

Size göre, bu fonksiyonun [-2; 14] tanım aralığındaki en Nedenini açıklayınız.

x=-2 ⇒ g(-2) = -7 en küçük
x=3 ⇒ g(3) = 41 en büyük

Figure 4 : La réponse de différents élèves pour la question 2.

Par contre nous avons constaté que 48 élèves au total (21%) donnent une réponse dans cette catégorie en utilisant le registre graphique (soit ils tracent une courbe soit ils utilisent des arguments du registre graphique). Nous pouvons en outre souligner, comme dans la réponse du type « ceux qui envisagent qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau», l'absence de justification se basant l'utilisation du tableau de variations.

Question 3

Elle concerne le traitement d'un tableau de valeurs dans un contexte de la vie courante. On donne les valeurs de deux actions au premier jour de chaque mois, pendant six mois. A partir de ces seules informations, on demande alors à l'élève de dire si les deux valeurs peuvent être égales à un moment donné et, si oui, quand. Ici, le point essentiel consiste à voir qu'il y a au moins un croisement des valeurs (en supposant un changement continu des valeurs dans la période). L'élève peut alors aller jusqu'à dire que ce changement est certain mais qu'il peut y en avoir d'autres sachant qu'entre deux dates du tableau tout est possible. Enfin si l'élève en reste à un modèle discret il ne verra pas la possibilité d'égalité des deux valeurs.

Voici la question :

3. *Le tableau ci-dessous donne les cours, en euros, de deux actions au premier semestre 2009 (valeurs de l'action à l'ouverture de la bourse le premier jour ouvrable de chaque mois).*

mois / action	janvier	février	mars	avril	mai	juin
A	12,18	12,41	10,27	11,05	9,95	10,51
B	9,61	8,87	11,78	13,49	11,78	10,89

A votre avis, est-ce qu'il est possible qu'à un moment donné les cours de ces deux actions aient été identiques ? Si oui, combien de fois ? et quand ? Si non, expliquer.

Pour ces questions, pendant l'expérimentation, un élève nous a demandé « ça veut dire quoi les cours d'une action ? ». Par contre, aucun élève n'a posé de question sur la continuité des valeurs des actions dans la période ! Voici la répartition des réponses des 260 élèves :

TABLEAU 4

Répartition des réponses des 260 élèves pour cette question

Types des réponse		
les réponses qui consistent à utiliser le croisement des valeurs	46	6
les réponses qui consistent à rendre compte du contexte de la bourse	4	
les réponses qui consistent à voir seulement les valeurs du tableau	31	2
les autres types de réponses	5	0
Sans réponse	4	3

La plupart des élèves donnent une réponse du type consistant à utiliser le croisement des valeurs. Voici l'une d'entre eux :

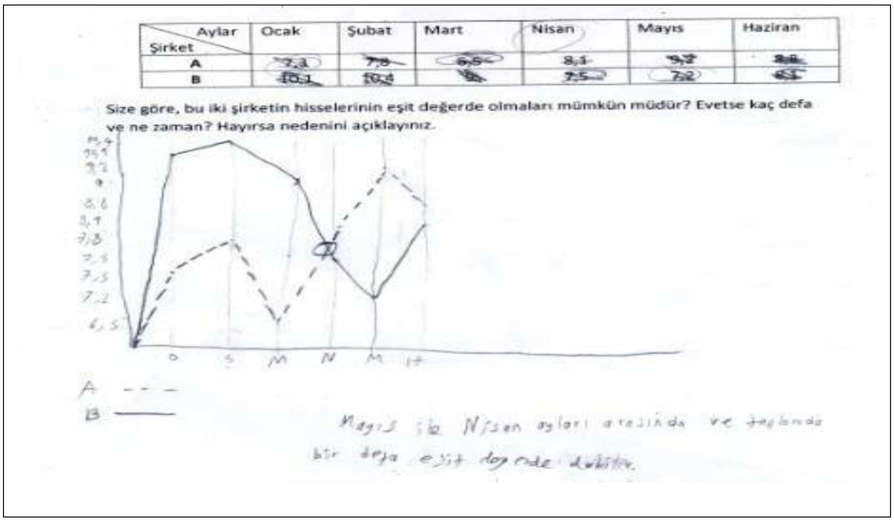


Figure 5 : La réponse d'un élève pour la question 3.

Voici en détail les arguments utilisés par les élèves dans cette catégorie : 13% des élèves donnent une réponse dans cette catégorie sans préciser une justification. Pourtant 21% des élèves tracent deux courbes « lisses » correspondant aux valeurs du tableau ou ils donnent des réponses du type « si on trace leur courbe, elles vont se croiser à cette date » sans les tracer (représentation mentale). 18% des élèvent utilisent le changement de sens des valeurs des actions pour donner cette réponse. Ils donnent alors des réponses du type « car on s'aperçoit que les valeurs de A sont supérieures à celles de B durant janvier et février puis à partir de mars, les valeurs de A sont inférieures aux valeurs de B ».

Nous constatons que seulement 9% des élèves utilisent des arguments qui sont liés au contexte de la bourse : 18 élèves donnent une réponse du type « Oui, autant de fois, car elles peuvent forcément augmenter ou diminuer d'un jour à l'autre. Mais on ne peut pas déterminer quand et combien de fois». 6 élèves donnent des réponses non pertinentes du type « Non, ce n'est pas possible car les actions dépendent de l'offre de la demande. Il y a une seule exception s'il y a la même demande et la même offre pour les deux actions ». De plus, 10% des élèves ne voient que des valeurs du tableau. Donc, le contexte dans lequel le tableau de valeurs est donné n'a pas beaucoup d'influence sur la résolution.

Enfin seulement 4% des élèves (11 élèves sur 260) montrent qu'ils ont une connaissance fine de la partialité des informations données par un tableau de valeurs.

Expérimentation dans les classes de Terminale

Question 1

Tous les élèves répondent correctement à la question 1a sans difficulté et la plupart d'entre eux tracent une droite. Pour la question 1b, les élèves ont beaucoup de difficultés à répondre correctement : Seule la section de S se trouve au-dessus de la 2nde (46% contre 11% en 2nde). Ceux qui tracent une autre représentation graphique tracent en général la courbe d'une fonction croissante, même si, arrivés en Terminales, on ne puisse douter qu'ils aient déjà rencontré des fonctions qui peuvent changer de sens entre deux valeurs entières successives.

Remarquons que la moitié des élèves de ES donnent une réponse du type «non, car il n'y a qu'une seule droite qui correspond à ce tableau » (contre 18% en 2nde). La plupart d'entre eux essaient même de trouver l'expression algébrique de la fonction (f(x)= 2x – 1). Ceci confirme finalement que même si le programme de 2nde demande de sortir la fonction du tout algébrique et propose d'utiliser d'autres modes de représentation (Yavuz, 2005), dans les classes ultérieures, la fonction est présentée plutôt algébriquement.

En outre, il y a une diminution du taux de réponses du type « non, car x a pour seule image f(x) » (28% en moyenne contre 40% en Seconde). On constate ainsi une diminution de l'influence de l'insistance en début de Seconde faite sur l'unicité de l'image pour une valeur de x donnée.

Question 2A

12 élèves (43%) de S envisagent qu'il peut y avoir d'autres valeurs hors du tableau de valeurs ou ils disent qu'on ne peut pas connaître les extrema d'une fonction à partir d'un tableau de valeurs contre 4 élèves (14%) de ES pour la question 2A. On constate ainsi une augmentation de réussite par rapport au classe de 2nde pour les classes de S, alors qu'il est stable pour les classes de ES (14% pour la 2nde).

Dans les deux sections, la plupart des élèves répondent en restant dans les limites des valeurs du tableau: 54% pour la section S et 66% pour la section ES (contre 52% pour la 2nde).

En outre, 4 élèves (14%) de ES, en restant dans les limites des valeurs du tableau, donnent comme plus grande et plus petite valeurs, les valeurs prises par la fonction aux bornes de l'intervalle. Ils donnent ainsi la première et la dernière valeur de la deuxième ligne du tableau. Certains d'entre eux donnent également les bornes elles-mêmes comme réponse. Rappelons qu'en seconde le pourcentage était de 18%. Il y a donc amélioration, mais on ne peut pas dire que le problème ait été résolu.

Question 2B

On constate une diminution de la réponse exacte par rapport à la question 2A dans les deux sections (27% pour S contre 5% pour la 2nde). En plus, dans la section de ES, aucun élève n'a donné la réponse exacte. Ceci nous montre que les élèves continuent à croire qu'un tableau de valeurs complet comporte les valeurs remarquables d'une fonction et la forme du tableau de valeurs continue à influencer la solution.

Notons que dans les deux sections, la plupart de ceux qui donnent une réponse correcte, utilise le registre graphique ou un argument sur la connaissance du tableau de valeurs (entre deux valeurs du tableau, la fonction peut changer du sens,…) ; on peut voir également que certains d'entre eux utilisent aussi un tableau de variations comme un contre-exemple, ce qui n'est pas le cas en 2nde. On voit donc là un effet de nouveaux apprentissages pertinents.

Question 3

Comme les élèves de 2nde, la plupart des élèves donnent une réponse du type consistant à utiliser le croisement des valeurs : 33 élèves (61%) pour la section S et 35 élèves (62%) pour la section ES contre 56% pour la 2nde. Ajoutons également que la plupart d'entre eux précisent, après avoir utilisé le croisement des valeurs, que les valeurs de deux actions peuvent augmenter ou diminuer tout le temps et qu'elles peuvent se croiser à n'importe quel autre moment.

17 élèves de S (31%) et 4 élèves de ES (7%) rendent compte seulement du contexte de la bourse sans utiliser le croisement des valeurs. Nous constatons donc que l'influence du contexte dans lequel le tableau de valeurs est donné est plus forte dans les classes de Terminale que dans les classes de 2nde et visiblement plus en S qu'en ES, ce qui est surprenant.

Remarquons également, que le pourcentage d'élèves de ES répondant faux ou pas du tout est relativement élevé (32%). Ils s'appuient soit seulement sur les valeurs du tableau en les comparants, soit ils se contentent de valeurs très rapprochées l'une de l'autre ou bien ils utilisent des arguments de proportionnalité entre les valeurs du tableau. En S par contre, il n'y a pas de non réponses ou de réponses vraiment erronées, même si les justifications ne sont pas toujours suffisantes.

CONCLUSION

Ces travaux et nos analyses a permis de mettre en évidence la difficulté qu'il y a à faire vivre effectivement dans les classes les injonctions du programme qui est en rupture avec des pratiques bien installées dans la culture mathématique. Dans ce qui ressort de notre questionnaire des pratiques des enseignants, on constate que peu d'activités sont proposées aux élèves pour les faire réfléchir sur le rapport qui existe entre une courbe et un tableau de valeurs et sur la représentativité d'une fonction qu'ils permettent. Le tableau de valeurs apparaît avant tout comme un outil pour travailler les notions d'images et d'antécédents et pour tracer des courbes. Son usage peut paraître simple et donc les règles de son utilisation restent implicites dans l'enseignement. Il n'y a pas donc de travail propre sur les connaissances relevant du registre tableau dans les classes.

Deux facteurs peuvent expliquer cet état de fait. D'une part, la contrainte qu'imposent, de façon plus ou moins implicite, les représentations dominantes de ce qu'est l'activité mathématique dans l'institution scolaire, rend certaines ruptures difficiles voire impossibles. Ceci est d'autant plus fort dans le cas d'enseignants qui enseignent depuis longtemps, pour lesquels, par exemple, le registre algébrique est dominant pour traiter de problèmes où interviennent des fonctions. D'autre part, les enseignants n'ont peut-être pas pris pleinement conscience que l'utilisation de différents registres et plus particulièrement la conversion entre différents registres sont importantes pour la compréhension de la notion de fonction. Ainsi, même s'ils mettent en place en début de chapitre des activités novatrices jouant sur différents registres, celles-ci restent souvent sans écho dans la suite de leur enseignement. Ce travail nous ont permis aussi de constater que les tableaux de valeurs et même les graphiques ne vont pas sans poser des difficultés aux élèves et ne représentent peut être pas les accès les plus adéquats vers la notion de fonction. En effet, avant la seconde, les élèves ont déjà construit pour les tableaux de valeurs et les courbes ainsi que les liens qui les unissent, des connaissances en acte dans des contextes variés, sans liens direct avec les fonctions, qui peuvent se poser en obstacle à la notion de fonction. Ces résultats confirment et renforcent les conclusions déjà obtenues par d'autres auteurs essentiellement à propos des courbes (Coppé, Dorier & Yavuz, 2006, Yavuz, 2005, Bloch, 2002 et 2003, Chauvat, 1999, Schneider, 1994, …).

L'expérimentation que nous avons faite dans les classes de Terminale montre que, même s'il y a une légère amélioration par rapport aux classes de Seconde dans les classes de Terminale S, celle-ci est très peu visible dans les classes de ES5. Il semble donc que la plupart des élèves gardent leurs connaissances privées sur ces objets depuis la classe de Seconde et que les erreurs persistent encore. En outre, il apparaît que l'illusion d'unicité et d'exhaustivité de la représentation quand le tableau de valeurs est « complet » est renforcée. Il semble donc que la représentation par un tableau de valeurs soit de plus en plus normative au fur et mesure qu'on avance dans les classes de Lycée. De même, la référence au registre algébrique dans une tâche où celui n'est pas a priori pertinent est plus forte chez les élèves de Terminale. Ceci s'explique naturellement par l'accroissement du travail algébrique fait dans les classes de Première et de Terminale.

[5] La section S est la section Scientifique, la section ES est celle d'Economie et Sciences Sociales.

Plus généralement, ces travaux et nos analyses nous interrogent sur les limites de la théorie de Duval, quant à l'importance accordée aux tâches de conversion indépendamment d'autres caractéristiques qu'elles pourraient avoir. En effet, si l'on considère le type de tâches suivant, que l'on trouve fréquemment dans les manuels « donner un tableau de valeurs d'une fonction dont on ne connaît que la courbe ». Il s'agit bien d'une tâche de conversion entre les registres numérique et graphique. Or les connaissances mobilisées par les élèves pour résoudre cet exercice peuvent se limiter à savoir lire des coordonnées de points dans un repère et à les reporter dans un tableau. Ceci peut se faire indépendamment de la compréhension de ce qu'est une fonction. En revanche, le type de tâches « tracer plusieurs courbes à partir d'un tableau de valeurs » nécessite de mobiliser des connaissances sur les fonctions qui dépassent le seul fonctionnement de chaque registre et de leurs liens. De même certaines tâches de traitement supposent des connaissances plus ou moins importantes sur la notion de fonction. Ainsi « à partir d'un tableau de valeurs d'une fonction f, donner un tableau de valeurs de la fonction f2 » est bien une tâche de traitement dans le registre numérique qui peut se faire sans mobiliser des connaissances spécifiques sur les fonctions alors que la tâche consistant à donner le maximum d'une fonction dont on ne connaît qu'un tableau de valeurs est également une tâche de traitement qui suppose des connaissances sur les fonctions qui dépassent le seul registre numérique. Elle ne peut être correctement appréhendée sans prendre en compte l'idée du continu avec ou sans appui sur un autre registre.

Les conversions entre les registres de représentation sémiotique ne semblent donc pas suffisantes pour accéder au concept de fonction. Plus précisément, l'organisation mathématique à l'oeuvre en seconde dans le chapitre des généralités sur les fonctions ne permet pas une conceptualisation suffisante de la notion de fonction, malgré un accent important sur la prise en compte des différents registres de représentation sémiotique et particulièrement sur les conversions entre eux. Une des difficultés vient de ce que les registres en jeu n'interviennent pas sur un d'égalité et donc ne peuvent interagir de façon suffisante. Enfin, la faiblesse des compétences des élèves dans le registre algébrique reste un problème qui limite la pertinence des conversions possibles.

Cependant, il nous semble que l'importance accrue de la statistique, l'usage des calculatrices graphiques et la nécessité d'ouvrir les mathématiques sur les autres disciplines et le monde extérieur sont autant de facteurs qui doivent nous conduire à nous interroger sur la nécessité de faire travailler les élèves sur les différents modes de représentation des fonctions, y compris pour les élèves qui ne poursuivront pas des études scientifiques. Or, pour ceux-ci il y a certainement matière à repenser par ailleurs les exigences sur le contenu mathématique plus traditionnel. Dans ce sens, la tentative de changement dans les programmes pouvait sembler attrayante. On en a vu les limites. Il n'en reste pas moins que notre étude montre aussi que des questions de conversion entre registres peuvent conduire à des réflexions importantes sur la non-univocité des représentations. C'est une porte qui s'ouvre sur la prise en compte des variations et la remise en cause du discret et du tracé point par point, ce qui représente un enjeu essentiel dans la conceptualisation de la notion de fonction. Une autre piste que nous n'avons fait qu'effleurer et qui nous semble peu prise en compte, concerne le rapport à des situations extra-mathématiques et à la modélisation par des fonctions. Il reste un travail important à faire dans ce sens.

REFERENCE

Artigue M. (1993). Enseignement de l'analyse et fonctions de référence. *Repères IREM*, *11*, 115-139.

Bloch I. (1999). L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu – Connaissances et savoirs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19(2)*, 135-193.

Bloch I. (2000). *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : connaissances, savoirs, et conditions relatives à la validation*, Bordeaux : Université de Bordeaux 1.

Bloch I. (2002). Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*, 58, 25-46.

Bloch I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu : what forms of knowledge enable students to conjecture and prove. *Educational Studies in Mathematics,* 52, 3-28.

Brousseau, G. (1984). The crucial role of the didactical contract in the analysis and construction of situations in teaching and learning mathematics. In H.-G. Steiner (Ed.), *Theory of mathematics education* (pp. 110–119). Bielefeld, Germany: Institut für Didaktikk der Mathematikk.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: Le milieu [The didactical contract: The milieu]. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *9*, 309–336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathematiques 1970–1990* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield, Eds. and Trans.). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Brousseau, G., & Otte, M. (1991). The fragility of knowledge. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 13–36). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer.

Chauvat G. (1999). Courbes et fonctions au collège. *Petit x*, *51*, 23-44.

Comin E. (2005). Variables et fonctions, du collège au lycée : méprise didactique ou quiproquo interinstitutionnel, *Petit x*, 67, 33- 61.

Coppe S., Dorier J.L., Yavuz I. (2006). Eléments d’analyse sur le programme de 200 concernant l’enseignement des fonctions en seconde. *Petit x*,71, 29-60.

Duval R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensé. *Annales de didactique et de Sciences Cognitives (*IREM de Strasbourg), 5, 37-65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Bern.

Hauchard C., Schneider M. (1996). Une approche heuristique de l’analyse. *Repères IREM*, 25, 35-62.

MEB. (2005). *Talim ve Terbiye Kurulu Baskanligi, Ortaöğretim Matematik Dersi Ögretim Programi*. Ankara: MEB Basimevi.

René De Cotret S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique*. Thèse de doctorat de l’Université du Québec à Montréal.

Rogalski J. (1984). Quelques éléments de théorie piagétienne et... didactique des Mathématiques. *Collection : Les cahiers de didactique,* 2. IREM de Paris7.

Schneider M. (1994). Aux confins de l’analyse et de la géométrie : un obstacle épistémologique, In Commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (ed) *Actes de la Quatrième Université d’Eté d’Histoire des Mathématiques* (pp.283-294), Lille : IREM de Lille.

Sierpinska A. (1992). On understanding the notion of function, in The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy, *Mathematical Association of America MAA Notes.* 25. 25-58*.*

Yavuz I. (2005). *Evolutions récentes de l’enseignement de la notion de fonction en France en classe de seconde. Utilisation des tableaux de valeurs et de variations.* Thèse de doctorat, Université Lumière - Lyon 2.

Submitted: October 2010

Accepted: December 2010