

A Resolução de Problemas Sobre Perímetro e Área: um Experimento de Ensino, Utilizando Problemas Propostos em Avaliações de Larga Escala

Problem Solving About Perimeter and Area: a Teaching Experiment, Using Problems Proposed In Large Scale Assessments

José Cícero dos Santos^{*a}; Ruy Cesar Pietropaolo^b; Angelica da Fontoura Garcia Silva^c

^aUniversidade de Pernambuco. PE, Brasil.

^bCentro Universitário Anhanguera de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. SP, Brasil

^cUniversidade Anhanguera Unopar, Programa de Pós-Graduação em Metodologias para o Ensino de Linguagens e suas Tecnologias. PR, Brasil

*E-mail: ciceroproformat_ba@hotmail.com

Resumo

Este artigo apresenta um recorte dos dados da pesquisa de doutorado do primeiro autor, cujo objetivo foi investigar se o ensino pautado nos pressupostos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática por meio da Resolução de Problemas favorece a construção, aprofundamento e ampliação da aprendizagem dos conceitos de perímetro e área. Para tanto, foi proposto a um grupo de estudantes da 3ª série do Ensino Médio, de uma escola pública do estado de São Paulo, a resolução de dois problemas, com características dos apresentados em avaliações de larga escala. Para analisar as respostas dos estudantes, apoia-se na perspectiva da mudança e jogo de quadros de Douady. Os resultados mostraram que os estudantes apresentaram diferentes heurísticas, ligadas a diferentes quadros – geométrico, numérico e algébrico – para resolverem o mesmo problema. As heurísticas apresentadas nas soluções evidenciaram que o contexto do problema não causou dificuldades de interpretação e não interferiu na mobilização de estratégias, ao contrário da natureza dos problemas. Este fato interferiu diretamente no trabalho com a mudança de quadros. Considerando que a natureza dos problemas da intervenção contemplou a interrelação de conceitos que poderiam pertencer a habilidades de quadros distintos, inferimos que os resultados denotaram certa insegurança dos estudantes para se lançarem à resolução de um problema quando era necessária ou adequada a mudança de quadro. Todavia, os estudantes desenvolveram a atitude de valorizar o trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação.

Palavras-chave: Ensino Médio. Resolução de Problemas. Heurística. Mudanças de Quadros.

Abstract

In this work we present an excerpt from Santos' doctoral research, the objective of which was to investigate whether teaching based on the assumptions of the Mathematics Teaching-Learning-Assessment methodology through Problem Solving favors the construction, deepening and expansion of learning the concepts of perimeter and area. To this end, a group of 3rd year high school students from a public school in the state of São Paulo were asked to solve two problems, with characteristics of those presented in large-scale assessments. To analyze the students' responses, we sought support from Douady's perspective of change and frame play. The results showed that students presented different heuristics, linked to different tables, to solve the same problem. The heuristics presented in the solutions showed that the context of the problem did not cause difficulties in interpretation and did not interfere in the mobilization of strategies, contrary to the nature of the problems. This fact directly interfered in the work with the change of staff. Considering that the nature of the intervention problems included the interrelationship of concepts that could belong to skills from different frameworks, we infer that the results denoted a certain insecurity on the part of the students to undertake the resolution of a problem when a change of framework was necessary or appropriate. However, students developed the attitude of valuing collective work, collaborating in the interpretation of problem situations, in the development of resolution strategies and in their validation.

Keywords: High School. Problem Solving. Heuristic. Frame Changes.

1 Introdução

O presente artigo discute parte dos dados obtidos em um experimento de ensino, desenvolvido para a tese de Doutorado do primeiro autor (Santos, 2021), que investigou suas contribuições ao promover reflexões compartilhadas de um grupo de estudantes do Ensino Médio sobre a Resolução de Problemas de perímetro e área envolvendo mudanças de quadros – geométrico, numérico e algébrico. Este artigo tem por objetivo apresentar e discutir as reflexões do grupo sobre dois dos problemas propostos.

A escolha dos objetos matemáticos para este artigo foi

impulsionada pela observância dos níveis de proficiência dos estudantes na resolução de problemas sobre área e perímetro em avaliações de larga escala, como as do SARESP (2019) – Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo.

2 Metodologia de Resolução de Problemas

A metodologia de ensino baseada na resolução de problemas é uma teoria rica em significados que potencializa o ensino e a aprendizagem da matemática. Como muitos elementos dessa teoria emergem apenas do trabalho prático em sala de aula, é necessário que o professor conheça esses elementos

e identifique suas características para avaliar os fenômenos emergentes. Nesta subseção, serão discutidos elementos que sustentam a metodologia de ensino baseada na resolução de problemas, conforme a perspectiva de alguns pesquisadores.

Para organizar o processo de resolução de problemas, Polya (1976), em seu livro “*How to Solve It*” (traduzido para o português como “A Arte de Resolver Problemas”), sugere que “resolver problemas é uma atividade humana fundamental. Na verdade, a maior parte do nosso pensamento consciente está preocupado com problemas” (Polya, 1976, p.221). Ele acrescenta que “resolver um problema é, essencialmente, encontrar a ligação entre os dados e o desconhecido” (Polya, 1945, p.182) e que “precisamos de uma certa quantidade de conhecimento previamente adquirido” (Polya, 1945, p.150) para resolver um problema.

O autor destaca a heurística que inclui os caminhos, gestos, falas, insights, descobertas e criatividade que surgem durante o desenvolvimento de uma estratégia. Polya (1976) argumenta que o raciocínio heurístico não é final e rigoroso, mas provisório e plausível, com o objetivo de descobrir uma estratégia para resolver um problema. A estratégia pode ser representada por um plano de ação através de um modelo matemático e pode ser ajustada ou rejeitada conforme necessário, o que garante que a heurística seja contínua no processo de resolução de problemas.

A análise de Polya (1976) destaca que a resolução de problemas é uma competência central para o desenvolvimento intelectual descrevendo quatro etapas de resolução de problemas, que, segundo ele, um indivíduo deve passar para resolver um problema, são elas: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e retrospecto. Sua estrutura facilita a abordagem sistemática de problemas e enfatiza a importância do conhecimento prévio e do processo heurístico. Isso sugere que, no ensino da matemática e em outras disciplinas, deve-se valorizar tanto a aquisição de conhecimentos fundamentais quanto o desenvolvimento de habilidades para aplicar esses conhecimentos de maneira criativa e eficiente na resolução de problemas.

Baseada nas etapas propostas por Polya e outros estudos da área, Onuchic (1999) desenvolveu a proposta metodológica “Ensino-Aprendizagem de Matemática” através da Resolução de Problemas. Esta proposta foi aprimorada por Allevalo e Vieira (2016) e renomeada como “Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas”.

De acordo com essa proposta de Allevalo e Vieira (2016), os estudantes devem ser organizados em grupos. O professor entrega um problema aos grupos e observa o trabalho desenvolvido, intermediando dúvidas e fazendo questionamentos e sugestões. Após a resolução, os resultados são registrados na lousa e

discutidos em plenária, mediada pelo professor. Finalmente, o professor formaliza os conceitos matemáticos envolvidos no problema, utilizando demonstrações e um vocabulário formal quando necessário.

2.1 Concepções teóricas de Régine Douady

Segundo Douady (1984) os conceitos matemáticos, antes de assumirem o *status* de objeto matemático, funcionam inicialmente como ferramentas implícitas e explícitas para resolver problemas. Quando o estudante utiliza um conceito matemático com intenções de resolver um problema, as ações por ele executadas, na perspectiva de Douady & Perrin-Glorian (1989, p.388, tradução nossa), possibilitam atribuir-lhe o caráter de ferramenta.

Um conceito é uma ferramenta quando nos interessamos no uso que está sendo feito dele para resolver um problema. A mesma ferramenta pode ser adaptada para resolver diferentes problemas, assim como, várias ferramentas podem ser adaptadas para resolver um único problema.¹

Os autores defendem que a ferramenta possui caráter de dualidade, ou seja, há dois tipos de ferramentas: a explícita e a implícita. A ferramenta explícita corresponde ao uso intencional que é feito de um conceito por parte do estudante para resolver um problema. Neste caso, ao trabalhar com um conceito, o estudante, a partir dos significados aprendidos do objeto matemático, o adapta para aquele novo contexto, desenvolve novos modelos, justifica o seu uso e controla os seus limites.

Por outro lado, quando o estudante adota um conceito, mas não sabe justificar e controlar os seus limites, neste caso, o conceito adotado passa a ser uma ferramenta implícita, pois o estudante apenas utiliza noções e técnicas para desenvolver estratégias, a partir de significados apreendidos, mas não consegue justificar o seu uso. Na ferramenta implícita, alguns conceitos, inerentes ao objeto matemático, ainda estão em construção e podem durar um certo tempo para serem desenvolvidos.

Douady (1984) afirma que um conceito é um objeto, quando é considerado o ponto de vista cultural, tendo seu lugar em um edifício mais amplo, num dado momento, reconhecido socialmente. Para Douady & Perrin-Glorian (1989, p.389, tradução nossa), o saber é constituído de objetos, uma vez que os objetos assumem o *status* de quadro, que

é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. Dois quadros podem conter os mesmos objetos e diferir pelas imagens mentais e problemáticas desenvolvidas².

1 un concept est outil lorsque l'intérêt est focalisé sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème ou poser des questions. Un même outil peut être adapté à plusieurs problèmes, plusieurs outils peuvent être adaptés à un même problème.

2 est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet associe à un moment donné à ces objets et ces relations. Nous admettons que les images mentales jouent un rôle important dans le fonctionnement comme outil, des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée

Reportando-nos a Educação Básica, concordamos que o ensino da matemática transita por vários quadros, tais como o quadro da aritmética, o quadro algébrico, o quadro geométrico, o quadro numérico, dentre outros. Segundo Douady (1992), durante a resolução de um problema, o estudante pode mudar constantemente suas estratégias, trabalhar com dois quadros paralelamente ou migrar para um novo quadro. Este processo de devir, que Douady & Perrin-Glorian (1989, p.389, tradução nossa) chamam de dinâmico, é definido como mudanças de quadros, que é:

um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação³.

Nesta visão, inferimos que o estudante trabalha com a mudança de quadros, quando, de acordo com a natureza do problema, ele necessita de outro suporte cognitivo para obter formulações diferentes de um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na formulação original. Para Douady (1992) quaisquer que sejam as traduções de um quadro em outro, elas terminam sempre em resultados desconhecidos, em novas técnicas, na criação de novos objetos matemáticos.

A partir da definição de conceito, ferramenta, objeto matemático, quadros e mudanças de quadros, que são atividades operatórias comuns no trabalho dos estudantes durante a resolução de problemas, Douady (1992) nomeou o devir inerente à utilização de uma ferramenta, da adaptação dos objetos matemáticos e do trabalho na perspectiva da mudança de quadros, de jogos de quadros. Os jogos de quadro são provocados pelo professor. É uma ação intencional, para fazer o estudante ampliar a aprendizagem, ou seja, o professor no intuito de fazer avançar e aprofundar a aprendizagem dos seus estudantes, desenvolve problemas específicos, com ferramentas adaptadas, de modo que contemple pelo menos dois ou mais quadros.

Os jogos de quadros são transposições didáticas das mudanças de quadros e são vistos, na teoria de Douady (1992), como meios privilegiados para provocar desequilíbrios cognitivos e permitir a ultrapassagem desses desequilíbrios em um novo equilíbrio de nível superior. Assim, a noção de quadro é centrada no fato de que uma mesma noção pode funcionar em diferentes ambientes conceituais e técnicos e que ela pode apresentar características específicas para cada um desses ambientes, sendo as diferenças existentes um dos motores e ferramentas da aprendizagem da matemática.

2.3 Procedimentos metodológicos

De natureza qualitativa, esta pesquisa foi aprovada pelo comitê de ética para pesquisa com seres humanos, sob

parecer de número 4.725.189. Ela foi realizada com base em características do *Design Experiment*, idealizado por Cobb *et al.* (2003). Identificamos nos pressupostos teóricos dessa metodologia fortes semelhanças com a estrutura da nossa pesquisa, como por exemplo, ela acentua seus pressupostos sobre como os estudantes aprendem novos significados, os transformam e os aplicam. Assim, ela nos embasou para descrevermos os fenômenos que surgiram durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Esta metodologia acentua seus pressupostos sobre como os professores/estudantes falam e fazem. Entendemos que essa compreensão foi parte essencial para descrevermos os fenômenos que podem surgir durante o desenvolvimento da pesquisa. Segundo Cobb *et al.* (2003), o foco do investigador na perspectiva do *Design Experiment* deve estar no pensamento matemático dos participantes e nas possíveis modificações que poderão existir durante o processo de discussões e aprendizagem.

Esta pesquisa foi realizada no Colégio Municipal Professora Ana Aparecida Sant'Ana, localizada no município de Santana de Parnaíba, no estado de São Paulo. Os dados apresentados neste estudo foram coletados a partir da resolução de 20 estudantes. Todos os estudantes eram da 3ª série do Ensino Médio. Os participantes tinham idades entre 15 e 18 anos, portanto foi seguido rigorosamente todos os protocolos da ética para pesquisa com seres humanos.

Para o desenvolvimento deste estudo apresentamos duas das cinco situações apresentadas aos alunos a qual foi discutida em dois encontros, sendo cada um com duração de duas horas aulas, neste caso 1h50min, totalizando quatro horas aulas, 3h40min de duração. A intervenção e as socializações entre os componentes de cada grupo durante a resolução do problema foram videogravadas.

Ao final de cada encontro, os problemas foram recolhidos pelo pesquisador para análise.

2.4 Sobre a coleta de dados

Reiteramos que para desenvolver esta pesquisa foram adotados os princípios da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas (Allevato, Onuchic, 2014). Juntos, eles deram consistência a esta intervenção, que teve o propósito de investigar se um processo de ensino que promova reflexões compartilhadas de um grupo de estudantes da 3ª série do Ensino Médio sobre a resolução de problema, que envolvem mudanças de quadros, geométrico, numérico e algébrico, pode favorecer a construção de conhecimentos dos estudantes sobre perímetro e área.

De acordo com essa proposta de Allevato & Vieira (2016), os estudantes devem ser organizados em grupos, para os quais o pesquisador depois de entregar o problema aos grupos e

3 le changement de cadres est un moyen d'obtenir des formulations différentes d'un problème qui, sans être nécessairement tout à fait équivalentes, permettent un nouvel accès aux difficultés rencontrées et la mise en oeuvre d'outils et techniques qui ne s'imposaient pas dans la première formulation.

acompanhar o trabalho, esclarecendo dúvidas e oferecendo sugestões, discute coletivamente os resultados. Sem deixar de formalizar os conceitos matemáticos envolvidos. No Quadro 1, apresentamos a divisão dos grupos e seus integrantes. Os nomes, escolhidos pelos estudantes, são fictícios.

Quadro 1 - Organização dos grupos de estudantes

Grupo A	Grupo B	Grupo C	Grupo D	Grupo E
Paris	Croácia	Bulgária	Dinamarca	Malta
Berlim	Albânia	Bélgica	Grécia	Amsterdã
Luxemburgo	Madrid	Eslovênia	Portugal	Itália
Londres	Suíça	Espanha	Alemanha	Hungria

Fonte: dados da pesquisa.

Para este artigo apresentamos a resolução e discussão gerada para a resolução de dois problemas.

5.1 Análise prospectiva dos problemas

Na intervenção, propusemos problemas, utilizando um quadro geométrico para complementar a natureza numérica, operacional ou algébrica do problema. Ainda, optamos por problemas abertos e fechados, cujo contexto estivesse relacionado a situações do cotidiano, de maneira que todos os dados do problema pudessem ser considerados no desenvolvimento das heurísticas e das estratégias. Estas características, acreditamos, podem ter sido a causa de os estudantes aceitarem o desafio de resolvê-los.

Nossa expectativa foi que a escolha dos problemas desta fase nos ajudasse a investigar se um processo de ensino que promova reflexões compartilhadas de um grupo de estudantes do Ensino Médio sobre a resolução de problema pode favorecer a construção, o aprofundamento e a ampliação de conhecimentos dos estudantes sobre perímetro e área.

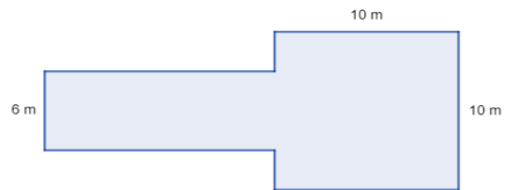
Conforme já descrevemos anteriormente, esta fase da intervenção consistiu na proposta de uma sequência de cinco problemas, ressaltamos que neste trabalho discutiremos os resultados dos problemas 4 e 5, aplicados na intervenção. A seguir apresentamos os problemas e uma análise prospectiva.

2.5 O problema 4

O objetivo da escolha do problema 4 e 5 foi considerar as consequências do trabalho na perspectiva da mudança de quadros (Douady, 1992) e ampliar as estratégias de resolução, ultrapassando o quadro numérico, indicando possibilidades de resolução no quadro algébrico. O Problema 4 (Figura 1) envolve o conceito de perímetro, área, composição e decomposição, trata-se de um problema aberto, que pode ser resolvido por meio de duas estratégias, uma no quadro numérico e outra no quadro algébrico.

Figura 1 – Enunciado do Problema 4

Problema 4. A figura abaixo representa o formato da piscina do condomínio San Denis, cuja área mede 190 m^2 .



Devido a pandemia da Covid-19, no ano de 2020, o uso coletivo da piscina foi suspenso temporariamente. Em assembleia os moradores decidiram que a administração do condomínio deveria comprar uma lona para cobrir a superfície da piscina durante o período de suspensão para evitar sujeiras e a reprodução de mosquitos. Para prender a lona na superfície da piscina, a síndica resolveu comprar uma corda de modo que o seu comprimento fosse maior $1,5 \text{ m}$ da medida do comprimento da borda, dessa forma o tamanho do comprimento da corda seria suficiente para laçar as bordas da lona em torno da superfície da piscina e prender a lona por meio da amarração das pontas da corda. Sendo assim, quantos metros de corda, foram necessários para a síndica conseguir prender a lona nas bordas da piscina? Demonstre seu raciocínio.

Fonte: dados da pesquisa.

Optamos por não marcar as dimensões faltantes do retângulo com letras, para não induzir o estudante a desenvolver estratégias apenas no quadro algébrico, nossa intenção foi avaliar a capacidade de desenvolvimento de estratégia dos estudantes. Na resolução no quadro numérico, esperava-se que o estudante, para descobrir a medida do comprimento da corda, somasse as medidas dos oito lados da piscina. No entanto, estão explícitas apenas as medidas de quatro lados do desenho da piscina, $6 + 10 + 10 + 10$, faltam as medidas dos lados do quadrado, que são iguais, e do retângulo, também iguais. Para encontrá-las, o estudante precisaria fazer algumas analogias.

Uma possível heurística para descobrir as medidas que faltam do quadrado seria considerar que, se a medida da altura do retângulo é 6 m , as medidas que faltam do lado do quadrado são 2 m e 2 m . É possível determinar a medida da base do retângulo, reconhecendo que a área da piscina mede 190 m^2 ; que é formada pela justaposição de um retângulo e um quadrado, ao decompô-la, tem-se que a medida do lado do quadrado é 10 m . Com estes dados, é possível determinar a área do quadrado, $A = (10 \text{ m})^2 = 100 \text{ m}^2$. Assim, a medida da área restante, 90 m^2 , é a medida da área do retângulo. A partir destas conexões, esperava-se que o estudante substituísse, na fórmula $A = b \cdot h$, os dados numéricos área e altura. E, após a substituição, chegasse a: $90 \text{ m}^2 = b \cdot 6 \text{ m}$.

Duas estratégias, a partir deste ponto, podem ser desenvolvidas para solucionar o problema, o método das tentativas e a equação polinomial do 1º grau. No método das tentativas, podem ser desenvolvidas, por exemplo, as tentativas $6 \cdot 12 \text{ m} = 72 \text{ m}^2$, $6 \text{ m} \cdot 13 \text{ m} = 78 \text{ m}^2$, \dots , $6 \text{ m} \cdot 15 \text{ m} = 90 \text{ m}^2$. Ao chegar neste ponto, conclui-se que as dimensões do retângulo medem 15 m de base e 6 m de altura. A segunda possibilidade de resolução é reconhecer a equação $6b = 90$ e resolvê-la para

determinar a medida da base. Por fim, a resposta esperada é:
 $p = 6m + 15m + 2m + 10m + 10m + 10m + 2m + 15m = 70m + 1,5m =$

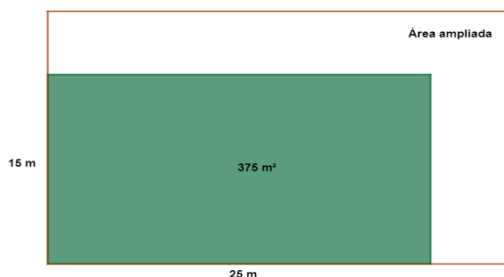
$71,5m$
 . Neste caso, a síndica deve comprar $71,5m$ de corda.

2.6 O problema 5

Assim como no Problema 4, neste Problema 5, o intuito foi, além de aprofundar e ampliar o conhecimento dos estudantes sobre resolução de problemas, cujo contexto envolvesse o cálculo de perímetro e área, apresentar uma estratégia de resolução, trabalhando no quadro algébrico. O problema em questão é aberto, a natureza possibilita utilizar o conceito da equação polinomial do 2.º grau, mas, caso o estudante não consiga desenvolver a equação e resolvê-la, pode adotar o método das tentativas, trabalhando apenas no quadro numérico.

Figura 2 – Enunciado do Problema 5

Problema 5. O estacionamento da empresa do Walter possui uma área de $375 m^2$ e ele pretende aumentar a área para $600 m^2$. A medida dos lados do atual terreno é de $15 m$ por $25 m$, conforme mostra a figura abaixo.



Em quantos metros Walter deve aumentar nas dimensões do estacionamento para que a nova área seja $600 m^2$? Demonstre seu raciocínio.

Fonte: São Paulo (2020)

Conforme justificamos no Problema 4, neste, também, optamos por não demarcar as dimensões faltantes do retângulo com letras ou outros símbolos, para não induzir os estudantes a acharem que devem desenvolver estratégias, apenas utilizando conceitos algébricos.

No quadro algébrico, nosso intuito era mostrar para os estudantes, que, por meio do conceito da equação polinomial do 2º grau, é possível resolver problemas geométricos. Para tanto, queríamos indicar duas técnicas operatórias: resolver por meio da fatoração ou encontrar as raízes a partir dos coeficientes da equação, neste caso utilizando a fórmula de Bhaskara.

Esperava-se que o estudante reconhecesse, a partir da heurística $600 m^2 - 375 m^2 = 225 m^2$, que faltam no quadro geométrico as dimensões da área $225 m^2$, que somadas às dimensões da antiga área, $375 m^2$, vão compor as dimensões da nova área ampliada, que é $600 m^2$. Como ainda não se têm as dimensões da área ampliada, o raciocínio deve ser apresentado por meio do produto $(15 + y) \cdot (25 + y) = 600$. O estudante poderia também ampliar o raciocínio numérico $600 m^2 - 375 m^2 = 225 m^2$ para o raciocínio

algébrico $(15 + y) \cdot (25 + y) - 375 = 225$. Tanto a expressão $(15 + y) \cdot (25 + y) = 600$ quanto a $(15 + y)(25 + y) - 375 = 225$ resultam na equação $y^2 + 40y - 225 = 0$.

Diante da equação $y^2 + 40y - 225 = 0$, duas técnicas operatórias para resolvê-la são esperadas, a fatoração ou a fórmula de Bhaskara. Na resolução por meio da fatoração, esperava-se que o estudante apresentasse os seguintes passos:
 $y^2 + 40y - 225 = 0 = 0 \rightarrow y^2 + 40y = 225$
 $40 \div 2 = 20 \rightarrow 20^2 = 400$.

Completando o trinômio quadrado perfeito do primeiro termo, somando o mesmo número aos dois membros da equação $\rightarrow y^2 + 40y + 20^2 = 225 + 20^2$.

$$(y + 20)^2 = 625$$

Ao desenvolver o produto $(y + 20)^2 = 625 \rightarrow y + 20 = \pm \sqrt{625}$, obtém-se $y + 20 = \pm 25$.

$$y + 20 = 25 \rightarrow y = 5$$

$$ii) y + 20 = -25 \rightarrow y = -45.$$

Caso adotasse a fórmula de Bhaskara, a partir da equação $y^2 + 40y - 225 = 0$, poderiam encontrar as raízes, a partir dos coeficientes $a = 1$, $b = 40$ e $c = -225$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$ $x = \frac{-40 \pm \sqrt{40^2 - 4(1)(-225)}}{2(1)}$ $x = \frac{-40 \pm \sqrt{2500}}{2}$, os resultados seriam $x' = 5$ e $x'' = -45$. Logo, considerando que $y = 5$, somam-se $15 + y \rightarrow 15 + 5 = 20$ e $25 + y \rightarrow 25 + 5 = 30$. Para validar a resposta e verificar a área total do novo estacionamento, esperava-se que o estudante fizesse $A_{Total} = 20 m \cdot 30 m = 600 m^2$.

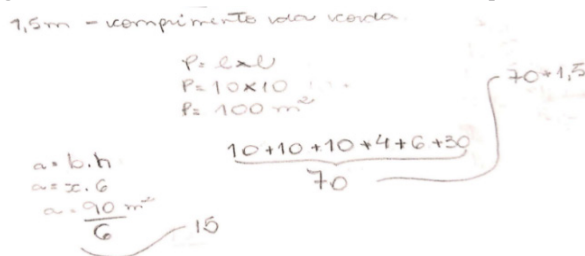
No método por tentativas, uma possível estratégia seria reconhecer a fórmula $A = b \cdot h$, e então substituir $600 = b \cdot h$, seguida das tentativas para encontrarem as medidas da base e altura que faltam na nova área do estacionamento. Assim, os estudantes poderiam calcular $16 m \cdot 26 m = 416 m^2$, $17 m \cdot 27 m = 459 m^2$, até chegar ao produto $20 m \cdot 30 m = 600 m^2$. A partir deste ponto, concluiriam que Walter deve aumentar $5 m$ nas dimensões do estacionamento para que a nova área seja $600 m^2$.

3 Resultados e Discussão

3.1 Análise das resoluções do problema 4

Para o problema 4, esperávamos duas possíveis estratégias para a resolução deste problema, uma no quadro numérico e a outra no quadro algébrico. A despeito de os estudantes apresentarem soluções nos dois quadros, prevaleceu a estratégia no quadro numérico. Apenas o Grupo C apresentou estratégias no quadro algébrico, conforme rubricas ilustradas na Figura 3.

Figura 3 - Resolução do estudante Eslovênia do Grupo C



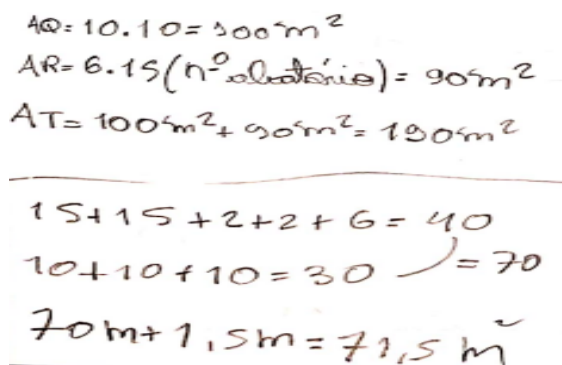
Fonte: dados da pesquisa

Inicialmente, o estudante reconheceu a fórmula do retângulo, $A = b \cdot h$, seguido da substituição da base (b) por x e a resolução da equação polinomial do 1º grau, que resultou na descoberta da base do retângulo, que foi **15 m**.

Segundo as pesquisadoras Douady & Perrin-Glorian (1989), a mudança de quadros é um meio para se obterem formulações diferentes de um problema, possibilitando um novo acesso às dificuldades encontradas no quadro inicial e o uso de novas ferramentas e técnicas que não eram adequadas para a formulação inicial. Nesta fase de intervenção, constatamos que os estudantes se valeram da mudança de quadros, sendo os mais comuns os quadros geométrico e numérico. Neste problema, o estudante Eslovênia trabalhou nesta perspectiva, a partir da interpretação dos dados explícitos no quadro geométrico desenvolveu estratégias no quadro algébrico e numérico.

Ainda sobre o trabalho no quadro algébrico, o Grupo E, ao perceber que no retângulo estava explícita apenas a medida da altura, adotou o método das tentativas para descobrir o valor da base. Chamou os valores que multiplicavam por **6** de “número aleatório”.

Figura 4 - Resolução do estudante Hungria do Grupo E



Fonte: dados da pesquisa.

Ao perceber o uso da expressão $AR = 6 \cdot 15$ (nº aleatório), questionamos o grupo o que significava tal expressão para eles, e o estudante Paris respondeu que faziam referência a “um número que iam encontrar”. Mesmo não apresentando estratégias no quadro algébrico, inferimos que sua resposta representa um possível raciocínio algébrico entre os pares do grupo.

Os demais grupos utilizaram o método das tentativas. Trabalharam no quadro numérico, considerando que se a

área do retângulo média **90 m²**, logo deveriam descobrir a medida faltante do retângulo, fazendo **6 m x 10 m = 60**, ..., **6 m x 15 m = 90**. Destacamos a seguir a socialização entre os participantes do Grupo E.

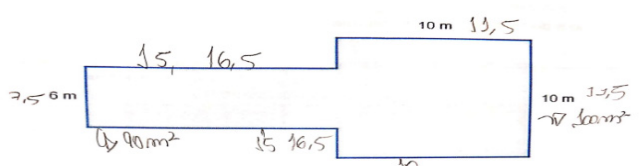
- Estudante Suíça: [...] 6 para 9? (referia-se a multiplicação)
 Estudante Albânia: por quê? Não tem lógica ser 9.
 Estudante Suíça: ah, tem que dá 90! acho que é 18. Acho melhor tentar de outro jeito, acho que não vai dar, não.
 Estudante Albânia: será!? E se tentarmos por 13?
 Estudante Suíça: dá 78. Ah, achei, dá por 15.
 Estudante Suíça: [...] agora temos que ver a corda, porque o importante é a corda.
 Estudante Albânia: é só somar mais 1,5, entendeu?
 Estudante Suíça: acho que não.
 Estudante Albânia: é! aqui diz que é 1,5 maior.
 Estudante Suíça: não, diz que a corda precisa ser maior que 1,5, não quer dizer que a gente tenha que colocar 1,5 na área, por exemplo, tudo isso vale 190, só que é tudo isso (neste momento apontava para a imagem de toda a piscina).
 Estudante Albânia: mas é o perímetro! Só somar os lados agora!
 Estudante Suíça: deu 82.
 Estudante Albânia: mais 1,5. [...] Tem que sobrar 1,5.
 Estudante Madrid: aí tem que tirar 12, somamos este lado aqui 2 vezes.
 Estudante Suíça: verdade!

Durante as resoluções, prevaleceu a autonomia e a segurança dos grupos na mobilização de conceitos, fórmulas e estratégias. Fomos pouco solicitados para mediar dúvidas. Ao circular pela sala, notamos que as poucas que surgiam eram superadas entre os próprios componentes dos grupos.

Esse fato ratifica as reflexões de Allevato (2005), acerca do trabalho em um cenário de resolução de problemas. Para essa pesquisadora, quando os estudantes socializam e compartilham suas ideias, eles elevam a sua autoestima, tornam-se mais confiantes em suas habilidades e em seu potencial e, por meio do diálogo e da troca de experiência com os colegas, eles avaliam seu próprio trabalho, sem precisarem ser avaliados ou corrigidos pelo professor. Percebemos estas reflexões de Allevato (2005) em diversas passagens desta intervenção.

Na fase diagnóstica os estudantes apresentaram dificuldades em relação aos conceitos de perímetro e área e, também, para calcular perímetro e área. Percebemos que nesta fase da intervenção estas dificuldades parecem ter sido superadas. As poucas que surgiram estiveram relacionadas à interpretação do problema em si, como por exemplo as do Grupo A, que, em sua estratégia inicial, compreendeu que deveria acrescentar em cada lado **1,5 m**.

Figura 5 - Resolução do estudante Berlim do Grupo A



Fonte: dado da pesquisa

O impasse entre os pares prevaleceu sobre a soma do **1,5 m**, pois dá a entender que leram o problema superficialmente, não entenderam que o comprimento da corda deveria ser maior que **1,5 m** da medida da borda da piscina. Por meio do método das tentativas, calcularam a medida que faltava do lado do retângulo, mas as medidas faltantes do perímetro do quadrado não foram levadas em consideração. Mediamos a compreensão, dizendo:

Pesquisador: *o perímetro é a soma de todos os lados, certo?*
 Estudante Berlim: *sim, professor, isso a gente sabe.*
 Pesquisador: *vocês não acham que tem medida do perímetro faltando aí!?*
 Estudante Paris: *[...] então vai ser **66** mais **1.5**.*
 Estudante Londres: *acho que falta este lado aqui (neste momento apontava para o lado do quadrado sobreposto ao retângulo)*
 Estudante Berlim: *mas essa parte não existe! Esse quadrado ele não fecha!*
 Pesquisador: *vocês calcularam todos os perímetros?*
 Estudante Paris: *sim, professor, 6, 15, 15, 10, 10 e 10 ... não! calma aí, isso aqui não conta?! (neste momento apontava para as medidas 2 e 2).*
 Estudante Berlim: *Ah! Cara, eu ainda pensei nesta partezinha. Então é 2!*
 Estudante Paris: *não! não dá!*
 Estudante Berlim: *por que não!?*
 Estudante Paris: *se aqui vale 15 e aí vai valer 2, altera a área!*
 Estudante Berlim do Grupo A: *nada a ver, perímetro são os lados e área é base vezes altura e estas medidas é do quadrado, entendeu?*

A partir desta socialização, o grupo concordou que o correto seria acrescentar mais **4 m** a soma do perímetro da borda da piscina. Estes impasses observados foram superados como vemos nas rubricas do estudante Berlim, ilustradas na Figura 6. Provavelmente estas dificuldades dos estudantes do Grupo A ainda estejam relacionadas ao trabalho com figuras bidimensional.

Figura 6 - Resolução do estudante Berlim do Grupo A

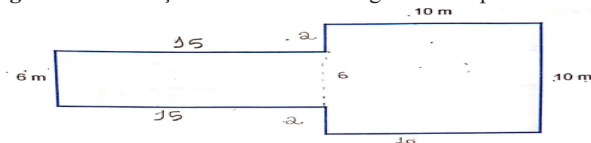
$$10 + 10 + 10 + 15 + 15 + 10 + 4 = 70m$$

$$70 + 1,5 = 71,5$$

Fonte: dado da pesquisa.

Nos demais grupos, o trabalho com a decomposição não apresentou dificuldades. Tomemos como exemplo as rubricas do estudante Hungria.

Figura 7 - Resolução do estudante Hungria do Grupo E



Fonte: Acervo da pesquisa.

Houve poucas dificuldades em relação à escolha dos algoritmos adotados para efetuar os cálculos dentro do quadro numérico. Na plenária, o Grupo B apresentou os cálculos que desenvolveu para achar o perímetro, considerando a medida do perímetro do retângulo, **42 m**; a medida do perímetro do

quadrado, **40 m**; e o comprimento **1,5 m**, seguido da subtração de **12 m**.

Figura 8 - Resolução do estudante Madrid do Grupo B

$$P = 22m$$

$$10 + 4 = 40$$

$$15 + 15 = 30$$

$$5 + 5 = 10$$

$$40 + 30 + 10 = 80m$$

$$80 + 1,5 = 81,5m$$

$$81,5 - 12 = 69,5m$$

focou mais atenção 1,5 m da corda

Fonte: dados pesquisa.

Na plenária, o grupo foi questionado:
Estudante Paris do Grupo A: *por que - 12 ali?*
Estudante Madrid: *ah ... é que somamos o 6 duas vezes! entendeu?*

Esta prática de observarem as rubricas dos pares foi um hábito comum nos encontros.

Por fim, concluímos que o reconhecimento e a utilização de fórmulas para calcular perímetro e área de uma figura – quadrado, retângulo, triângulos, trapézio e círculo – não foi uma dificuldade aparente durante a resolução de todos os problemas propostos na fase da intervenção, diferente da composição e da decomposição de figuras bidimensionais, que pareceu ser mais complicado para eles. Neste Problema 4, o trabalho com a decomposição apresentou pontos de dúvidas em alguns grupos, caso dos Grupos A e B. Em relação à organização e à apresentação na plenária, houve variações nos cálculos, mas nada que invalidasse as estratégias. No geral, mobilizaram corretamente os conceitos envolvidos na natureza do problema e apresentaram estratégias nos quadros numérico e algébrico.

3.3 Análise das resoluções do problema 5

Na resolução deste problema, as conexões ocorreram de maneira rápida, prevaleceu o método das tentativas. Os grupos A, B, D e E apresentaram soluções corretas. Os estudantes apresentaram estratégias apenas no quadro numérico, todos reconheceram a fórmula $A = b \cdot h$ e apresentaram heurísticas, considerando os conceitos de área do retângulo. Tivemos o cuidado de formatar a figura do quadro geométrico, de modo que as medidas do lado da área ampliada pudessem ser visualizadas aparentemente iguais. A heurística, utilizada no Problema 4, para descobrir a medida que não estava explícita na borda que compunha o retângulo, foi também utilizada pelos pares de alguns grupos neste Problema 5. A seguir, apresentamos a transcrição do Grupo E.

Estudante Malta: *[...] vai precisar fazer menos!? **600 - 375** ? Porque ele quer aumentar para 600, certo? E aí ele já tem uma área de **375**, entendeu?*
 Estudante Hungria: *sei lá, será que assim fica mais fácil?*
 Estudante Malta: *mas temos que descobrir a área que ele vai aumentar!*
 Estudante Malta: *[...] essa área branca tem que dar **225** para chegar a **600**.*
 Estudante Hungria: *vai dar para fazer assim: **30 . 20 = 600**, não pode!?*
 Estudante Malta: *de onde você tirou os **20**?*
 Estudante Hungria: *eu deduzi que era **20** e aqui deduzi que*

era 30.

Estudante Amsterdã: *mas a gente precisa de uma conta.*

Estudante Malta: *mas ai já respondeu o problema!*

Estudante Hungria: *precisa aumentar 5 m nas dimensões*

Inferimos que, como os estudantes já compreendiam os conceitos de perímetro e área e os elementos que constituem a fórmula $A = b \cdot h$ e a técnica operatória para calcular a área do retângulo, desenvolveram estratégias, deduzindo que poderiam descobrir a medida do perímetro da área ampliada, aumentando valores iguais em cada lado do terreno atual até alcançar a medida da área 600 m^2 . Isso se comprova, pois, na plenária, o estudante Grécia do Grupo D expôs esta estratégia.

Figura 10 - Resolução do estudante Grécia do Grupo D

Handwritten calculations showing the perimeter of a square being increased by 1 unit on each side until the area reaches 600 m². The calculations are:

$$\begin{aligned} 16 \times 26 &= 416 \\ 17 \times 27 &= 459 \\ 18 \times 28 &= 504 \\ 19 \times 29 &= 551 \\ 20 \times 30 &= 600 \rightarrow \text{cada lado} \\ &\text{aumentou 5 m} \end{aligned}$$

Fonte: dados da pesquisa.

Quando essa estratégia foi socializada, os demais grupos contaram também terem pensado dessa maneira para executar os cálculos. Isso denota uma grande afinidade entre eles.

Esperávamos com este problema continuar aprofundando o conceito de perímetro e área, mas não tivemos muito o que formalizar sobre o assunto, visto que as dificuldades parecem ter sido superadas. Já em relação ao quadro algébrico, nenhum grupo apresentou estratégias neste quadro. Assim, na formalização, apontamos a possibilidade da ampliação das estratégias, saindo do quadro numérico para o quadro algébrico. Apresentamos a expressão $(15 + y) \cdot (25 + y) = 600$ e, a partir da equação $y^2 + 40y - 225 = 0$, sendo utilizadas duas novas técnicas de resolução: a fatoração e a fórmula de Bhaskara.

Na formalização, recorreremos ao processo, denominado por Douady (1992) de dialética ferramenta-objeto. Trata-se de um processo cíclico que organiza as funções do professor e dos estudantes. Os conceitos matemáticos podem desempenhar o papel de ferramenta para resolver um problema, como é o caso da equação polinomial do 2º grau. Suas propriedades e representações, permitem construir novo saber. Neste caso, indicamos para os estudantes um novo conceito que pode ser utilizado para resolver problemas geométricos, que foi o caso do problema 5.

4 Conclusão

As reflexões desenvolvidas a partir dos resultados expostos nas seções anteriores constituíram base para elaborar respostas às nossas indagações. Constatamos que foram desenvolvidas por meio do ambiente colaborativo da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas três tipos de socialização: a socialização entre os participantes

de um grupo; a socialização na plenária entre os participantes de todos os grupos; e a socialização na formalização entre os participantes de todos os grupos e o pesquisador. Em cada uma destas socializações, identificamos que as reflexões desenvolvidas possuíam características diferentes, potencialmente valiosas no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Nas socializações entre os participantes de um grupo, investigavam por meio do compartilhamento das heurísticas as possibilidades do uso de um conceito para desenvolver uma estratégia. Neste tipo de socialização, a disputa por uma melhor heurística para representar no papel a rubrica da estratégia parecia uma batalha. Pudemos, neste tipo de socialização, avaliar o aprofundamento da aprendizagem dos grupos sobre os conceitos envolvidos em cada problema.

As socializações na plenária entre os participantes de todos os grupos eram desenvolvidas a partir de uma estratégia que já estava representada por meio de um modelo matemático. As socializações, observadas no cenário da plenária, permitiam que os estudantes e o pesquisador interpretassem resoluções, trocassem experiências e aprendessem novas estratégias. Uma heurística abandonada por um grupo, muitas vezes por falta de conhecimentos prévio, era adotada por outro grupo e, ao ser apresentada na plenária, causava curiosidade naquele grupo que a havia abandonado. Estas ações intensificavam os debates na plenária. Assim, notamos neste tipo de socialização, um fértil ambiente de aprendizagem para construir e ampliar os conhecimentos sobre perímetro e área.

Nas socializações entre todos os participantes dos grupos na formalização, era o pesquisador quem, na maioria das vezes, provocava os discursos. O pesquisador retomava estratégias abandonadas pelos grupos, apresentava novas, estabelecia conexões e formalizava os conceitos envolvidos no problema. A socialização nesta fase parecia ser mais interna ao estudante e com ele mesmo. A despeito de haver poucas discussões e poucos questionamentos ao pesquisador, o efeito desse momento da formalização era sentido na resolução do próximo problema, a autonomia dos estudantes aumentava e as conexões dos conceitos envolvidos no problema eram desenvolvidas com maior rapidez.

Pudemos também analisar que a partir das socializações entre os grupos, das plenárias, das atitudes de cooperação dos estudantes entre eles e das reflexões na etapa da formalização, foram etapas fundamentais e importantes para que eles pudessem rubricar suas heurísticas, compreender as dificuldades dos problemas, chegar às conclusões acertadas, desenvolver estratégias e superar as dificuldades. Por fim, a partir desta análise, justificamos a resposta da nossa segunda questão de pesquisa “Em caso positivo, quais são as contribuições?”, pois o cenário investigativo da metodologia empregada na intervenção agregou diversas contribuições, tanto no ensino, quanto na aprendizagem.

O foco das avaliações em larga escala é avaliar a aprendizagem da Matemática por meio da resolução de

problemas. Apesar do objetivo de cada problema proposto nessas avaliações ser avaliar uma única habilidade ou descritor, a natureza dos problemas trata da inter-relação de conceitos que poderiam pertencer a duas ou mais habilidades. Em vista disso, concluímos que o processo da resolução de problemas e o trabalho com os quadros geométrico, numérico, algébrico são essenciais no cenário das avaliações em larga escala.

No início desta pesquisa apresentamos uma hipótese, que foi: estudantes podem errar os problemas propostos nas avaliações em larga escala, não porque talvez não tenham aprendido os conceitos de equações e funções, mas possivelmente por não saberem trabalhar com os conceitos de perímetro e área de figuras planas, ou ao contrário. Apenas com os dados analisados na fase diagnóstica não foi possível afirmar ou negar esta hipótese, pois precisaríamos compreender com mais profundidade as heurísticas, as relações que os estudantes efetuam com os conceitos quando trabalham na perspectiva da mudança de quadros e isso não pôde ser observado com maiores detalhes no diagnóstico.

Após analisarmos os dados da intervenção, inferimos que os estudantes mostraram indícios de que aprofundaram e ampliaram seus conhecimentos sobre perímetro e área. Os conceitos sobre equações e otimização de função não foram trabalhados em nossa intervenção, até apresentamos, nos Problemas 4 e 5, estratégias utilizando equações de grau um e dois, mesmo assim, precisaríamos propor mais problemas, com naturezas diferentes e explorar mais elementos das equações.

Em síntese, considerando que a natureza dos problemas da intervenção contemplou a interrelação de conceitos que poderiam pertencer a habilidades de quadros distintos, inferimos que os resultados denotaram certa insegurança dos estudantes para se lançarem à resolução de um problema quando era necessária ou adequada a mudança de quadro. Todavia, os estudantes desenvolveram a atitude de valorizar o trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua

validação.

Referências

- Allevato, N.S.G. Onuchic, L.R. (2014) Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? *In: Resolução de Problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco.
- Allevato, N.S.G. & Vieira, G. (2016) Do ensino através da resolução de problemas abertos às investigações matemáticas: possibilidades para a aprendizagem (pp.113-131). Quadrante.
- Brasil. Base Nacional Comum Curricular. (2018) Educação é a Base. Brasília:MEC/CONSED/UNDIME.
- Brasil. Ministério da Educação. (2019) Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, Brasil.
- Cobb, P. (2003) Design Experiments in Educational Research. Educational Douady, R. (1984) Jeux de cadres ET dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.Tese (Doutorado d'état) - Universidade Paris VII, França.
- Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères IREM.
- Douady, R.; Perrin-Glorian, M.J. (1989) Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics, 20(4), 387-424.
- Onuchic, L. R. (1999) Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In: M.A.V. Bicudo. Pesquisa em educação matemática* (pp.199-218). São Paulo: UNESP.
- Polya, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press.
- Polya, G. (1976) A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência.
- Santos, J.C. (2021) A resolução de problemas sobre perímetro e área: um experimento de ensino, utilizando problemas propostos em avaliações de larga escala. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera, São Paulo.
- São Paulo (Estado). (2017) Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo. Saesp.
- São Paulo (Estado). (2017) Secretaria Estadual de Educação. Avaliação de Aprendizagem em Processo. Matemática.