

Conteúdo e Ensino de Frações para Alunos Cegos ou Com Baixa Visão: uma Revisão Sistemática de Literatura

Content and Teaching of Fractions for Students Who Are Blind or Have Low Vision: a Systematic Literature Review

Daniele Zeni Serafini Mafioletti^{*a} ; Maria Alice Veiga Ferreira de Souza^a ; Arthur Belford Powell^{b,c} 

^aInstituto Federal do Espírito Santo, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. ES, Brasil.

^bUniversity-Newark, Newark, Departamento de Educação Urbana. New Jersey, EUA.

^cBronx Charter Schools. USA.

*E-mail: daniele.mafioletti@educador.edu.es.gov.br.

Resumo

A profissão docente requer, pelo menos, dois conhecimentos essenciais: conteúdo e ensino. Especificamente, o conteúdo de fração é um componente significativo do currículo do ensino fundamental e médio. Educadores e pesquisadores de matemática reconhecem números fracionários, e suas operações podem ser particularmente desafiadoras para professores ensinarem e alunos compreenderem, especialmente para aqueles que são cegos ou têm baixa visão. Nosso objetivo é descrever uma revisão sistemática da literatura (RSL) para identificar o conhecimento e as estratégias pedagógicas que professores no ensino fundamental e médio implementam para ajudar alunos cegos e com baixa visão a construir o conceito de fração. Três estudos atenderam aos nossos critérios de inclusão. Nossa RSL destacou que os professores têm uma compreensão limitada do conceito e do ensino de frações. Além disso, os estudos revisados mostraram que adaptar materiais manipuláveis pode melhorar a compreensão dos conceitos de fração, particularmente da perspectiva de partição. Dada a importância deste tópico para as comunidades educacional e de pesquisa, recomendamos investigações adicionais que expandam e aprofundem o envolvimento de alunos cegos e com baixa visão. Isso inclui experimentar métodos de ensino em sala de aula com alunos cegos e videntes, garantindo que as estratégias beneficiem ambos os grupos simultaneamente. Esta abordagem visa abraçar o profundo significado da inclusão.

Palavras-chave: Conhecimento de Professor. Estratégias de Ensino. Fração. Aluno Cego e com Baixa Visão.

Abstract

The teaching profession requires at least two core knowledge: content and teaching. Specifically, the content of fractions is a significant component of the elementary and secondary school curriculum. Mathematics educators and researchers recognize fractional numbers, and their operations can be particularly challenging for teachers to teach and students to understand, especially for those who are blind or have low vision. We aim to describe a systematic literature review (SLR) to identify the knowledge and pedagogical strategies teachers in elementary and secondary education implement to help blind and low-vision students understand the fraction concept. Three studies met our inclusion criteria. Our SLR highlighted that teachers have a limited understanding of the concept and teaching of fractions. Additionally, the studies reviewed showed that adapting manipulative materials can enhance the understanding of fraction concepts, particularly from the partitioning perspective. Given the significance of this topic for both the educational and research communities, we recommend further investigations that expand and deepen the engagement of blind and low-vision students. This includes experimenting with classroom teaching methods with both blind and sighted students, ensuring that strategies benefit both groups simultaneously. This approach aims to embrace the profound meaning of inclusion.

Keywords: Teacher Knowledge. Teaching Strategies. Fraction. Blind and low-Vision Students.

1 Introdução

O estudo de frações é um conteúdo curricular essencial para outros conceitos dentro e fora da Matemática tais como probabilidade, mecânica e genética, entre outros. Essa capilaridade ao lado de revelações sobre dificuldades de apreensão por estudantes (Bailey et al., 2012, Booth & Newton, 2012, Ni & Zhou, 2005) e por professores (Lin et al., 2013, Toledo et al., 2023) preocupam educadores matemáticos e psicólogos cognitivistas (Gabriel et al., 2023, Matthews & Ellis, 2018). A inquietude se justifica, principalmente, porque a aprendizagem de números fracionários e suas operações aritméticas está conectada ao desempenho em Álgebra que, por sua vez, está presente em conceitos que seguem esse

ensino (Booth et al., 2018, Elias et al., 2017, Powell, 2018b, Siegler et al., 2012).

As dificuldades de apreensão desse conteúdo matemático por professores e a consequente reverberação sobre a aprendizagem de alunos (Brousseau, 1983, Christou, 2015, Ma, 1999; McMullen et al., 2015; Vamvakoussi et al., 2012; Van Hoof et al., 2018; Souza, 2022, Silveira, Souza & Powell, 2024) nos remetem à atenção desse ensino para alunos cegos ou com baixa visão. Professores são desafiados a ensinar para alunos com baixa ou nenhuma acuidade visual na maioria dos conteúdos matemáticos curriculares (Fernandes & Healy, 2007), logo, a complexidade para aprendizagem de frações somada a essa insuficiência ou deficiência é um desafio para

professores. É nesse sentido que esta revisão visa a identificar conhecimentos demonstrados por professores e suas estratégias de ensino para construção do conceito de frações para alunos cegos ou com baixa visão na educação básica, sob o prisma da comunidade científica da Educação Matemática, cujas principais ideias são apresentadas na próxima seção.

2 Desenvolvimento

2.1 Literatura relevante

Nesta seção apresentamos estudos sobre o que a comunidade científica mundial sabe sobre o conhecimento de professores acerca do conteúdo e de ensino de frações, bem como estratégias voltadas para aprendizagem de conteúdos para alunos cegos ou com baixa visão. Nossa intenção é de trazer uma rede de pensamentos, conceitos e experiências que ofereçam argumentações que apoiem nossa discussão sobre os resultados da revisão sistemática. Nesse contexto, é *sine qua non* termos em mente conhecimentos requeridos para o exercício da docência.

A docência, em sua essência, demanda um domínio robusto do conteúdo curricular específico e da capacidade de orquestrar a construção desse conhecimento, orientando e facilitando o percurso da aprendizagem (Shulman, 1986, 1987). No contexto particular do ensino da Matemática, essa exigência se intensifica, requerendo do educador profundo conhecimento do conteúdo a ser ensinado, aliado a um refinado conhecimento pedagógico. Esses temas, minuciosamente explorados por Shulman, foram sintetizados sob a designação de Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (CPC) (Shulman, 1986). Em seus estudos, Shulman (1986) dissertou sobre os diversos saberes que compõem a expertise docente, delineando elementos cruciais para a reflexão sobre a formação de professores. Entre esses elementos, destacamos as habilidades didáticas e a profunda compreensão do conteúdo curricular, pilares que sustentam a perspectiva desse autor sobre a formação docente. Para Shulman (1986), a permanente implementação de processos de ensino e aprendizagem exige uma consideração metódica dos objetivos de aprendizagem, visando a sua plena concretização. Nesse ínterim, os materiais didático-pedagógicos, sejam eles de natureza física ou digital, podem assumir um papel de relevância ímpar, sobretudo para alunos cegos ou com baixa visão. O cerne da questão, portanto, reside na capacidade de esses materiais contribuírem com a construção de conceitos, no nosso caso, fracionários e aprofundarem a compreensão do conteúdo curricular em voga.

No que diz respeito às frações e suas operações aritméticas, diversos pesquisadores destacaram a necessidade de professores que ensinam Matemática melhorarem suas compreensões conceitual e procedimental (Yoshida, Sawano,

2002, Newton, 2008, & Souza, 2022). Souza (2022), por exemplo, em um estudo com professores de Matemática e futuros professores que ensinam Matemática, brasileiros, concluiu que 112 de 121 participantes apresentaram alguma lacuna de compreensão no conteúdo de frações. Esse resultado levou-a à advertência de que um ensino pautado singularmente em procedimentos pode não levar alunos à construção de ideias que subjazem a esse conteúdo curricular, podendo acarretar em superficialidades e restrições para compreensão ampla e profunda que esse estudo reclama.

Nesse tema, de modo geral, pesquisadores da Educação Matemática (Christou, 2015, Ma, 1999, Vamvakoussi et al., 2012) investigaram o conhecimento de fração de professores, bem como adoção de estratégias didático-pedagógicas, que os convenceram de que esse ensino é desafiador para muitos docentes de todo o mundo nas últimas décadas. Aqui são alguns fatores que apoiaram essa convicção: (1) a carência conceitual de frações apresentada por professores que, muitas vezes, realizam operações aritméticas com frações desligadas dos sentidos de seus algoritmos (Ma, 1999; Newton, 2008; Yoshida & Sawano, 2002) e, (2) o ensino orientado unicamente ou prioritariamente em uma perspectiva de partição (Scheffer & Powell, 2019; Souza & Powell, 2021) e de carência de reconhecimento da unidade de medida (Souza, 2022). Diante desses fatores, outros investigadores (Amaral, 2021; Powell, 2023) vêm estudando a medição como meio de superação dos desafios conceituais e de partição que mencionamos.

Na perspectiva de partição, a existência de frações emerge da divisão de coisas divisíveis – uma unidade igualmente subdividida a certa quantidade distinta dela (Powell, 2018a, 2018b, 2019). Nessa conceição são apresentadas, por exemplo, noções de parte-todo, quociente, razão, operador multiplicativo e medida (Kieren, 1976), que expressam as seguintes ideias de modo discreto:

- 1) a parte-todo comunica a noção simbólica p/q para representar uma relação entre quantidade de partes p e o total de partes iguais q (e.g., um aluno para cada cinco alunos);
- 2) a fração como quociente interpreta p/q como uma divisão de um número natural p por outro q , sendo $q \neq 0$, ou seja, uma divisão de determinada quantidade p em q partes do mesmo tamanho (e.g., 1 dividido por 7);
- 3) a interpretação de p/q como razão envolve a ideia de proporção ou comparação (e.g., razão da idade da filha com a de sua mãe; parte da idade da filha é a idade da mãe)¹;
- 4) p/q como um operador é utilizado para separar parte de outra quantidade que seja a unidade. Dito de outro modo, é parte que atua sobre um todo e o modifica (e.g., $2/3$ das canetas são azuis); e
- 5) p/q como medida é concebida como p partes da fração unitária $1/q$ (e.g., são necessárias três unidades de $1/5$ para obtermos $3/5$).

De maneira diversa, a perspectiva de medição surgiu antes da perspectiva de partição e deriva de necessidades socioculturais antigas quando distâncias de terras eram

1 O significado de razão guarda uma peculiaridade: “toda razão pode ser representada por um índice comparativo entre duas quantidades de mesma grandeza ou de grandezas diferentes” (Souza & Powell, 2021, p. 83), mas nem toda razão é uma fração. Por exemplo, a relação entre distância e tempo é uma razão, mas não é uma fração.

medidas com nós em uma corda, que funcionavam como unidade de medida (Roque, 2012). Quando a distância não era um múltiplo da unidade, surgiram os comprimentos fracionários. Essa ontologia trouxe a ideia de frações como medição. Assim sendo, a ontologia das frações surge de problemas de medir quantidades, que é a comparação multiplicativa de pares de magnitudes (Aleksandrov, 1963; Caraça, 1951). Essa perspectiva tem superado dificuldades de compreensão relatadas quando do ensino por partição (e.g., Alqahtani et. al. (2022), Amaral, 2021, & Silveira, Souza, Powell, 2024).

As dificuldades conceituais e de ensino alegadas anteriormente foram também verificadas com professores e alunos com acuidade visual (Fernandes & Healy, 2007). Ainda que o sentido visual seja pleno, Oliveira (1996) conta que alunos videntes apresentam obstáculos para aprenderem frações primeiramente por problemas no método de ensino. Para além de estudantes videntes, ensinar para alunos sem acuidade visual não é tarefa trivial, pois a complexidade natural de compreensão de conteúdos como o de fração, associada à não visualização do aluno, à carência de material didático (Fernandes & Healy, 2007) e, sobretudo, à pouca ou nenhuma formação inicial e continuada de professores de Matemática em educação inclusiva acrescentam dificuldades para construção de ideias.

Nesse sentido, concordamos com os pesquisadores Fernandes del Campo (1996) e Fernandes e Healy (2010) que a superação dos entraves à formação escolar é ainda mais desafiadora para pessoas com deficiência visual. Para esses investigadores, o ensino de tarefas matemáticas para pessoas cegas ou com baixa visão requer uso de tecnologia assistiva – recursos e serviços que contribuem para proporcionar ou ampliar habilidades funcionais de pessoas com deficiência e promover vida independente e inclusão – ou material adaptado à inspeção tátil – ajustes ou substituição de elementos visuais ao acesso pelo tato.

Para facilitar o ensino de frações, alguns autores mencionam uso de materiais manipuláveis, que, de acordo com Nacarato e Fiorentini (2005), podem ser definidos como objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar, podendo, inclusive, ser objetos reais que têm aplicação no cotidiano ou para representar uma ideia. Ainda para esses autores, um dos elementos que dificultam a aprendizagem com base nesses materiais, diz respeito à falta de relação com os conceitos em voga, apontando duas características das atividades que podem trazer resultados desfavoráveis à aprendizagem, como a distância entre o material manipulável e as relações matemáticas a serem representadas. Assim, o uso inadequado ou pouco exploratório de qualquer material manipulável, pouco ou nada contribuirá para a aprendizagem matemática, pois o problema não está na utilização desses

materiais, mas em como eles estão sendo utilizados.

O ensino para pessoas com cegueira total comumente envolve práticas didáticas e adaptações que usam o tato associados à oralidade como pontes para acesso e promoção de conhecimento. Healy e Fernandes (2011, p. 141) dizem que “[...] é o corpo [refere-se ao aspecto tátil] que proporciona acesso ao mundo que os circunda ao mesmo tempo em que limita o campo perceptivo. Só faz parte do campo perceptivo do cego o que é tangível ao seu corpo”. Nesse sentido, tratando-se do ensino de matemática para cegos, acreditamos que as adaptações e práticas pedagógicas podem possibilitar a esses alunos acesso e percepção de conteúdos por meio do tato (materiais manipuláveis), e, naturalmente, pela oralidade.

É importante dizer que, embora o conteúdo curricular matemático brasileiro seja o mesmo para alunos com ou sem deficiência visual, é preciso considerar adequações didático-pedagógicas para ambos os casos, pois essa omissão pode causar discrepâncias e(ou) exclusões na aprendizagem (Agrawal, 2004) podendo expô-los a indesejadas questões ligadas à justiça e desigualdades sociais (Healy & Powell, 2013).

2.2 A revisão sistemática de literatura

Nesta seção, descrevemos os procedimentos que usamos para realizar uma revisão sistemática de literatura (RSL) (Kitchenham *et al.*, 2007) sobre conhecimentos demonstrados por professores e suas estratégias de ensino para construção do conceito de frações para alunos cegos ou com baixa visão.

Nossa RSL foi levada a efeito em um levantamento de artigos científicos (avaliados por pares), dissertações de mestrado, teses de doutorado e anais de eventos, publicados em periódicos nacionais e internacionais, por meio de descritores na língua inglesa² aplicados em bases com amplo acervo científico na área de Ensino e Educação, a saber os seguintes: Scielo, Springer, Science Direct, Scopus, Web of Science, Eric e Doaj. Os descritores estão intrinsecamente relacionados ao objetivo e metas do tema em voga, que combinados formaram *strings* com uso de operadores lógicos *OR* entre os sinônimos e o operador *AND* com o restante. Finalmente, usamos estes descritores: *teacher, knowledge, teaching, strategies, fraction, blind student, low vision, didactics, pedagogical*.

Não objetivamos limitações temporais nesta RSL por acreditarmos, ao lado de educadores matemáticos, que o ensino de frações sempre foi tema que requereu atenção em nível escolar, científico e acadêmico. A seleção, importação e organização dos trabalhos ocorreu por meio de uma planilha eletrônica construída para esse fim. O primeiro rastreio trouxe 33 trabalhos, isentos de repetições. Esses 33 foram submetidos a critérios de inclusão e exclusão aplicados à leitura do título, palavras-chaves e resumo. Foram incluídos trabalhos completos e disponíveis que trataram do conhecimento do

2 Justificamos a opção por descritores na língua inglesa pelo fato de a maioria dos trabalhos científicos possuírem resumo e palavras-chaves nesse idioma.

conteúdo voltado para ensino de frações para alunos cegos ou com baixa visão. Foram excluídos trabalhos que não abordaram fração relacionada ao ensino da Matemática, não discutiram dificuldades ou propostas facilitadoras relacionadas ao ensino de fração para alunos cegos ou com baixa visão, não trataram da atuação do professor relacionado ao ensino de fração para alunos cegos ou com baixa visão, não evidenciaram o processo de ensino de fração e a ação do professor em sala de aula para alunos cegos ou com baixa visão e; objetivaram validar metodologias ou ferramentas para o ensino de fração.

Dos 33 trabalhos, três foram qualificados e seguiram para avaliação por pares, realizada por dois pesquisadores da Educação Matemática, que responderam aos seguintes questionamentos a partir da leitura integral dos três textos: (1) o trabalho apresentou ou discutiu conhecimentos de conteúdo dos professores relacionados à fração para alunos cegos ou com baixa visão? (2) o trabalho apresentou ou discutiu conhecimentos dos professores relacionados ao

ensino de fração para alunos cegos ou com baixa visão? As respostas dos avaliadores confirmaram a pertinência dos três trabalhos alinhados com o objetivo da RSL, cuja descrição e concomitante guisa de discussão alimentam a próxima seção.

2.3 Resultados discussão

Esta seção apresenta os três trabalhos qualificados no protocolo desenhado para a busca revisional, relacionando-os com a literatura relevante e interpretando suas implicações. Para essa apresentação, fornecemos as seguintes informações no Quadro 1 abaixo: a natureza da publicação (artigo ou dissertação), ano de publicação, autor, base de dados utilizada e título. Na sequência, descreveremos os trabalhos e, nesse ínterim, sempre que oportuno, faremos conexão desses conteúdos com o que foi apresentado ou defendido pelos autores trazidos na segunda seção deste artigo – Literatura Relevante – na forma textual ou de referência entre parênteses.

Quadro 1 - Natureza, ano, autor, base de dados e título dos trabalhos que compõem a RSL

Objetivo da RSL: Identificar conhecimentos demonstrados por professores e suas estratégias de ensino para construção do conceito de frações para alunos cegos ou com baixa visão na educação básica.					
Ordem	Natureza	Ano	Autor	Base	Título
01	Dissertação	2013	Costa, A.B.	BDTD	Uma proposta no ensino de fração para adolescentes com e sem deficiência visual.
02	Artigo	2018	Felipe, N.A., Bas-niak, M. I.	DOAJ	Tarefas propostas para a utilização do material adaptado “régua de frações” para o ensino de frações a cegos.
03	Artigo	2019	Costa, A. B., Gil, M. S.C.A., Elia, N.C.	SciELO	Ensino de frações para adolescentes com deficiência visual.

Fonte: dados da pesquisa.

No primeiro trabalho da RSL, Costa (2013) objetivou elaborar, aplicar e avaliar uma estratégia de ensino para construção do conceito de frações para três adolescentes com deficiência visual, de 14 a 18 anos, e outros adolescentes com sistema sensorial visual íntegro. O planejamento das atividades de ensino foi elaborado após conhecimento do que cada um conhecia ou não sobre frações, para que ele dimensionasse necessidades de recursos educacionais.

Esse conhecimento prévio passou por uma avaliação de repertório inicial em duas etapas: (a) levantamento de igualdade de quantidades, pela identidade física entre os objetos. Foram oferecidos materiais (massa de modelar, barras de Cuisenaire³, brinquedo “Monta Fácil”, bolinhas de gude e de isopor, círculo de fração adaptado) ao participante, que permitiria formar conceitos, relacionar ideias, estabelecer relações lógicas, desenvolver a expressão verbal e corporal, reforçar as habilidades sociais, e, dessa maneira, ir construindo seu próprio conhecimento (Figura 1).

Figura 1 - Desempenho dos participantes nas atividades de avaliação de repertório inicial



Fonte: Costa (2013, p.54).

O estudante deveria tocá-lo pelo tempo que achasse necessário, e, em seguida, foram oferecidos dois objetos de comparação, um de cada vez, de modo que o participante ficaria com um material em uma das mãos e com uma das comparações em outra, Tateando-os, e sendo indagados se

3 As barras de Cuisenaire são paralelepípedos retangulares com seção transversal quadrada de um centímetro, com comprimentos que variam de 1 a 10 centímetros, cada comprimento representado por uma cor diferente. Da perspectiva da álgebra de comprimentos, as barras podem ser usadas para o estudo exploratório de números inteiros e suas operações aritméticas (Benson et al., 2022). Elas foram criadas pelo educador belga Emile-Georges Cuisenaire (1891-1975), que as registrou e comercializou no início da década de 1950 (Cuisenaire, 1952; De Bock, 2019) e se tornaram populares em todo o mundo pelo matemático e psicólogo egípcio Caleb Gattegno (1911-1988) (Powell, 2007).

eram iguais ou não quanto ao formato; e (b) levantamento de conceitos de fração de $1/2$ e $1/3$, sendo oferecida ao participante certa quantidade que ele deveria tocar pelo tempo que achasse necessário, sendo solicitado a pegar a metade ou terço desta quantidade (Figura 2).

Figura 2 - A busca por $1/3$ de 12



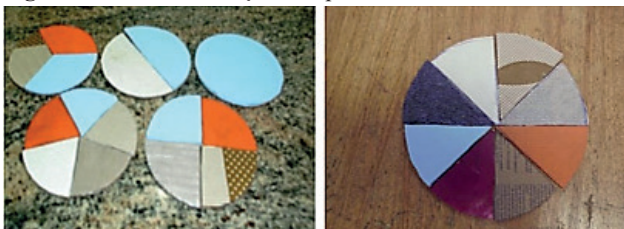
Fonte: Costa (2013, p.61).

Depois, foram aplicadas atividades de ensino elaboradas pelo pesquisador, em duas fases distintas. A primeira foi marcada por atividades relacionadas a conceitos de $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ e $1/6$, alternadamente, para as frações unitárias e para materiais diferenciados (massa de modelar, brinquedo “Monta Fácil”, escala Cuisenaire, círculo de frações adaptado, bolinhas de isopor, bolinhas de gude) seguindo uma ordem crescente de dificuldade. Outra característica dessa fase foi a interação verbal constante entre pesquisador e participante.

Na segunda fase, as atividades estavam relacionadas a conceitos de frações não unitárias ($2/3$, $3/4$, $2/5$, $3/5$, $4/5$ e $5/6$). Também, alternadamente, Costa (2013) não trabalhou sequencialmente com uma fração, mas revezou-as com os diferentes materiais. Do mesmo modo, Costa (2013) valorizou a interação verbal constante entre pesquisador e participante.

Importante destacar que Costa (2013) iniciou cada atividade oferecendo um exemplo a ser seguido pelos participantes. Em outras palavras, Costa mostrava como atuar com cada fração e solicitava uma repetição da mesma ação dos participantes. Por exemplo, com o círculo de frações (Figura 3), ele mostrava que tomar dois terços era o mesmo que duas partes das três do conjunto e o aluno repetia.

Figura 3 - Círculo de frações adaptado



Fonte: Costa (2013, p.46).

A mediação - pesquisador-participante - era realizada toda vez que o participante não emitia a resposta correta. Nesse instante, o pesquisador questionava o que ele havia feito, levando-o a entender o que errou e por quê. A partir disso, ele era estimulado a responder que raciocínio deveria ser feito

para alcançar o resultado, fazendo-o manipular os objetos à sua disposição. Quando necessário, o pesquisador acrescentava um exemplo diferente do proposto, a fim de estimulá-lo a refazer a atividade até que acertasse. Dessa forma, cada mediação era diferente, partindo do erro do participante.

Outra particularidade avaliada por Costa (2013) foi a linguagem durante a aplicação do material didático. Costa introduziu-a progressivamente para a discriminação dos objetos, disponibilizando pistas visuais para os participantes com deficiência visual. Em seguida, concluiu que todos os participantes estavam prontos para receber as estratégias de ensino planejadas. Além disso, concluiu que o emprego de materiais manipuláveis seria importante para aprendizagem do conceito de frações e prosseguiu com a aplicação das estratégias de ensino.

Na implementação das estratégias, Costa (2013) promoveu ensino de conceitos de $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ e $1/6$, com atividades predominantemente visuais adaptadas por meio de descrições, informações táteis, auditivas ou qualquer outra que favorecesse a compreensão do objeto de estudo, além da descrição verbal dos esquemas adaptados, e de representações em relevo. Ademais, Costa (2013) teve apoio de materiais como bolinhas do tipo ping-pong, bolinhas de isopor, barras de Cuisenaire, brinquedo “Monta Fácil”, bolinhas de gude e círculos de frações para condução de suas estratégias de ensino.

Na fase de estudo de frações unitárias, Costa (2013) julgou que o trabalho com a massa de modelar deveria ser repensado, pois não foi tão bem apreendido pelos participantes. Os outros materiais auxiliaram participantes com e sem deficiência visual para aprendizagem de frações, exceto pela dificuldade da contagem das partes do “Monta Fácil”. Na fase do estudo de frações não unitárias ($2/3$, $3/4$, $2/5$, $3/5$, $4/5$ e $5/6$), os participantes interpretaram fração como quociente, ou seja, como uma divisão entre números naturais, em situações de repartir. Os participantes demonstraram esse conhecimento descrevendo a operação e avaliando sua correção.

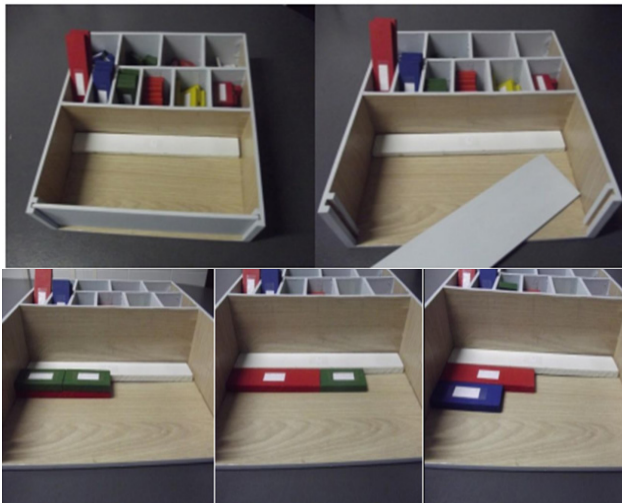
Costa (2013) destacou que a interação verbal constante entre pesquisador e participante permitiu a comunicação, organização e desenvolvimento dos processos de pensamento pelos participantes. Por meio dela, foi possível criar relações sociais com outros indivíduos e planejar a solução de problemas. Além disso, a fala pôde ser utilizada para auxiliar a busca de características de um objeto explorado manualmente por meio da comunicação com outro indivíduo.

O trabalho de Costa (2013) revela associação do conteúdo curricular a ser construído associado com a experimentação e julgamento do material didático-pedagógico eleito. Essa vertente se aproxima do que é defendido por Shulman (1986, 1987) no que diz respeito ao conhecimento pedagógico do conteúdo. Observe o leitor que alguns materiais eleitos por Costa (2013) levaram os estudantes à produção do conhecimento e outros não.

No segundo trabalho, Felipe e Basniak (2018) aplicaram um plano de aula para ensino de frações para uma aluna com deficiência visual, com um material em madeira que chamaram de “frações no pote” – uma adaptação da conhecida “régua de frações”, composto por 23 peças. As peças possuíam uma simbologia em Braille correspondente a cada fração representada pela peça.

Por questões de mobilidade, manuseio e organização espacial, os pesquisadores construíram uma caixa para separar as peças em dez divisórias de diferentes tamanhos (Figura 4). Para facilitar a localização, evitar perda e mistura das peças, Felipe e Basniak (2018) posicionaram-nas nas divisórias da caixa, deixando a parte da frente livre para manuseio, sem que os punhos da participante ficassem erguidos. A imagem da esquerda da Figura 4 mostra o material adaptado; no da direita, o arranjo das peças que poderia ser por sobreposição, lado a lado ou alinhado.

Figura 4 - Material adaptado (à esquerda); disposição das peças (à direita)



Fonte: Felipe e Basniak (2018, p.8).

O planejamento contou com tarefas para a construção do conceito, comparação, equivalência e operações de adição e subtração de frações. As tarefas foram estruturadas com questionamentos básicos para atingir os objetivos do planejamento, ou seja, baseadas no ensino por meio de indagação, investigação e da verbalidade frente às manipulações táteis realizadas no material. A primeira tarefa envolvia entender que as frações pertencem a um novo campo numérico e, portanto, expressam quantidades relacionadas a medidas, tendo como referência o todo dividido em partes iguais, do qual se toma uma ou mais de suas partes. Para essa tarefa, os pesquisadores usaram tiras de cartolina, cujos vincos (dobras na cartolina) marcariam as divisões em partes iguais. A ideia era de que os vincos levassem a participante ao entendimento da divisão ao meio (na metade), por exemplo, e que ela respondesse que cada parte da tira representava meia tira.

A segunda tarefa visava a realizar comparações entre

frações, por suas representações, ou seja, comparando o tamanho das peças que representavam cada fração. Para essa comparação, os pesquisadores levaram a participante a trabalhar com a peça que representava o todo, ao lado de outras peças que seriam objeto de comparação fracionária. Na terceira tarefa, por meio da manipulação das peças, o objetivo era perceber que as frações eram equivalentes por meio dos encaixes iguais em ambas as frações, embora com simbologias e representações diferentes. Quanto às operações de adição e subtração de frações, Felipe e Basniak (2018) objetivavam levar a aluna à compreensão de que quando se obtém frações com a mesma unidade de referência, pode-se somá-las ou subtraí-las de forma intuitiva juntando ou retirando partes do todo dividido igualmente nos materiais.

Importante mencionar não ter havido dificuldades da aluna cega no ato de dobrar as tiras em partes iguais na aplicação, porém, houve dificuldade para identificação dos vincos das divisões na mesma tira. Esse foi um ponto frágil do material. Ademais, a verbalidade e as perguntas orientadas para a generalização, fez com que a aplicação realizada em poucas horas se tornasse cansativa. Os pesquisadores ponderaram que os questionamentos propostos fossem feitos um a um, identificando necessidades de inserção de perguntas mais específicas ou de explicações complementares. Além disso, Felipe e Basniak (2018) consideraram pertinente uso do mesmo material para alunos sem cegueira.

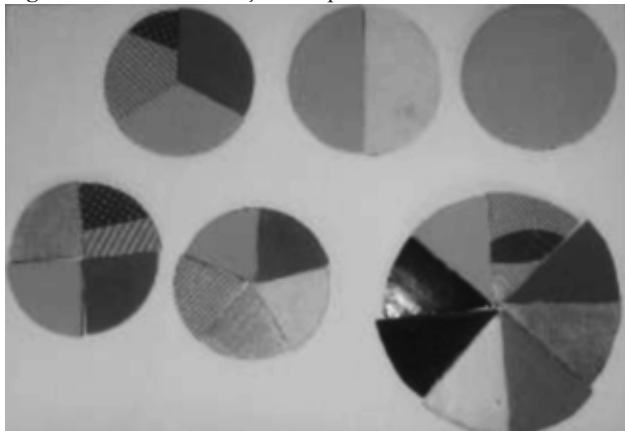
Mediante análise da aplicação das tarefas, Felipe e Basniak (2018) observaram que a forma da organização e estruturação do material permitiu que a aluna cega desenvolvesse conceitos de frações pelo tato, sem demonstrar grandes obstáculos com a organização e busca das peças e identificação, exceto pelos vincos que mencionamos. Nesse sentido, mais uma vez, o conhecimento pedagógico do conteúdo se fez necessário (Shulman, 1986; 1987). A experiência com a participante proporcionou reflexão a respeito de verbalizações e materiais que ora funcionaram como contributos para aprendizagem de frações.

Finalmente, Costa, Gil e Elias (2019) objetivaram ensinar frações unitárias e não unitárias para três adolescentes com deficiência visual, empregando instruções repetidas e oferecendo determinado reforço a cada resposta correta e outro reforço diferencial para comportamentos que pretendiam reduzir ou extinguir. Além disso, valeram-se da verbalidade e do acompanhamento do processo (*follow up*). Esse artigo é parte da dissertação de mestrado intitulada “Uma proposta no ensino de fração para adolescentes com e sem deficiência visual”, de autoria do primeiro autor, Costa (2013), sob orientação da segunda autora, Gil; com a colaboração nas análises e elaboração do manuscrito pelo terceiro autor, Elias.

Para a realização das tarefas, Costa, Gil e Elias (2019) utilizaram uma caixa quadrada de papelão resistente sem uma das abas laterais, posicionada sobre a mesa, em frente aos participantes, contendo partes de materiais pedagógicos, como barras de Cuisenaire, peças do brinquedo “Monta Fácil”,

bolinhas de isopor, bolinhas de pingue-pongue, bolinhas de gude, massa de modelar e o Círculo de Frações Adaptado (Figura 5).

Figura 5 - Círculo de frações adaptado



Fonte: baseado em Del Campo (1996) e Costa, Gil e Elias (2019).

Dois blocos de tarefas foram elaborados para trabalhar noções de igualdade e diferença de frações unitárias de $1/2$ e $1/3$. No primeiro bloco, os participantes deveriam identificar igualdade ou diferença entre estas quatro situações: (i) uma peça de base quadrada do brinquedo “Monta Fácil” e uma bola de isopor; (ii) uma bola de isopor e uma bola de pingue-pongue; (iii) duas barras de Cuisenaire com dez centímetros cada; (iv) uma peça de base quadrada do brinquedo “Monta Fácil” e uma bola de gude; e (v) duas barras de Cuisenaire de cinco centímetros cada. Um objeto (ou estímulo) era oferecido para manuseio por 20 segundos e, em seguida, outro objeto era manuseado também por 20 segundos, quando, então, o pesquisador perguntava: “Essas peças são iguais ou diferentes?”. Cada resposta recebia dos pesquisadores uma informação sinalizando correção ou equívoco, e a tentativa posterior era iniciada.

No segundo bloco de tarefas, os participantes deveriam identificar frações de $1/2$ e $1/3$. As peças eram deixadas à disposição dos participantes na caixa de papelão para que eles pudessem manipular por, no máximo, 20 segundos. Em seguida, era apresentada a seguinte instrução verbal: “Você pode me entregar metade (ou um terço) das peças?”. Os participantes deveriam pegar a parte solicitada e entregar ao pesquisador. Novamente, essa resposta recebia dos pesquisadores uma informação sinalizando correção ou equívoco, e a tentativa posterior era iniciada. Outras tarefas solicitavam a cada participante que identificasse o seguinte: (i) a metade de quatro peças de base quadrada do brinquedo “Monta Fácil”; (ii) a metade de seis barras de Cuisenaire de cinco centímetros cada; e, (iii) um terço de seis barras de Cuisenaire de cinco centímetros cada.

Após o *follow up* com frações unitárias, foram introduzidas tarefas de frações não unitárias que diferiam em relação aos materiais e(ou) à fração não unitária apresentada na instrução. As frações utilizadas foram $2/3$, $3/4$, $2/5$, $3/5$, $4/5$ e $5/6$. Nessa

parte, os pesquisadores utilizaram o Círculo de Frações Adaptado, quando os participantes deveriam entregar $2/3$ de três peças ao pesquisador. Além do aspecto matemático das tarefas, a linguagem também foi objeto de análise na investigação.

A linguagem foi principalmente utilizada para discriminação dos objetos e para a integração das informações provenientes dos sentidos preservados, detalhando as “pistas” visuais aos participantes. Do mesmo modo, houve indicações verbais descritivas sempre que os participantes cometiam algum equívoco, propiciando condições para a reelaboração das respostas, dando ao aprendiz o suporte na descrição do que está acontecendo e propondo desafios ao raciocínio. Esse procedimento de correção de erros obteve êxito em todas as oportunidades em que foi aplicado.

Para Costa, Gil e Elias (2019), o estudo se mostrou viável para ensino de frações a alunos com deficiência visual usando materiais manipulativos, ou seja, os materiais eleitos contribuíram para construção de conceitos fracionários (Shulman, 1986, 1987). Outra implicação do estudo é quanto ao papel da linguagem no ensino. A estratégia verbal auxiliou os participantes na discriminação de objetos e para correção de erros durante cada atividade.

3 Conclusão

A importância do ensino de frações e o papel do professor no processo de aprendizagem de alunos cegos ou com baixa visão nos motivou a investigar conhecimentos de professores e suas estratégias de ensino para construção do conceito de frações por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura emersa da comunidade científica da Educação Matemática.

Não obstante a importância do tema, apenas três trabalhos revistos por pares e publicados no Brasil atenderam ao objetivo desta revisão. Sobre o conhecimento de professores para ensino de frações para alunos cegos ou com baixa visão, os três trabalhos apontaram uso exclusivo de frações próprias representadas por parte-todo. Quanto às estratégias de ensino, os autores revelaram opção por materiais concretos ou manipulativos associados à linguagem verbal visando a criar possibilidades e oportunidades para aprendizagem de fração.

Os resultados dos três trabalhos oferecem contribuições para o ensino de frações com alunos cegos ou com baixa visão. No entanto, eles se restringiram ao estudo de frações próprias e com interpretação parte-todo. Ademais, o processo de ensino levado a cabo pelos autores pareceu ter ocorrido em ambientes escolares exclusivos para alunos com restrições visuais. Atualmente, no Brasil, alunos cegos ou com baixa visão estão inseridos em ambientes escolares concomitantes com alunos videntes no ensino básico. Nesse sentido, alguns questionamentos ainda carecem de respostas, a exemplo destas três: (1) As estratégias pedagógicas relatadas pelos três trabalhos desta RSL produziram os mesmos resultados para estudo das frações impróprias, reconhecimento da unidade de referência e aritmética de frações? (2) Que estratégias

pedagógicas de frações atenderiam simultaneamente a alunos cegos e não cegos em turmas de estudantes com ambas características? (3) Como estão sendo formados professores para lidar com a diversidade de características específicas de alunos, tais como visuais, cognitivas, auditivas, táteis etc?

Enxergamos na literatura relevante que revisamos outra perspectiva de ensino de frações, a de medição. Como uma sugestão, futuras investigações poderiam experimentá-la para estudo de frações, como indicado por Alqahtani *et al.* (2022), Amaral (2021), Powell (2023), e Silveira, Souza e Powell (2024). Esses autores destacam que a abordagem de ensino de frações pela perspectiva de medição pode trazer benefícios para superação de dificuldades conceituais não plenamente atendidas pela perspectiva parte-todo, por exemplo, por facilitar a construção do conceito de frações impróprias, números mistos e desenvolvimento do senso numérico sobre a magnitude, ordem, equivalência e desigualdade de frações, independente das especificidades dos alunos, como a acuidade visual.

A atenção ao ensino de alunos cegos ou com baixa visão é necessária e pode despertar demandas em formações de professores sobre necessidades de mobilização de noções matemáticas e, em particular, de conhecimentos e estratégias de ensino sobre frações, capazes de promover habilidades preconizadas em documentos educacionais brasileiros – a exemplo das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (Brasil, 2014) – fundamentais para construção de conceitos relacionados a diversas noções matemáticas, especialmente para alunos com baixa ou nenhuma visão.

O caráter nuclear do estudo de frações na Matemática, bem como a atenção com a inclusão de alunos em espaços escolares com diversidade de necessidades de aprendizagem, nos levam a indicar a continuidade de investigações que tragam respostas e caminhos para aqueles e outros questionamentos em investigações futuras.

Referências

- Agrawal, S. (2004). *Teaching Mathematics to Blind Students Through Programmed Learning Strategies*. San Francisco: Abhijeet Publications.
- Aleksandrov, A.D. (1963). A general view of mathematics. In A. D. Aleksandrov, & A. N. Kolmogorov (Eds.), *Mathematics: its content, methods, and meaning* (pp.1-64). Massachusetts Institute of Technology.
- Alqahtani, M.M., Powell, A.B., Webster, V., & Tirnovan, D. (2022). How a measuring perspective influences pre-service teachers' reasoning about fractions with discrete and continuous models. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 14(3), 441-458.
- Amaral, C.A.N. (2021). *Conceito de fração pela perspectiva de medição: uma abordagem baseada no 4A-Instructional Model utilizando as barras de Cuisenaire e conduzida por um lesson study*. [Dissertation, Federal Institute of Espírito Santo].
- Bailey D.H., Tesouro M.K., Nugent L. & Geary D.C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, 113(3), p. 447-455.
- Benson, I., Marriott, N., & McCandliss, B.D. (2022). Equational reasoning: A systematic review of the Cuisenaire–Gattegno approach. *Frontiers*. <https://doi.org/https://doi.org/10.3389/feduc.2022.902899>
- Booth, M., & Newton, K.J. (2012). Fractions: could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, 37(4), 247-253.
- Booth, J.L., Newton, K.J., Pendergast, L.H., & Barbieri, C. (2018). Opening the door to algebra: The role of fraction knowledge in algebra learning. In *ICLS 2018 Proceedings* (pp. 1581-1582).
- Brasil. (2014). Ministério da Educação. Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica. Brasília: MEC.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Caraça, B.J., (1951). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.
- Christou, K.P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education*, 47(5), 747-758.
- Costa, A.B.D. (2013). *Uma proposta no ensino de fração para adolescentes com e sem deficiência visual*. [Dissertação, Universidade Federal de São Carlos].
- Costa, A.B.D., Gil, M.S.C.D.A., & Elias, N.C. (2019). Ensino de frações para adolescentes com deficiência visual. *Ciência & Educação*, 25, 1047-1065.
- Cuisenaire, G. (1952). *Les nombres en couleurs. Nouveau procédé de calcul par la méthode active, applicable à tous les degrés de l'école primaire*. Duculot-Roulin.
- De Bock, D. (2020). Georges Cuisenaire's numbers in colour. A teaching aid that survived the 1950s. In E. Barbin, K. Bjarnadóttir, F. Furinghetti, A. Karp, G. Moussard, J. Prytz, & G. Schubring (Eds.), "Dig where you stand" 6. *Proceedings of the Sixth International Conference on the History of Mathematics Education* (pp. 355-368). WTM-Verlag. <https://doi.org/10.37626/GA9783959871686.0>
- Elias, H.R., Savioli, A.M.P.D., & Ribeiro, A.J. (2017). Números racionais e estrutura algébrica corpo: problematizando o currículo da formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 19(3), 182-208. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2017v19i3p182-208>
- Felipe, N.A., & Basniak, M.I. (2018). Tarefas propostas para a utilização do material adaptado "Régua de frações" para o ensino de frações a cegos. *Rev BOEM*, 6(11), 356-376.
- Fernandes del Campo, J.E.F. (1996). *La enseñanza de la matemática a los ciegos*. Madri: ONCE.
- Fernandes, S.H.A.A., & Healy, L. (2007). Ensaio sobre a inclusão na Educação Matemática. *Unión-revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 3(10), 59-76.
- Fernandes, S.H.A.A., & Healy, L. (2010). A inclusão de alunos cegos nas aulas de matemática: explorando área, perímetro e volume através do tato. *Boletim de Educação Matemática*, 23(37), 1111-1135.
- Gabriel, F., Van Hoof, J., Gómez, D.M., & Van Dooren, W. (2023). Obstacles in the Development of the Understanding of Fractions. In K. M. Robinson, A. K. Dubé, & D. Kotsopoulos (Eds.), *Mathematical Cognition and Understanding*:

- Perspectives on Mathematical Minds in the Elementary and Middle School Years*, 209-225.
- Healy, L., & Fernandes, S. (2011). Relações entre atividades sensoriais e artefatos culturais na apropriação de práticas matemáticas de um aprendiz cego. *Educar em Revista, n.especial*, 227-244. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602011000400015>
- Healy, L., & Powell, A.B. (2013). Understanding and overcoming “disadvantage” in learning mathematics. In M. A. K. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel-Kreidt, J.
- Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 69-100). Springer.
- Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational number. In Lesh, R. (Org.). *Number and Measurement: papers from a research workshop*. Columbus, Ohio: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education, p. 101-144.
- Kitchenham, B. et al. (2007). *Guidelines for performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering*. EBSE Technical Report, EBSE-2007-01.
- Lin, C.Y., Becker, J., Byun, M.R., Yang, D.C., & Huang, T.W. (2013). Conhecimento conceitual e processual de operações de frações de professores em formação: um estudo comparativo dos Estados Unidos e Taiwan. *School Science and Mathematics*, 113 (1), 41-51.
- Ma, L. (1999). Knowing and teaching elementary mathematics: teachers’ understanding of fundamental mathematics in China and the United States. New York: Lawrence Erlbaum Associates.
- Matthews, P.G., & Ellis, A.B. (2018). Natural alternatives to natural number: The case of ratio. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 19-58. <https://doi.org/10.5964/jnc.v4i1.97>
- Matthews, P.G., & Ellis, A.B. (2018). Natural alternatives to natural number: The case of ratio. *Journal of Numerical Cognition*, 4(1), 19-58.
- McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction*, 37(5), 14-20.
- Nacarato, A. M. & Fiorentini, D. (2005). *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática*. São Paulo: Musa Editora.
- Newton, K.J. (2008). An extensive analysis of pre-service elementary teachers: knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, 45(4), 1080-1110.
- Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: the origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*. 40(1), 27-52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Oliveira, R.G. (1996). *Aprendizagem de frações: uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5a. série do 1o. grau* [Dissertação, Universidade Estadual de Campinas].
- Powell, A.B. (2007). Caleb Gattegno (1911-1988): A famous mathematics educator from Africa? *Revista Brasileira de História da Matemática*, 199-209. <https://doi.org/10.47976/RBHM2007vn17>
- Powell, A.B. (2018a). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A-Instructional Model. *Perspectiva*, 36(2), 399-420.
- Powell, A.B. (2018b). Melhorando a Epistemologia de Números Fracionários: uma Ontologia baseada na História e Neurociência. *Rematec*, 13(29), 89-90.
- Powell, A.B. (2019). How does a fraction get its name? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, 3(3), 700-713.
- Powell, A.B. (2023). Enhancing students’ fraction magnitude knowledge: A study with students in early elementary education. *Journal of Mathematical Behavior*, 70, 1-14. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101042>
- Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar.
- Scheffer, N. F., & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop*, 1(3), 476-503.
- Siegler, R.S., Duncan, G.J., Davis-Kean, P.E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, 23(7), 691-697.
- Silveira, E., Souza, M.A.V.F. & Powell, A.B. (2024). Estudo de frações: superficialidades, parcialidades ou equívocos. *Bolema*, 38, 1-23.
- Shulman, L. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, Cambridge, 57, 1-22.
- Souza, M.A.V.F., & Powell, A.B. (2021). How do textbooks from Brazil, United States and Japan deal with fractions? *Acta Scientiae*, 23(4), 77-111.
- Souza, M. A. V. F. de. (2022). Fração: conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores. *Boletim Gepem*, 79, 86-100.
- Toledo, R. V. F., Abreu-Mendoza, R., & Rosenberg-Lee, M. (2023). Brazilian math teacher’s magnitude representation and strategy use in fraction comparison: A mixed methods study. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, 11(1), 97-121.
- Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(3), 344-355.
- Van Hoof, J., Verschaffel, L., De Neys, W., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: a longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences*, 61, 99-108.
- Yoshida, H., & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equalpartitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, 44(4), 183-195.