DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2024v17n1p22-30

Um Estudo Sobre Conhecimentos Necessários ao Futuro Professor de Matemática para a Exploração de Séries no Ensino Médio

A Study on the Knowledge Necessary for Future Mathematics Teachers to Explore Series in High School

Ricardo Fernando de Souza[a]; Ruy César Pietropaolo*[bc]; Angelica da Fontoura Garcia Silva[c]

[a]Faculdade das Américas. SP, Brasil.
[b]Unian, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. SP, Brasil.
[c]Unopar, Programa de Pós-Graduação em Metodologias para Ensino de Linguagens e suas Tecnologias. PR, Brasil.
*E-mail: ruy.pietropaolo@cogna.com.br

Resumo

O artigo discute parte dos dados obtidos em um processo formativo que integrou a tese de doutorado do primeiro autor, cujo objetivo foi investigar os conhecimentos necessários ao futuro professor de Matemática para explorar noções de sequência, série e limite no Ensino Médio. Os dados foram coletados por meio de um questionário inicial e discussões em dois encontros com sete estudantes da Licenciatura em Matemática totalmente online de um centro universitário privado de São Paulo. O marco teórico baseou-se nas concepções de Tall e Vinner sobre imagem conceitual e nos estudos de Ball, Thames e Phelps sobre conhecimento profissional do professor de Matemática, especialmente o conhecimento especializado do conteúdo. A análise dos dados revelou que os participantes apresentaram dificuldades em identificar a regularidade das parcelas de uma série infinita e compreender o conceito de limite. No entanto, durante as discussões sobre as atividades propostas, houve progresso na compreensão desses conceitos, especialmente em relação às séries convergentes e divergentes. O artigo conclui ressaltando a importância de abordagens que favorecem a compreensão gradual e a antecipação de conceitos fundamentais ainda no Ensino Médio, como o de limite de sequências e series numéricas, para favorecer o desenvolvimento da abstração e generalização, além de facilitar a aprendizagem futura de conceitos do Cálculo Diferencial.
Palavras-chave: Educação Matemática. Licenciatura em Matemática. Conhecimento Matemático para o Ensino. Ensino de Séries e Limite.

Abstract

The article discusses part of the data obtained in a training process that was part of the first author's doctoral thesis, whose objective was to investigate the knowledge necessary for future Mathematics teachers to explore notions of sequence, series and limits in High School. Data were collected through an initial questionnaire and discussions in two meetings with seven fully online Mathematics Degree students from a private university center in São Paulo. The theoretical framework was based on Tall and Vinner's conceptions of conceptual image and the studies of Ball, Thames and Phelps on Mathematics teachers' professional knowledge, especially specialized content knowledge. Data analysis revealed that participants had difficulties in identifying the regularity of the installments of an infinite series and understanding the concept of limit. However, during discussions about the proposed activities, there was progress in understanding these concepts, especially in relation to convergent and divergent series. The article concludes by highlighting the importance of approaches that favor the gradual understanding and anticipation of fundamental concepts, such as the limit of sequences and numerical series, to favor the development of abstraction and generalization, in addition to facilitating future learning of Differential Calculus concepts.
***Keywords**:* Mathematics Education. Initial Training for Mathematics Teachers. Mathematical Knowledge for Teaching. Teaching Series and Limits.

1 Introdução

O presente artigo discute parte dos dados obtidos em um processo formativo que integrou a tese de Doutorado defendida pelo primeiro autor (Souza, 2023), cujo propósito foi investigar os conhecimentos necessários ao futuro professor de Matemática, sob os pontos de vista do conteúdo, do didático e do curricular, para a exploração de noções de sequência, série e limite no Ensino Médio.

Os dados aqui analisados foram os coletados no início desse processo por meio de um questionário de entrada e do registro das discussões ocorridas nos dois primeiros encontros com a participação de um grupo de sete estudantes da Licenciatura em Matemática, no formato 100% on-line, de um centro universitário privado do estado de São Paulo.

A escolha dos objetos matemáticos para esse processo foi impulsionada pela nossa observância dos desempenhos insatisfatórios dos estudantes nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos e procedimentos presentes nas disciplinas que envolvem o Cálculo Diferencial e Integral. Diversos pesquisadores têm apontado as dificuldades dos estudantes em relação ao cálculo como Baruffi (1999); Burigatto (2019) e Martins (2023).

Consideramos relevante apresentar neste artigo parte dos resultados do referido processo, pois nos permitem refletir sobre conhecimentos dos licenciandos a respeito de sequências e séries infinitas. A identificação desses conhecimentos nos deu, evidentemente, argumentos para elaborar, selecionar e organizar atividades para serem aplicadas no decorrer do restante do processo formativo, cujos dados serão futuramente publicados.

Nessa formação assumimos o pressuposto de que o professor de Matemática deve ter conhecimentos para o ensino dos conteúdos indicados pelo currículo tendo a perspectiva do desenvolvimento das competências e habilidades previstas. Assim, ele deve ser capaz de mobilizar os objetos de conhecimento de sua área para que os alunos desenvolvam dentre diversas competências específicas da matemática, a capacidade de enfrentamento de situações-problema em múltiplos contextos: individual, social, ocupacional e científico. É importante que se proponha situações de aprendizagem não incluindo somente os contextos da vida real, mas também situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o prático-utilitário, mas que potencializem de fato a capacidade de generalização e abstração.

Considerando esse pressuposto e em articulação com as competências gerais da Educação Básica e com as da área de Matemática do Ensino Fundamental, a BNCC procura garantir aos estudantes do Ensino Médio o desenvolvimento de cinco competências específicas. Para o processo formativo, optamos pela Competência Específica 5 da área, assim enunciada no documento:

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (Brasil, 2018, p.531).

Cabe ainda considerar que incluir noções de Cálculo Diferencial no Ensino Médio não significaria simplesmente preparar o aluno para o Ensino Superior, mas sobretudo, contribuir para a formação geral do aluno de modo a desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes. Compartilhamos assim da pressuposição de que a Matemática tem um papel não apenas de adquirir conceitos, ferramentas e linguagem para resolver e comunicar problemas reais, mas relevante também para o desenvolvimento da capacidade de abstração, de imaginação e de consideração de novas perspectivas.

Portanto, é nessa direção que propusemos desenvolver nosso processo formativo com participantes desta pesquisa, estudantes de Licenciatura em Matemática, que poderão ensinar noções de cálculo no Ensino Médio.

2 Marco Teórico

Levando em consideração a elaboração e análise das questões que compõem o questionário inicialmente proposto, apoiamo-nos nas concepções de Tall e Vinner (1981) sobre a ideia de *imagem de conceito,* termo designado pelos autores para descrever toda a estrutura cognitiva associada a um determinado conceito matemático, incluindo todas as imagens mentais, ideias, representações visuais e descrições verbais relativas às propriedades e processos correlacionados.

De acordo com esses autores, a *imagem conceitual* se constitui no decorrer dos anos por meio de experiências de todos os tipos, evoluindo continuamente à medida que novos enfrentamentos são estimulados.

Outro estudo que foi considerado imprescindível para esta investigação foi a de Ball, Thames e Phelps (2008), tendo em vista que pretendíamos analisar os conhecimentos necessários para ensinar um conteúdo matemático. Esses teóricos detalham os conhecimentos profissionais do professor de Matemática utilizando as seguintes categorias: conhecimento comum do conteúdo, conhecimento horizontal do conteúdo, conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do conteúdo e do estudante, conhecimento do conteúdo e do ensino, conhecimento do conteúdo e do currículo. Neste artigo analisaremos especialmente o conhecimento especializado do conteúdo.

Segundo esses pesquisadores conhecimento do conteúdo especializado do professor é distinto do conhecimento especializado do matemático, visto que tem estreita ligação com a prática docente. Constitui-se da capacidade não apenas de perceber os erros dos estudantes, mas de analisar e identificar prováveis causas desses erros e apresentar, imediatamente, a eles, esclarecimentos precisos e respostas convincentes, a fim de ajudá-los a enfrentar e superar suas dificuldades. Esses conhecimentos são, portanto, necessários à docência, mas provavelmente não o são para nenhum outro propósito.

Quando o professor ensinar, por exemplo, a técnica para a obtenção da fração geratriz de uma dízima periódica pela multiplicação dos dois membros da igualdade por uma potência de base 10 (indicada em muitos livros didáticos), e subtrair essa nova igualdade da primeira, deverá enfatizar que esse procedimento só é possível, porque a série infinita em questão é convergente. Mas é relevante que o professor tenha disponíveis alguns contraexemplos de séries infinitas em que não se pode aplicar algumas propriedades da igualdade.

Por exemplo, aplicando propriedades para uma adição com número infinito de termos:

$$S = 1 + \frac{21}{10} + \frac{441}{100} + \frac{9261}{1000} + \cdots$$

Multiplicando os dois membros da igualdade

$$10S = 10\left(1 + \frac{21}{10} + \frac{441}{100} + \frac{9261}{1000} + \cdots\right)$$

$$10S = 10 + 21 + \frac{441}{10} + \frac{9261}{100} + \cdots$$

Colocando 21 em evidência no 2º termo da igualdade:

$$10S = 10 + 21.(1 + \frac{21}{10} + \frac{441}{100} + \frac{9261}{1000} + \cdots)$$
$$10S = 10 + 21.S$$
$$10S - 21S = 10$$
$$-11S = 10$$
$$S = -\frac{10}{11}$$

Nesse caso, a soma de infinitas parcelas positivas é um número negativo – o que consiste, evidentemente em absurdo, decorrendo da aplicação à série divergente, de propriedades válidas apenas para séries convergentes.

Um engenheiro certamente pode conhecer os significados de séries convergentes e de séries divergentes e reconhecer que as propriedades diferem, mas não é necessário que ele tenha disponíveis, de imediato, exemplos e contraexemplos. Portanto, segundo Ball *et al*. (2008), trata-se de conhecimento do conteúdo especializado, necessário ao professor, para que ele possa avaliar a viabilidade (ou não) de propor essa discussão em sala de aula.

3 Procedimentos Metodológicos

Esta investigação, de natureza qualitativa foi autorizada pela Comissão de Ética, sob o número CAEE: 52325821.2.30019847, número do parecer: 5.179.051. Ela foi realizada com sete futuros professores do curso de Licenciatura em Matemática na modalidade Educação a Distância (EaD) 100% online, com idade entre 29 e 45 anos, sendo a média dessas idades igual a 37,0 anos. Esses participantes já tinham cursado Cálculo Diferencial e Integral e se propuseram a constituir um grupo para estudar questões ligadas a possibilidades de exploração de noções de limite no Ensino Médio. Neste texto, usamos as referências Lic. (P), Lic. (E), Lic. (J) etc. para nomear os licenciandos participantes da pesquisa.

A coleta de dados ocorreu em duas fases. Na primeira, aplicamos um questionário de caráter diagnóstico para identificar conhecimentos dos licenciandos sobre a noção de limite, notadamente a possibilidade de se obter a soma dos infinitos termos de uma sequência. Este questionário foi respondido individualmente.

A segunda fase, denominada processo formativo, teve o objetivo de investigar se, atividades que explorem a noção de limite da soma dos infinitos termos de séries geométricas infinitas convergentes, poderiam ampliar a base de conhecimentos dos licenciandos por meio de reflexões compartilhadas sobre o ensino desses objetos na Educação Básica. Os encontros ocorreram no formato síncrono *via Microsoft Teams* e a realização das atividades propostas, foi realizada em grupos (duas duplas e um trio) aconteceram concomitantemente *via Google forms*. Sendo assim, a formação ocorreu sincronicamente:

(i) Cada grupo ficou alocado em salas separadas para resolver os problemas propostos;

(ii) Após a realização das atividades, os grupos foram convidados a voltarem à sala principal. Esse momento foi destinado para promover discussões entre grupos e pesquisador acerca dos itens abordados;

(iii) Logo depois, ocorria a institucionalização dos temas abordados nas atividades.

Para este artigo selecionamos os dados coletados de apenas uma das questões do questionário inicial, denominada neste artigo de "a igualdade" (Figura 1), e duas das situações discutidas na formação, denominadas de "a tarefa de João e a tarefa de Maria, do problema de João e Maria".

Figura 1 - Situação-problema proposta no Questionário Inicial

Questão 3: Você pode afirmar que 80 = 40 + 20 + 10 + 5 + 2,5 + 1,25 + 0,625 + ... ? Explique sua resposta.

Fonte: dados da pesquisa.

A situação apresentada no questionário inicial teve o propósito de fornecer informações sobre os conhecimentos dos estudantes a respeito da adição de infinitos termos de uma Progressão Geométrica decrescente. Foi solicitado aos participantes que analisassem a sentença matemática contendo uma adição com infinitas parcelas (PG decrescente) e discutissem a validade da igualdade apresentada.

Iniciamos o processo formativo, propondo a atividade denominada de Problema de João e Maria, para debater com os sete licenciandos a ideia de infinito. No primeiro encontro, discutimos a tarefa do João (Figura 2) e, no encontro seguinte, a tarefa de Maria (Figura 3). Essas atividades já haviam sido discutidas por Kindel (1998) com alunos da 7ª série do Ensino Fundamental e por Corbo (2012) com professores de Matemática em uma formação continuada.

Figura 2 - Problema de João e Maria: a tarefa de João

ATIVIDADE 1

João e Maria perderam-se na floresta. Na estrada havia muitas toras de madeira nos dois lados durante todo o percurso. Uma bruxa, que também andava pela floresta, quando os encontrou, deu-lhes uma tarefa como desafio. Se a tarefa fosse cumprida, estariam salvos, caso contrário morreriam. Cada uma das crianças deveria seguir por um dos lados da estrada. Ao João, a bruxa deu a seguinte tarefa: a primeira tora você colocará no saco. A segunda você cortará em dois pedaços iguais e colocará um deles no saco. A terceira você cortará em quatro pedaços iguais e colocará um deles no saco. A quarta você cortará em oito pedaços iguais e colocará um deles no saco. E assim por diante. a). Quais pedaços João colocará no saco? b) Represente essa situação, graficamente. c) Quanto ele colocará no saco? Justifique.

Fonte: dados da pesquisa.

A seguir propusemos a continuação da Atividade João e Maria, com a tarefa de Maria:

Figura 3 - Problema de João e Maria: a tarefa de Maria

Atividade 2: Maria, você pegará a primeira tora e a colocará no saco. A segunda você cortará em dois pedaços iguais e colocará um deles no saco. A terceira você cortará em três pedaços iguais e colocará um deles no saco. A quarta você cortará em quatro pedaços iguais e colocará um deles no saco. E assim por diante.

a) Quais pedaços Maria colocará no saco?

b) Represente a situação graficamente.

c) Quanto Maria colocará no saco? Justifique.

Finalmente, responda:

1) Ao compararmos o que cada um colocou no saco, o que se pode observar?

2) Quem carregará mais peso?

Fonte: dados da pesquisa.

Nossa intencionalidade em discutir essas duas tarefas foi a exemplificar e iniciar uma discussão com os futuros professores sobre séries convergentes (tarefa de João) e séries divergentes (tarefa da Maria).

4 Análise e Discussão dos Dados

Expomos a seguir a análise das questões propostas aos futuros professores e que foram selecionadas para este artigo.

4.1 Sobre a questão da igualdade

A respeito da questão proposta no questionário de entrada (figura 1) sobre a veracidade da igualdade uma de nossas expectativas possibilidades seria a de que os licenciandos realizassem procedimentos, obtendo somas "parciais" como:

$$S_1 = 40;$$
$$S_2 = 40 + 20 = 60;$$
$$S_3 = 40 + 20 + 10 = 70;$$
$$S_4 = 40 + 20 + 10 + 5 = 75;$$
$$S_5 = 40 + 20 + 10 + 5 + 2{,}5 = 77{,}5;$$
$$S_6 = 40 + 20 + 10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25 = 78{,}75;$$
$$S_7 = 40 + 20 + 10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25 + 0{,}625 = 79{,}375;$$
$$S_8 = 40 + 20 + 10 + 5 + 2{,}5 + 1{,}25 + 0{,}625 + 0{,}3125 = 79{,}6875.$$

Assim, esperávamos que fizessem conjecturas como: o que acontece à soma, se as parcelas forem aumentando? A soma aumentaria, mas cada vez menos, pois as parcelas a serem acrescentadas iriam ser cada vez mais menores e próximas de zero.

Dessa maneira, almejávamos que cada um desses licenciandos identificasse o padrão da série infinita de razão , ou seja, identificassem que os termos da série apresentada no 2º termo constituíam uma progressão geométrica (PG) de razão e que 80 é o limite dessa soma, utilizando possivelmente a fórmula apresentada no EM:

Analisando as respostas à questão apresentadas pelos futuros professores, nenhum identificou o 2º termo como a soma dos elementos de uma PG decrescente. O licenciando (E), embora tenha constatado que as parcelas tendem a zero, afirma que a soma de infinitas parcelas não dará 80, mostrando incompreensão (Figura 4).

Figura 4 - Protocolo Lic. (E)

③ Não. Por que percebe-se que se continuar somando os números conforme estão a mostra chegar-se-a a um número pequeno, próximo de zero, mas não dará 80, todo o cálculo.

Fonte: dados da pesquisa.

Constatamos no protocolo do licenciando (R) pensamento similar ao do lic. (E), conforme se observa no registro a seguir (Figura 5)

Figura 5 - Protocolo Lic. (R)

3. Não, pois ao se somar valores decimais sem u limitador do tamanho ou arredondamento, jamais se conseguirá chegar ao valor absoluto de 80,

Fonte: dados da pesquisa.

Já, o licenciando (K) identifica apenas a regularidade da sequência, porém não discute adequadamente a soma dos termos obtidos (Figura 6).

Figura 6 - Protocolo Lic. (K)

Percebo um padrão na decomposição do número 80, logo os nºs seguintes seriam:
9 3125 + 0,15625 ...

Fonte: dados da pesquisa.

Já, as respostas apresentadas pelos demais licenciandos são vagas e, neste caso, tampouco conseguiram identificar a regularidade das parcelas que compõem a série, ou seja, cada termo seguinte é obtido multiplicando-se o termo anterior por 0,5.

As respostas a essas questões indicam que o conceito da soma de infinitas parcelas não fazia, na época da aplicação do questionário, parte da imagem conceitual (Tall & Vinner, 1981) do grupo de licenciandos participantes de nosso estudo. Essa nossa interpretação pode ser justificada pelo fato de sequer identificarem que o 2º membro da igualdade tratava-se da soma de uma PG infinita e decrescente – item presente e valorizado nos currículos do EM.

Esse desconhecimento reduz as possibilidades de o futuro professor de selecionar e organizar boas atividades, empobrecendo, segundo Tall e Vinner (1981), também as possibilidades de ampliação da imagem conceitual, que está sendo desenvolvida pelos alunos, pela qual o professor é, a nosso ver, o principal responsável. Segundo Corbo (2012, p.177), "é o domínio que o professor tem a respeito do assunto que permitirá a transformação desse conhecimento em conhecimento a ser ensinado – acessível, compreensível aos alunos", ainda que se opte por uma abordagem apenas inicial do assunto.

Analisando os dados do ponto de vista de Ball, Thames e Phelps (2008) consideramos que as dificuldades explicitadas pelos futuros professores em relação a soma apresentada podem repercutir no ensino, pois não dominavam o conhecimento do conteúdo – comum e especializado.

4.2 Sobre o problema de João e Maria: a tarefa de João

A escolha da primeira atividade do processo formativo, "o problema de João e Maria: a tarefa de João" (Figura 7), decorreu de nossa análise da questão "a igualdade" solicitada no questionário inicial sobre os conhecimentos apresentados pelos licenciandos.

Figura 7 – a tarefa de João

Atividade de João e Maria: a tarefa de João

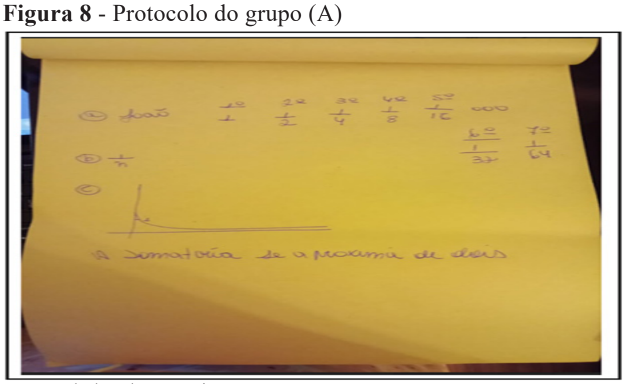
João e Maria perderam-se na floresta. Na estrada havia muitas toras de madeira nos dois lados durante todo o percurso. Uma bruxa, que também andava pela floresta, quando os encontrou, deu-lhes uma tarefa como desafio. Se a tarefa fosse cumprida, estariam salvos, caso contrário morreriam. Cada uma das crianças deveria seguir por um dos lados da estrada. Ao João, a bruxa deu a seguinte tarefa: a primeira tora você colocará no saco. A segunda você cortará em dois pedaços iguais e colocará um deles no saco. A terceira você cortará em quatro pedaços iguais e colocará um deles no saco. A quarta você cortará em oito pedaços iguais e colocará um deles no saco. E assim por diante. a). Quais pedaços João colocará no saco? b) Represente essa situação, graficamente. c) Quanto ele colocará no saco? Justifique.

Fonte: dados da pesquisa.

Pensávamos que a discussão entre eles pudesse avançar com a "tarefa de João". No entanto, até o momento de nossa intervenção nem todos os licenciandos reconheciam que em uma adição de infinitas parcelas, a soma não é necessariamente infinita, pois podiam tender a um número.

O grupo (A) fez menção sobre aproximação, indicando que a soma se aproxima de dois, mas não justifica (Figura 8).

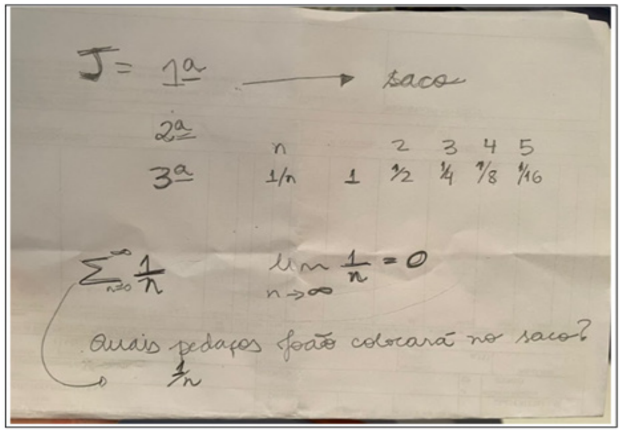
Figura 8 - Protocolo do grupo (A)



Fonte: dados da pesquisa.

Já o grupo (C) (Figura 8), além de verificar que os termos da sequência são obtidos a partir do termo geral , identificou que esses termos tendem a zero, usando a representação do Cálculo. Apesar disso, não perceberam que a soma tende a dois, diferentemente do grupo (A), que afirmou que a soma se aproximaria de dois.

Figura 9 - Protocolo do grupo (C)



Fonte: dados da pesquisa.

Já o grupo (B) fez uma resposta muito parecida com a do grupo (C): construiu a sequência, reconhecendo que as parcelas tendem a zero. O grupo (B) também não indicou que a soma estava se aproximando de dois.

As dificuldades de professores e estudantes com a ideia de infinito já foram analisadas por outros pesquisadores, como Corbo (2012) e Kindel (1998) utilizando a atividade de João e Maria. Kindel (1998), durante o desenvolvimento da atividade em uma sala do 8º ano do Ensino Fundamental, observou que:

> A ideia de infinito surge exatamente porque os alunos se permitem entrar no mundo da matemática, isto é, dividir uma tora ao meio, em seguida pegar esta metade e dividi-la ao meio, depois pegar esta metade e novamente cortá-la ao meio e assim sucessivamente. Este processo só é possível se a "serra é mágica", se a "tora é encantada", pois concretamente esbarraremos no limite físico deste cortar. No momento em que literalmente mudam a forma de produzir significado para o problema, eles começam a resolvê-lo. (Kindel, 1998, p.139).

Após a realização da atividade proposta, os grupos foram orientados a retornarem à sala principal para darmos início à plenária.

O Quadro 1, explicita algumas de nossas ações com o propósito de compartilhar algumas das discussões antes da institucionalização dos conceitos envolvidos na atividade "a tarefa de João".

Os resultados observados nos levaram a concluir que seria necessário retomar com os licenciandos alguns pontos sobre sequências e de limite tendendo ao infinito. No encontro seguinte, continuamos com o problema de João e Maria, mas analisando a tarefa de Maria (Figura 3).

Quadro 1 - Limite da soma de uma PG infinita

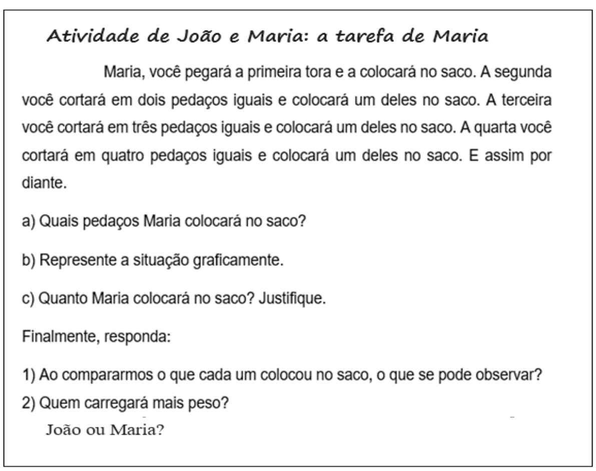
Algumas ações do pesquisador - Questões propostas	Concepções/registros/ações dos futuros professores participantes de nossa pesquisa	Objetivos das questões propostas na atividade observações do pesquisador
a) Todos vocês verificaram que João colocará os seguintes pedaços: De outra forma, a sequência numérica pode ser representada assim: {1, 0,5, 0,25, 0,125, 0,0625, ...}? Se continuarmos com a sequência, o que podemos observar em relação a cada termo?	Grupo (B) - Lic (P) "percebemos que cada tora que ele pegasse, ele dividia por um número maior". .... silêncio por alguns segundos "parcelas" vão se aproximando de zero, né!,	Objetivo: Ampliar o significado de sequências e séries numérica.
b) Vocês concordam, por exemplo, se o próximo pedaço que o João colocar no saco for então o próximo termo da sequência será 0,015625, pois 1÷64 = 0,015625. O pesquisador retoma dizendo: "tende a...."	...tende a zero "Lic (R) e (K)"	Objetivos: Retomar o conceito de PG; discutir a ideia de infinito; explorar a ideia de aproximação à medida que os números de termos da sequência vão aumentando o quanto desejarmos. Limite da soma de uma PG infinita decrescente.
Questões propostas e conclusão: "O João colocou a primeira tora, depois vocês disseram que ele guardou mais meia tora. Então, quantos pedaços João colocou no saco? Seguindo essa ideia: Se continuarmos seguindo essa ideia, aumentando cada vez mais o número de termos, qual a tendência dessa soma? A soma é infinita? Para sabermos o resultado dessa soma vamos retomar a ideia de PG. Vocês perceberam que os pedaços de tora de João formam uma PG de razão 1/2? Vamos verificar que a soma dos termos de uma PG infinita e decrescente não é infinita!	"Uma tora e meia ". Lic (R) e (K)" Não, está errado (R). A soma é infinita. São infinitos termos. Lic (P) "Sim, é verdade, dá infinito" (diversos) "Lic. (E): Pronto, vamos lá agora, vamos lá! 1+0,5+0,25+0,125+0,0625+ 0,03125+0,015625+0,0078125+0,0039 0625 = 1,99609375. "Então, no caso da soma, ela não tende a zero. Acho que nem a infinito. Se a gente continuar, eu acho que não vai passar de dois, talvez até pode chegar a dois, mas de dois não passa." PG? Não lembro mais Lic (A), (B) e (C).	

Fonte: dados da pesquisa.

4.3 Sobre o problema de João e Maria: a tarefa de Maria

Os três grupos se reuniram para discutir a "tarefa de Maria", no segundo encontro formativo (Figura 10)

Figura 10 – a tarefa de Maria


Atividade de João e Maria: a tarefa de Maria

Maria, você pegará a primeira tora e a colocará no saco. A segunda você cortará em dois pedaços iguais e colocará um deles no saco. A terceira você cortará em três pedaços iguais e colocará um deles no saco. A quarta você cortará em quatro pedaços iguais e colocará um deles no saco. E assim por diante.

a) Quais pedaços Maria colocará no saco?

b) Represente a situação graficamente.

c) Quanto Maria colocará no saco? Justifique.

Finalmente, responda:

1) Ao compararmos o que cada um colocou no saco, o que se pode observar?

2) Quem carregará mais peso?

João ou Maria?

Fonte: dados da pesquisa.

O objetivo dessa atividade foi o de estimular os licenciandos a buscarem soluções mediante os desafios encontrados na tarefa dada a Maria. Neste caso, a intenção toma por base o contexto imaginário, envolvendo as séries infinitas divergentes.

Separamos alguns trechos dos diálogos entre os membros de cada grupo, às questões da atividade 2.

- Sobre o comportamento da sequência numérica:

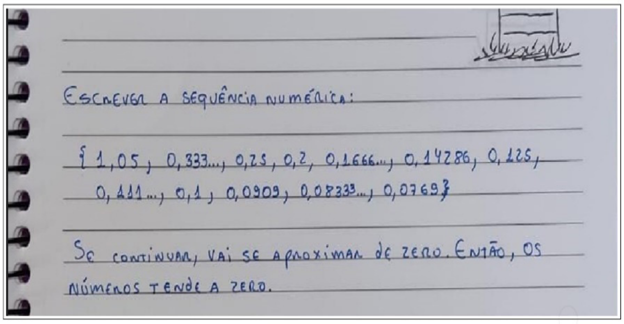
> [...] Percebemos que os números da sequência vão diminuindo e tende ao zero após a vírgula, e que o limite da sequência é zero, mas não atingirá zero "inteiro". A sequência vai diminuindo, tender a zero [...]. (GRUPO (C)).
> [...] Professor, muito didático isso, inclusive você perguntou se era possível ensinar limite no Ensino Fundamental, eu olhando aqui, é sim possível. É possível trabalhar esse conceito inicial de limite, não trabalhar com a fórmula, mas com essa ideia intuitiva de limite, sim. [...] (Lic. P GRUPO (A)).
> [...] A Maria foi colocando pedaços cada vez menor no saco. Mesmo ela achando várias toras ela vai aumentando a quantidade das toras, mas vai colocando cada vez menos no saco, isso altera alguma coisa na reta final? (Lic. V GRUPO (B)).
> [...] Esses pedaços vão tendendo a zero, mas nunca chegam ao "tamanho" de zero, e a sequência nunca terá um final, será infinitos pedaços, (Lic. R GRUPO (B)).

Verificamos, nesses registros, que não houve muitas dificuldades dos participantes em identificar que os termos da sequência tenderiam a zero.

A seguir, destacamos alguns fragmentos para ilustrar as diferentes ações para o cálculo da sequência numérica.

O grupo (A), conforme a Figura 11, escreve a primeira ideia que lhe vem ao entendimento, segundo a tarefa de Maria, e calcula a sequência numérica. O cálculo se mostrou eficaz, pois verificou que aumentando os termos da sequência, os novos termos vão ficando cada vez menores, concluindo que tenderão a zero caso continuasse.

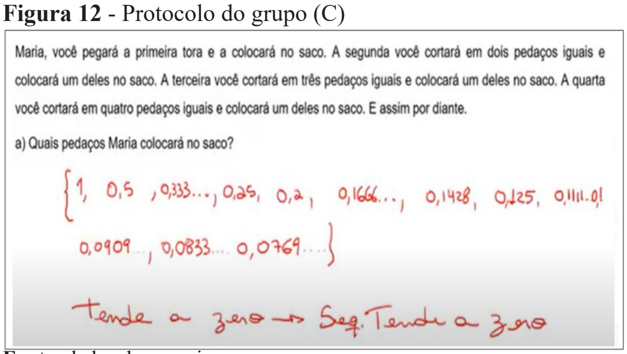
Figura 11- Protocolo do grupo (A)



Fonte: dados da pesquisa.

Com relação ao grupo (C), figura 12 responde de forma semelhante conforme pode-se observar:

Figura 12 - Protocolo do grupo (C)



Fonte: dados da pesquisa.

De forma similar aos grupos (A) e (C), o grupo (B) escreve a sequência numérica e anuncia igualmente que os termos da sequência tendem a zero. Em concordância com os casos exemplificados acima.

Na perspectiva de Ball *et al.* (2008), estes constituem um conhecimento especializado do conteúdo – implicam numa especificidade de raciocínio matemático. Isto é, usado "[...] ao procurar padrões nos erros dos alunos ou ao avaliar se uma abordagem não padronizada funcionaria em geral [...]" (Ball, Thames, Phelps, 2008, p.400, tradução nossa).

Quanto à nossa pesquisa, o Conhecimento Especializado do Conteúdo se relaciona com o conhecimento necessário para o entendimento das sequências e séries numéricas e representações propostas pelos estudantes, se de fato elas obedecem a um padrão ou condição proposta; se o termo geral da sequência numérica é funcional e serve para os demais termos e se as argumentações apresentadas pelos estudantes estão corretas de fato.

Podemos, por exemplo, nesse contexto, mencionar a terceira questão da atividade: "Quanto Maria colocará no saco? Justifique. Como a questão possibilita a determinação de uma nova série – série infinita, cabe ao professor analisar a validade da justificativa apresentada, mediante a determinação de outras soluções possíveis.

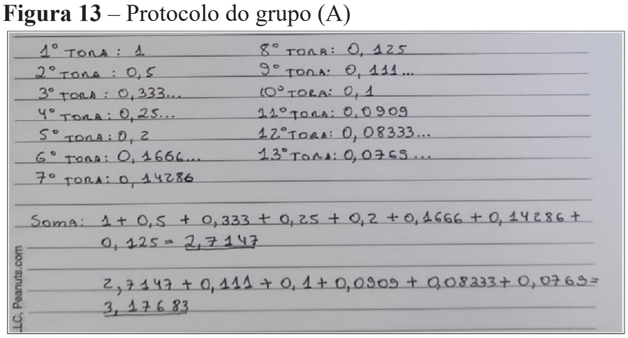
- Sobre o comportamento da soma das parcelas:

> [...] Vai depender do número de toras que ela vai colocar, apesar de colocar pedaços cada vez menores, vai tender a colocar sempre mais, nunca vai tender a um valor exato, com duzentas toras, se ela cortar duzentas toras, ela vai ter 5,87 mais ou menos dentro do saco. (GRUPO (B)).
> [...] A soma passa de dois, chega em três, quatro e passa de cinco e a Maria carregará mais tora que João, no caso tende ao infinito. (GRUPO (C)).
> [...] A soma passou de dois e de três e tende a passar de quatro, a soma vai "subindo" mais devagar por causa que as toras vão ficando menor ainda e não o limite é infinito. (GRUPO (A)).

A respeito desse item, os participantes procuraram determinar, dentro do contexto imaginário da personagem Maria, a quantidade que ela carregaria. Em tal caso, pudemos observar que não houve grande dificuldades inclusive, constataram que Maria carregaria mais toras do que João, ainda que tais quantidades não estivessem especificadas na atividade 2.

A Figura 13, a seguir, representa o registro dos participantes membros do grupo (A). Resposta elaborada usando o cálculo da soma dos infinitos termos, justificando as argumentações nos diálogos apresentados acima.

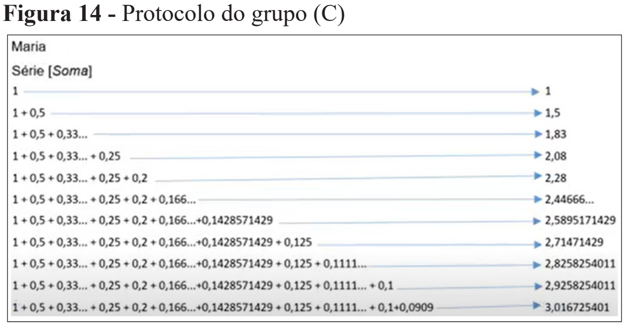
Figura 13 – Protocolo do grupo (A)



Fonte: dados da pesquisa.

Apresentamos a Figura 14, próxima, que corresponde ao protocolo dos participantes membros do grupo (C). Eles inseriram os dados numéricos numa tabela do Word para analisarem se a adição infinita produz algum número finito.

Figura 14 - Protocolo do grupo (C)



Fonte: dados da pesquisa.

O protocolo da Figura 14, do grupo (C), atesta o que cada um do grupo dizia acerca da soma, e que os licenciandos reconheceriam as sequências e as séries que estavam discutindo no encontro anterior, auxiliando a identificar tanto a sequência, quanto a série nessa atividade 2.

Prosseguindo com as discussões, os grupos passaram a analisar a questão de quem carregará mais peso.

As discussões entre os membros de cada grupo prosseguiram e após chegarem a um consenso sobre tudo aquilo que estavam dizendo e diante do que havia sido calculado, concluem que Maria carregará mais peso.

- Sobre quem carregaria mais peso, João ou Maria

> [...] Maria colocou mais toras e o João colocou duas, chegou nem duas no caso, tende a duas toras. GRUPO (C)).
> [...] Ambas sequências tendem a zero, o limite da sequência é zero. É Maria, porque ela tá fracionando bem menos e carrega mais quantidade. (GRUPO (A)).
> [...] Maria colocou mais peso no saco, porque o João, a soma estava tendendo a 2 inteiros. (GRUPO (B)).

Em nossa análise, pudemos observar que os participantes trilharam caminhos bem próximos para concluírem a atividade.

Esse foi um momento rico, pois se encaminhou para a possibilidade de discutir que a série infinita da personagem Maria era divergente, enquanto a série obtida pelo personagem João era convergente, uma vez que convergia para o número dois.

Essas respostas parecem atestar que a nossa estratégia de propor o problema do João e Maria possibilitou uma boa discussão de noções de limites no infinito.

5 Conclusão

Neste artigo apresentamos e discutimos parte de uma pesquisa realizada sobre conhecimentos necessários ao futuro professor de Matemática para a exploração de noções de limite no Ensino Médio.

Nessas considerações cabe reiterar e ampliar nossas justificavas sobre a escolha de iniciar uma discussão sobre sequências, séries e limites com os participantes da pesquisa. Essas escolhas decorrem do resultado de nossas compreensões das leituras de textos sobre investigações e de práticas – de ensino e de pesquisa – a respeito do que seria imprescindível e do que poderia ser tratado em segundo plano no processo de ensino e de aprendizagem do tema com estudantes de Licenciatura em Matemática, sobretudo na modalidade EaD.

Além dos pressupostos já expostos neste artigo compartilhamos também das ideias de Villani, Bernardi, Zoccante e Porcaro (2012) quando discutem, por exemplo, que em cursos de Análise pode ser preferível uma abordagem a partir de sequências e não de funções, tendo em vista que o conceito de função real está situado em um nível de dificuldade bastante alto. Todavia, o que se faz frequentemente é "rebaixar" as sequências para um caso particular: funções cujo domínio é um subconjunto dos Naturais.

Ainda que se considere a noção de sequência numérica como também abstrata, porque implica a existência de uma infinidade potencial de números, uma base de concretude fundada na ideia de que os primeiros termos da sequência podem ser previstos e determinados à medida que tende ao infinito – pelo menos nos casos mais simples. Já no caso das funções reais encontramos um nível de abstração muito mais alto, porque o conhecimento dos valores assumidos por uma função, mesmo de um número infinito de pontos, geralmente não nos permite inferir de imediato o comportamento da função na maioria dos outros valores. Portanto, somos incapazes de dominar completa e explicitamente a tendência de uma função, mesmo em um intervalo "muito pequeno" de seu domínio. Para isso, precisamos de ferramentas poderosas.

Segundo Villani *et al.* (2012), uma abordagem inicial do cálculo por meio sequências respeitaria, portanto, a gradação da abstração – e da gênese histórica – favorecendo antecipar conceitos fundamentais – em particular o de limite – em um contexto mais simples, que podem ser trabalhados muito antes do estudo das funções reais.

Levamos esses aspectos em conta para a seleção das atividades sobre sequências e séries e os respectivos contextos, desenvolvidas no processo formativo, considerando dois critérios:

- objetos de conhecimento que realmente constam nos currículos de Matemática para os últimos anos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio baseados na BNCC;
- objetos de conhecimento que podem ser explorados em cursos de Licenciatura, tendo em vista a formação necessária para esses futuros professores de Matemática ensinarem esses conteúdos a alunos da Educação Básica. Ou seja, os futuros professores precisam construir conhecimentos para o ensino segundo as categorias de Ball *et al* (2008).

Esta pesquisa revelou inicialmente concepções inconsistentes dos futuros professores sobre sequências, séries e, consequentemente, sobre a noção de limite, o que constituiu o ponto de partida para o processo de formação e pesquisa com esses participantes.

As discussões e reflexões propostas durante esse processo, ampliaram a imagem conceitual dos licenciandos, relativa às noções referidas, ainda que não plenamente satisfatória, sobretudo no que concerne à importância do componente formal, no desenvolvimento de noções relativas a esse conteúdo.

Podemos dizer também que os estudantes ampliaram sua base de conhecimentos para o ensino das noções abordadas, sobretudo o conhecimento especializado do conteúdo, além do conhecimento do conteúdo e do ensino.

Finalizando, ainda há muito que se pesquisar sobre a exploração de noções relativas ao Cálculo na Educação Básica e, consequentemente, sobre a formação de professores de Matemática para esse ensino.

Referências

Burigato, S.M.M.S. (2019). Um estudo sobre a aprendizagem do conceito de limite de função por estudantes nos contextos Brasil e França. (Tese de doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content

Knowledge for Teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education. 59(5),389-407. doi: 10.1177/0022487108324554

Cabral. T., C. B., Baldino. R. R. (2006). Cálculo infinitesimal para um curso de engenharia. Revista de Ensino de Engenharia, 25(1), 3-16.

Corbo. O. (2012). Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica. (Tese de doutorado em Educação Matemática). Universidade Bandeirantes. São Paulo.

Kindel. D. S. (1998). Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade. (Dissertação de Mestrado). Universidade Santa Úrsula. Rio de Janeiro.

Lüdke. M., Ivenicki. A. (2022). Teoria e prática na formação de professores: Brasil, Escócia e Inglaterra. Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação, 30, 579-597. doi: 10.1590/S0104-40362022003003648

Martins. J. J. C. (2023) Resolução de problemas de resistência dos materiais: um experimento de ensino envolvendo etapas da modelagem (Tese de doutorado em Educação Matemática). São Paulo: Centro Universitário Anhanguera de São Paulo.

Souza. R. F. (2023). Um estudo sobre conhecimentos necessários ao futuro professor de Matemática para a exploração de noções de limite no Ensino Médio. (Tese de doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, (12), 151-169. doi: 10.1007/BF00305619.

Villani, V., Bernardi, C., Zoccante, S., Porcaro., & Porcaro, R. (2012). Non solo calcoli: Domande e risposte sui perché della matemática. Springer. doi: 10.1007/978-88-470-2610-0.