

## REPRESENTAR OPERAÇÕES DE DIVISÃO E REPRESENTAR PROBLEMAS DE DIVISÃO: HÁ DIFERENÇAS?

Alina Galvão Spinillo<sup>1</sup>

Síntria Labres Lautert<sup>2</sup>

Universidade Federal de Pernambuco

Núcleo de Pesquisa em Psicologia da Educação Matemática - NUPPEM<sup>3</sup>

### RESUMO

O estudo examinou como crianças com diferentes níveis de instrução sobre a divisão lidam com este conceito em atividades tipicamente escolares: problemas verbais e operações. Sessenta crianças foram solicitadas a representar operações e problemas de divisão através de grafismos e de material concreto. Os dados foram analisados em função dos grafismos adotados e do nível de explicitação dos procedimentos de resolução. Tanto na realização das operações como dos problemas, as crianças instruídas sobre a divisão utilizavam grafismos simbólicos; enquanto as não instruídas adotavam grafismos simbólicos nas operações e grafismos simbólicos e pictográficos nos problemas. Concluiu-se que as representações expressam tanto o conhecimento das crianças sobre a divisão como os limites e as possibilidades conferidas pelos suportes de representação disponibilizados e, sobretudo, pela relação das quantidades com os seus referentes, relação esta mais evidente nos problemas do que nas operações.

**Palavras chave:** conceito de divisão, representação, operações, problemas verbais, crianças.

---

<sup>1</sup> [alinaspinillo@hotmail.com](mailto:alinaspinillo@hotmail.com)

<sup>2</sup> [sintrialautert@gmail.com](mailto:sintrialautert@gmail.com)

<sup>3</sup> Este trabalho recebeu apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e da FACEPE sob forma de bolsa de estudos para realização de mestrado da segunda autora sob orientação da primeira.

## REPRESENTING DIVISION OPERATIONS AND REPRESENTING DIVISION PROBLEMS: IS THERE A DIFFERENCE?

### ABSTRACT

This study examined how children with different levels of instruction in division deal with this concept in typical school activities: word problems and operations. Sixty children were asked to represent division operations and division word problems through graphic representations and concrete material. The data was analyzed according to the graphic representations adopted and the explicitness of the solution procedures. The children who were instructed about division used symbolic representations systematically; while those who did not use symbolic representation in the operations, and symbolic and pictographic representation in the word problems. The conclusion was that the representations express children's knowledge of division, as well as the limits and possibilities offered by the representational supports available and, especially, by the relation between quantities and their referents, which is more evident in the word problems than in the operations.

**Keywords:** concept of division, representation, operations, word problems, children

Como documentado na literatura, algumas das dificuldades das crianças em lidar com a matemática decorrem da não compreensão dos sistemas simbólicos utilizados no contexto escolar. Pesquisadores na área enfatizam que o desenvolvimento e a compreensão de conceitos matemáticos estão imbricados no estabelecimento de relações entre os diversos sistemas e suportes de representação, e que raciocinar matematicamente depende tanto da lógica do indivíduo como de sua capacidade de utilizar e dominar esses sistemas (e.g., Brizuela, 2006; Carraher, Carraher & Schliemann, 1995; Moro & Soares, 2005; Nunes & Bryant, 1997; Schliemann, 1998; Spinillo & Lautert, 2002). Sendo assim, as representações surgem como um campo de investigação particularmente interessante e relevante, sobretudo em relação a conceitos lógico-matemáticos complexos que são um desafio para aquele que aprende e para aquele que ensina; como é o caso, por exemplo, do conceito de divisão no ensino fundamental.

Nos últimos anos pesquisadores brasileiros tem investigado diferentes aspectos acerca do conhecimento de crianças sobre a divisão: suas concepções iniciais, as estratégias que adotam na resolução de problemas e o papel desempenhado por diferentes suportes de representação.

No que concerne às concepções iniciais, estudos envolvendo tarefas não computacionais mostram que, desde muito cedo, as crianças apresentam uma compreensão intuitiva acerca das relações inversas entre os termos da divisão; compreendendo, por exemplo, que quanto mais coelhinhos houver em um grupo, menos bombons cada um deles receberá, e vice-versa (Correa, 2006; Correa, Nunes & Bryant, 1998; Brito & Correa, 2004; Correa & Spinillo, 2004). Lautert e Spinillo (2002) investigaram as relações entre o desempenho na resolução de problemas de divisão e as concepções de crianças de 5 a 9 anos a respeito da divisão. As concepções foram examinadas a partir de definições sobre a divisão, as quais variavam desde concepções que não envolviam um significado matemático até aquelas que expressavam um significado matemático de natureza geral (associado a outras operações que não a divisão) ou um significado matemático especificamente associado à divisão. Os dados mostraram que as crianças atribuem um significado matemático à divisão antes de adotarem procedimentos apropriados na resolução dos problemas.

As estratégias adotadas na resolução de diferentes tipos de problemas de divisão (por partição e por quotas) foram examinadas, sobretudo a partir do uso de material concreto e de outros suportes de representação (e.g.; Batista & Spinillo, 2008; Borba, Selva, Spinillo & Sousa, 2004; Spinillo & Lautert 2006a; Selva, 1998; Selva & Borba, 2005). Selva (1998), por exemplo, investigou o desempenho e as estratégias adotadas por crianças de 6 a 8 anos na resolução de problemas de divisão exata e inexata em três situações distintas: fichas, lápis e papel e sem material (cálculo mental). Além da idade e da escolaridade, o desempenho era influenciado pela situação, de maneira que a representação concreta e a gráfica propiciavam desempenho superior àquele obtido na situação que envolvia apenas o cálculo mental. Observou-se, ainda, que o uso de fichas limitava o uso de estratégias flexíveis, gerando representações relativas apenas ao enunciado do problema e não ao processo de resolução adotado. O uso de papel e lápis, por sua vez, permitia uma maior flexibilidade para lidar com os dados dos problemas, gerando estratégias mais efetivas.

As estratégias de resolução também são influenciadas pela natureza do material concreto disponibilizado, como mostram Batista e Spinillo (2008) ao investigarem crianças de 8 anos resolvendo os mesmos problemas de divisão a partir de dois tipos de suporte de representação: material concreto neutro (fichas) e material concreto definido (objetos relativos ao enunciado dos problemas: jarros e flores, carros e caixas). Observou-se que o material concreto definido permitia que a criança acompanhasse o processo de resolução ao mesmo tempo em que mantinha sua atenção voltada para o significado do problema; diferentemente do material concreto neutro que pouco contribuía para a resolução. Segundo as autoras, o material concreto definido auxiliava o processo de resolução mais do que o material concreto neutro, pois indicava de forma clara a que quantidades os objetos se referiam, por exemplo, carrinhos representam o dividendo e caixinhas o divisor. Já o material concreto neutro não indicava de forma clara esta relação, visto que fichas podiam tanto representar o dividendo quanto o divisor. Com base nesses resultados, concluiu-se que nem todo material concreto tem o mesmo efeito sobre a resolução de problemas e que não é a concretude do material que necessariamente propicia o uso de estratégias mais apropriadas, mas a presença de referentes para as

quantidades; inclusive favorecendo a formação de agrupamentos, ação importante para a compreensão de conceitos próprios das estruturas multiplicativas, como é o caso da divisão.

Tomadas de forma conjunta, essas pesquisas fornecem informações relevantes acerca do desenvolvimento do conceito de divisão. As tarefas adotadas nesses estudos, entretanto, nem sempre correspondem às atividades tipicamente escolares com as quais as crianças se deparam em sala de aula. No contexto escolar, as atividades mais frequentemente propostas são a resolução de problemas verbais e a resolução de operações. Parece ser relevante compreender como as crianças lidam e representam operações e problemas de divisão semelhantes àqueles que fazem parte do cotidiano escolar. Uma tentativa nessa direção foi o estudo realizado por Lautert e Spinillo (1999) em que as autoras investigaram *como* a criança representa (grafismos adotados) e o *que* representa (termos da divisão) quando solicitada a resolver operações de divisão. Nesse estudo, alunos da educação infantil e dos anos iniciais do ensino fundamental foram solicitados a representar e a resolver operações de divisão inexata usando de suportes gráficos (lápis e papel) e concretos (fichas). Verificou-se que o simbolismo matemático foi amplamente adotado, observando-se um efeito da escolaridade apenas em relação ao grau de explicitação dos procedimentos de resolução representados, visto que o avanço em escolaridade propiciava, na situação gráfica, o uso de representações mais elaboradas do que na situação concreta (fichas).

Dando continuidade ao estudo acima, e ampliando os dados encontrados, a presente investigação procurou examinar como as crianças com diferentes níveis de instrução sobre a divisão lidam com este conceito em atividades tipicamente escolares: problemas verbais e operações. Dois aspectos são tomados para análise: a maneira como representam a divisão e os elementos da divisão que representam ao resolver operações e problemas de divisão inexata. Optou-se pela divisão inexata para tornar possível examinar como a criança representa todos os termos da divisão (dividendo, divisor, quociente), inclusive o resto.

## MÉTODO

### Participantes

Sessenta crianças brasileiras de classe média, alunas de escola particular da cidade do Recife foram igualmente divididas em três grupos. As crianças do Grupo 1 (média de idade: 6a 3m) não haviam sido formalmente instruídas sobre a divisão; as do Grupo 2 (média de idade: 7a 10m) já haviam iniciado o aprendizado formal sobre a divisão, resolvendo problemas e operações de divisão exata com divisor de um algarismo; e as crianças do Grupo 3 (média de idade: 8a 9m) já haviam sido formalmente instruídas sobre a divisão, usando o algoritmo de resolução em operações e problemas de divisão exata e inexata com divisor de dois algarismos.

### Planejamento experimental, procedimento e material

Esta investigação consistiu em dois estudos que combinam, como no contexto escolar, dois tipos de suportes de representação: concreto e gráfico. O Estudo 1 versava sobre a representação de operações de divisão inexata através de lápis e papel e de material concreto neutro (fichas plásticas de uma mesma cor). O Estudo 2 versava sobre a representação de problemas de divisão inexata através de lápis e papel e de material concreto definido (objetos relativos ao enunciado dos problemas: caixas, carros, flores e vasos)<sup>4</sup>. O material concreto disponibilizado era sempre em número superior àquele presente no enunciado dos problemas e das operações (mais fichas ou mais caixas e carrinhos do que a quantidade indicada no enunciado da operação ou do problema).

As operações e os problemas, apresentados um por vez, eram: ‘Dezesseis dividido por cinco’ e ‘Dezenove dividido por três’; ‘Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha?’ e ‘Marta tinha 19 rosas e queria colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos será que ela vai precisar?’ Através de uma entrevista clínica, solicitava-se que a criança

---

<sup>4</sup> Adotou-se aqui a diferenciação feita por Batista e Spinillo (2008): material concreto neutro e material concreto definido.

explicasse o que havia feito tanto através de lápis e papel como através do material concreto.

Todas as crianças realizaram ambos os estudos, sendo individualmente entrevistadas em duas sessões (com intervalo de três a sete dias entre elas) que foram filmadas. A ordem de apresentação dos estudos foi randomizada de forma que metade dos participantes em cada grupo realizava as operações (Estudo 1) na primeira sessão e os problemas (Estudo 2) na segunda; e a outra metade o inverso. Em cada sessão, disponibilizava-se primeiro lápis e papel, e em seguida o material concreto (neutro ou definido); evitando-se, assim, que na situação gráfica a criança desenhasse os objetos apresentados na situação concreta, como ocorrera em estudo piloto previamente realizado.

### **Sistema de análise**

Com base no estudo de Lautert e Spinillo (1999) as representações foram analisadas em função da maneira como a criança representava a divisão (grafismos adotados) e em função dos termos da divisão que eram representados (divisor, dividendo, quociente e resto) tanto em relação às operações como em relação aos problemas.

### **Análise dos grafismos: como a criança representa operações e problemas**

Com base no estudo de Hughes (1986), os grafismos em ambos os estudos foram classificados da seguinte maneira:

*Indiosincrático*: grafismos com pouca ou nenhuma relação com a operação ou problema apresentado. Exemplo:

Figura 1: 'Marta tinha 19 rosas e queria colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos será que ela vai precisar?'



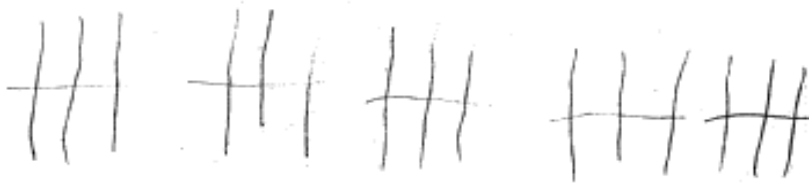
*Pictográfico:* desenho dos objetos relativos ao enunciado. Exemplo:

Figura 2: 'Marta tinha 19 rosas e queria colocar 3 rosas em cada vaso. Quantos vasos será que ela vai precisar?'



*Ícônico:* grafismos (traços, riscos, círculos) relativos aos elementos e às quantidades da operação ou do problema. Essas representações podiam ser exclusivamente icônicas ou combinadas com desenhos. Exemplo:

Figura 3: 'Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha?'





*Simbólico*: símbolos convencionais (números, sinais) e linguagem natural, podendo ser representações exclusivamente simbólicas ou combinadas com representações icônicas. Exemplos:

*Figura 4*: Operação (19:3) representada por uma criança através de números (à esquerda) e por outra criança através de linguagem natural combinada com números (à direita).

$$\begin{array}{r} 19 \mid 3 \\ - 18 \ 6 \\ \hline 01 \end{array}$$

19 dividido por 3

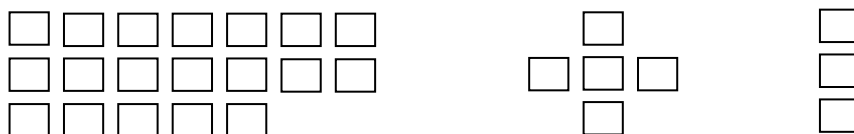
### **Análise dos termos da divisão: o que a criança representa**

A análise dos termos contemplados nas representações (dividendo, divisor, quociente e resto) permitiu classificar os procedimentos de resolução em diferentes tipos, como descrito e exemplificado a seguir:

*Tipo 1 (sem relação)*: sem relação aparente com o enunciado da operação ou do problema e sem tentativa de resolução. Exemplo: (ver Figura 1).

*Tipo 2 (enunciado)*: a representação se restringe ao enunciado da operação ou do problema, ou seja, a representação do dividendo e do divisor, sem que haja uma tentativa de resolução (como ilustrado na representação à direita na Figura 4). Algumas representações incluem sinais indicadores de operação aritmética. Exemplo:

*Figura 5*: Operação (19:3). As quatro fichas em cruz representam o sinal de adição.



*Tipo 3 (resolução sem o uso da divisão):* a representação envolve a resolução da operação ou do problema a partir de outras operações que não a divisão (geralmente adição e subtração). Portanto, o divisor, o dividendo e o resultado são representados, ainda que de forma incorreta, podendo incluir sinais indicadores da operação realizada. Exemplo:

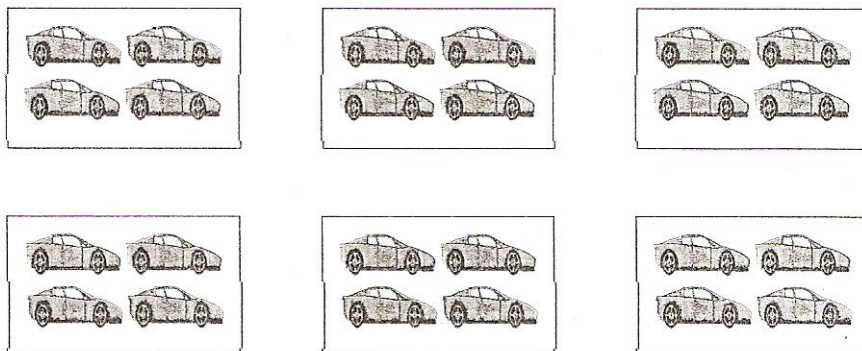
*Figura 6:* 'Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha?'

$$\begin{array}{r} -16 \\ 5 \\ \hline 11 \end{array}$$

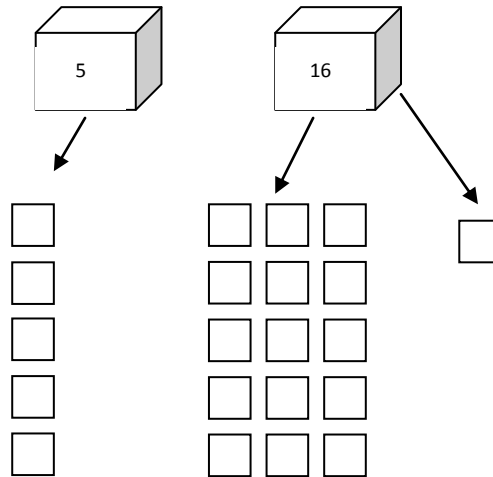
Pedro tinha que colocar 11 carrinhos em cada caixinha.

*Tipo 4 (resolução pela divisão):* a representação envolve a resolução da operação ou do problema a partir da divisão (aplicada de forma correta ou incorreta). Portanto, o divisor, o dividendo e o quociente são representados, podendo incluir sinais indicadores da operação realizada. O resto raramente é representado (ver também Figuras 3 e 4). Exemplos:

*Figura 7:* 'Pedro havia comprado 16 carrinhos e tinha 5 caixinhas. Ele queria colocar o mesmo número de carrinhos em todas as caixinhas. Quantos carrinhos ele tinha que colocar em cada caixinha?'



*Figura 8:* Operação (16:5). Inicialmente a criança faz pilhas de fichas que representam o divisor (5) e o dividendo (16). Em seguida, desmembra essas pilhas, conforme indicado pelas setas, passando agora a representar o quociente (3) e o resto (1).



Os procedimentos e os grafismos foram analisados por dois juizes independentes cujo percentual de concordância foi de 96%. Os casos de discordância foram analisados por um terceiro juiz, também independente, cujo julgamento foi considerado final.

## RESULTADOS

### **Como as crianças representam graficamente operações e problemas de divisão: o lápis e papel como suporte de representação**

Como mostra a Tabela 1, ao resolver operações (Estudo 1), as crianças dos três grupos amplamente adotam grafismos simbólicos. Isso também é observado em relação aos problemas (Estudo 2) no Grupo 2 e no Grupo 3, porém não em relação ao Grupo 1 (sem instrução sobre a divisão) que usa tanto grafismos pictográficos (47,5%) como simbólicos (47,5%).

*Tabela 1: Porcentagem dos tipos de grafismos por grupo em cada estudo (máximo: 40).*

<i>Estudo 1 (Operações – lápis e papel)</i>				
	<i>Idiossincrático</i>	<i>Pictográfico</i>	<i>Ícônico</i>	<i>Simbólico</i>
<i>Grupo 1</i>	0	0	7,5	92,5
<i>Grupo 2</i>	0	0	0	100
<i>Grupo 3</i>	0	0	5	95
<i>Estudo 2 (Problemas – lápis e papel)</i>				
<i>Grupo 1</i>	2,5	47,5	2,5	47,5
<i>Grupo 2</i>	0	7,5	5	87,5
<i>Grupo 3</i>	0	5	7,5	87,5

Nota-se que o padrão de resultados não é o mesmo nos três grupos de participantes. Para as crianças que já haviam recebido alguma instrução a respeito da divisão (Grupo 2 e 3), tanto operações como problemas eram representados a partir de grafismos simbólicos. Por outro lado, para as crianças que não receberam tal instrução (Grupo 1), as operações eram fundamentalmente representadas por símbolos (92,5%), enquanto os problemas, além dos grafismos simbólicos (47,5%), também eram representados por grafismos pictográficos (47,5%) que eram desenhos relativos aos referentes das quantidades presentes no enunciado dos problemas (carros, caixas, flores, vasos). Nas operações isso não ocorria. O uso de grafismos pictográficos, portanto, foi observado com maior frequência entre as crianças do Grupo 1 quando resolvendo problemas.

### **Como as crianças utilizam material concreto em operações e problemas de divisão: objetos como suporte de representação**

Como ilustrado na Tabela 2, as crianças que não haviam sido instruídas sobre a divisão (Grupo 1) utilizam o Tipo 4 apenas na resolução dos problemas.

Diferentemente das crianças dos outros dois grupos que adotam as representações do Tipo 4 tanto nas operações como nos problemas.

*Tabela 2: Porcentagem dos tipos de procedimento por grupo em cada estudo (máximo: 40).*

<i>Estudo 1 (Operações – lápis e papel)</i>				
	<i>Tipo 1</i>	<i>Tipo 2</i>	<i>Tipo 3</i>	<i>Tipo 4</i>
<i>Grupo 1</i>	7,5	55	37.5	0
<i>Grupo 2</i>	0	0	5	95
<i>Grupo 3</i>	0	15	0	85
<i>Estudo 2 (Problemas – objetos)</i>				
<i>Grupo 1</i>	20	40	2.5	37.5
<i>Grupo 2</i>	0	2.5	15	82.5
<i>Grupo 3</i>	0	0	2.5	97.5

*Nota:* Tipo 1: representação sem conexão visível com a operação/problema; Tipo 2: representação do enunciado; Tipo 3: representação do procedimento com resolução através de outras operações que não a divisão; Tipo 4: representação do procedimento com resolução através da divisão.

No Estudo 1 (operações), as crianças do Grupo 1 tendiam a representar apenas o enunciado (Tipo 2: 55%), utilizando as fichas para representar apenas o divisor e o dividendo. Já as crianças do Grupo 2 e do Grupo 3 resolviam através da divisão (Tipo 4: 95% e 85% respectivamente) havendo um percentual bem menor de representações limitadas ao enunciado (Tipo 2: 15% apenas no Grupo 3) e envolvendo outras operações (Tipo 3: 5% apenas no Grupo 2). O que se nota é que representações limitadas ao enunciado da operação (divisor e dividendo) são mais frequentes quanto menor o nível de instrução sobre a divisão; enquanto que à medida que a compreensão sobre a divisão aumenta, surgem representações que incluem o processo de resolução e o quociente.

Quanto aos problemas (Estudo 2), a quase totalidade das representações é do Tipo 4 (Grupo 2: 82,5% e Grupo 3: 97,5%), o que significa representar o dividendo, o divisor, o processo de resolução e o quociente. Nota-se, ainda, que do Grupo 1 para o Grupo 2 há uma diminuição na diversidade de procedimentos adotados para representar os problemas. Provavelmente, na medida em que aumenta o conhecimento sobre a divisão, as crianças passam a utilizar amplamente a operação de divisão (correta ou incorretamente aplicada) para resolver os problemas.

Comparando o Estudo 1 (operações) com o Estudo 2 (problemas), nota-se que as operações levam as crianças com pouca (Grupo 2) ou nenhuma instrução (Grupo 1) sobre a divisão a representar o enunciado apenas; enquanto que os problemas levam a representar os procedimentos de resolução. O resto foi raramente representado quer no Estudo 1 quer no Estudo 2, mesmo quando a resolução estava correta.

### **As relações entre grafismos e formas de resolver operações e problemas de divisão**

A Tabela 3 ilustra as relações entre grafismos e formas de resolver operações e problemas de divisão.

*Tabela 3:* Número de procedimentos de resolução por tipos de grafismos no Estudo 1 (operações) e no Estudo 2 (problemas).

<i>Estudo 1 (Operações - lápis e papel)</i>				
	Idiossincrático (n= 0)	Pictográfico (n= 0)	Icônico (n= 5)	Simbólico (n= 115)
<i>Tipo 1</i>	0	0	1	2
<i>Tipo 2</i>	0	0	2	26
<i>Tipo 3</i>	0	0	0	17
<i>Tipo 4</i>	0	0	2	70

<i>Estudo 2 (Problemas - lápis e papel)</i>				
	Idiossincrático (n= 1)	Pictográfico (n= 24)	Icônico (n= 6)	Simbólico (n= 89)
<i>Tipo 1</i>	1	3	0	4
<i>Tipo 2</i>	0	5	0	12
<i>Tipo 3</i>	0	0	0	8
<i>Tipo 4</i>	0	16	6	65

*Nota:* Tipo 1: representação sem conexão visível com a operação/problema; Tipo 2: representação do enunciado; Tipo 3: representação do procedimento com resolução por outras operações; Tipo 4: representação do procedimento com resolução através da divisão.

Tanto nas operações (Estudo 1) como nos problemas (Estudo 2), os grafismos simbólicos são amplamente adotados seja para representar o enunciado apenas (Tipo 2), seja para representar os procedimentos de resolução e o resultado obtido (Tipo 4). No entanto, os grafismos pictográficos, presentes apenas quando na resolução dos problemas (Estudo 2), foram mais frequentes nos procedimentos Tipo 4 do que nos demais tipos.

## CONCLUSÕES E DISCUSSÃO

A principal conclusão derivada deste estudo é que as representações das crianças ao lidarem com operações e problemas de divisão diferem. A diferença emerge tanto em relação aos grafismos utilizados como em relação aos termos da divisão que são contemplados nessas representações.

Em relação aos grafismos, na situação em que lápis e papel eram disponibilizados, as crianças empregavam basicamente símbolos, especialmente quando representando as operações. A preferência por grafismos simbólicos mais do que por grafismos icônicos e pictográficos não corresponde ao que outros pesquisadores observaram em crianças da mesma faixa etária ao representarem a adição e a subtração (e.g., Hughes, 1986; Sinclair; Mello & Siegrist, 1989; Zunino, 1995). Uma possível explicação para essa divergência é que nesses estudos a criança tinha que representar a ação do examinador ou a sua própria ao manipular objetos, o que a levava a desenhar (grafismos pictográficos) os objetos e as ações que via o examinador realizar ou que ela própria realizava. Os desenhos das crianças entrevistadas por Hughes (1986) são exemplos que ilustram esta afirmação. No entanto, na situação proposta na presente investigação, o examinador não realizava qualquer ação, tendo a própria criança que deveria representar as operações e os problemas verbais apresentados. Além disso, as operações, ausentes nos estudos acima mencionados, parecem levar a criança a usar símbolos uma vez que nelas as quantidades não possuem referentes que possam ser pictograficamente representados.

Para as crianças que ainda não haviam sido instruídas sobre a divisão, o padrão de resultados difere daquele observado entre aquelas já instruídas. Estas últimas, por dominarem os números, usavam grafismos simbólicos amplamente tanto nas operações como nos problemas; enquanto as não instruídas, por sua vez, adotavam grafismos simbólicos nas operações, e grafismos simbólicos e pictográficos nos problemas. Isso ocorria porque nos problemas as quantidades possuíam referentes (carrinhos e caixas, flores e vasos) que podiam ser desenhados, o que não ocorria em relação às operações cujas quantidades não estavam associadas a qualquer referente.



A análise dos grafismos, de modo geral, demonstra haver uma mudança na maneira como operações e problemas são representados. Grafismos idiossincráticos e pictográficos são mais elementares que grafismos icônicos e simbólicos, estes últimos são mais flexíveis, compactos e demandam certo 'distanciamento' entre o que é representado e a marca gráfica que o representa. Em uma perspectiva de desenvolvimento, tais resultados parecem confirmar os comentários de Nunes (1997) quanto ao uso de representações extensas e compactas em problemas aritméticos. Considerando o sistema de análise adotado nesta investigação, as formas extensas de representar correspondem aos grafismos pictográficos e icônicos, enquanto as formas compactas correspondem ao simbolismo. Ao que parece, o uso de formas extensas e compactas varia tanto em função do conhecimento e domínio que as crianças possuem sobre a divisão, como também, em função da situação em que tais representações se inserem, no caso do presente estudo resolução de operações e de problemas de divisão.

Outro aspecto associado ao desenvolvimento refere-se à natureza das representações relativas aos procedimentos identificados neste estudo. Considerou-se mais elaboradas representações que expressavam tentativas de resolução, quer através da divisão ou através de outras operações. Interessante mencionar que a operação de divisão (apresentada sob a forma de sentença matemática) levava à representação do enunciado apenas, enquanto que o problema levava à representação da dinâmica envolvida no processo de resolução, que implica na representação dos termos da divisão. Isto ocorre porque o problema envolve uma história matemática em que as quantidades possuem referentes, diferentemente da operação matemática que envolve uma linguagem sem referente. Essa diferença entre representar problemas e representar operações é mais expressiva entre as crianças que ainda não haviam sido instruídas sobre a divisão. Essa susceptibilidade à situação de resolução parece ser mais acentuada entre crianças que ainda não dominam a divisão, tendendo a diminuir a partir de um maior conhecimento sobre a divisão.

De modo geral, os termos que as crianças mais frequentemente representavam eram o dividendo e o divisor, sendo o resto o elemento mais omitido, mesmo entre as crianças já instruídas sobre a divisão. Isto se explica porque o

dividendo e o divisor estão necessariamente presentes no enunciado, quer nas operações quer nos problemas, enquanto o resto decorre do processo de resolução. Além disso, o resto, como amplamente documentado na literatura (e.g., Anghileri, 1993; Lautert & Spinillo, 2009; Selva 1998; Silver, 1988; Silver, Shapiro & Deutsch, 1993; Spinillo & Lautert, 2006b), é uma noção complexa que tende a ser omitida ou tratada de forma inapropriada pela criança.

No que se refere aos problemas, constata-se que mesmo as crianças que não haviam sido instruídas sobre a divisão representavam os procedimentos através da divisão, utilizando a distribuição. Este resultado confirma o que foi observado por Correa (1996; Correa, Nunes & Bryant, 1998) de que as noções iniciais das crianças sobre a divisão tomam por base a distribuição.

Os resultados também trazem informações acerca de como as crianças utilizam material concreto ao resolverem operações e problemas de divisão. No que concerne às operações, tanto o enunciado como o material concreto disponibilizado (fichas) não forneciam pistas acerca dos referentes das quantidades. Os problemas, por sua vez, tanto em relação ao enunciado como em relação aos objetos, especificavam as quantidades e seus referentes. Isso fez com que representar os procedimentos fosse mais frequente em relação aos problemas do que em relação às operações, sobretudo em relação às crianças ainda não instruídas sobre a divisão no contexto escolar, como já mencionado. Assim, é possível pensar que mais importante do que a presença de material concreto é o fato das quantidades terem um referente que as tornam significativas. Este dado está em acordo com aqueles obtidos por Batista e Spinillo (2008): não é a mera presença ou ausência de objetos manipuláveis que pode facilitar a resolução de problemas aritméticos, mas a natureza do material concreto disponibilizado (material concreto definido e material concreto neutro). Os resultados nesta investigação se alinham nesta mesma direção, conferindo ênfase especial ao papel desempenhado pelos referentes na representação de operações e de problemas de divisão. Professores devem estar atentos a este fato, sendo mais cautelosos ao atribuírem à concretude do material papel essencial na resolução de operações e problemas aritméticos (ver Spinillo & Magina, 2004).

## REFERÊNCIAS

- Anghileri, J. (1993). The language of multiplication and division. In K. Durkin & B. Shire (Orgs.), *Language in Mathematical Education. Research and Practice* (pp. 95- 104). Philadelphia: Open University Press.
- Batista, A. & Spinillo, A. G. (2008). Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. *Estudos de Psicologia*. Natal, 13, (1), 13-21.
- Borba, R. E. S. R.; Selva, A. C. V.; Spinillo, A. G. & Sousa, N. A. (2004). Influência de representações e de significados da divisão em problemas com resto. *Anais VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, Recife: Brasil, 8, CD-ROM.
- Brito, M. R. F. & Correa, J. (2004). Divisão e representação no processo de solução de problemas aritméticos. *Pedagogia Cidadã. Cadernos de Formação. Educação Matemática* (pp.81-90). São Paulo: UNESP.
- Brizuela, B. M. (2006). *Desenvolvimento matemático na criança: explorando notações*. Porto Alegre: Artmed.
- Carraher, T. Carraher, D. & Schliemann A. (1995). *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez Editora.
- Correa, J. (1996). A compreensão inicial do conceito de divisão partitiva em tarefas não-computacionais. In M. H. Novaes & M. R. F. Brito (Orgs.), *Psicologia na Educação: Articulação entre pesquisa, formação e prática pedagógica. Coletâneas da ANPEPP*, 1, (5), 151-165, Rio de Janeiro: Editora Xenon.
- Correa, J. (2006). A compreensão intuitiva da criança acerca do conceito de divisão por cotas de quantidades contínuas. In M. R. F. Brito (Org.), *Solução de problemas e a Matemática Escolar* (pp. 185-206). Campinas: Alínea.
- Correa, J. & Spinillo, A. G. (2004). O desenvolvimento do raciocínio multiplicativo em crianças. In R. M. Pavanello (Org.), *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula* (pp. 103-127). São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM.
- Correa, J.; Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young children's understanding of division: The relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology*. Estados Unidos da América, 90, (2), 321-329.
- Hughes, M. (1986). *Children and number: difficulties in learning mathematics*. Oxford: Basil Blackwell.
- Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (2002). As relações entre o desempenho em problemas de divisão e as concepções de crianças sobre a divisão. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*. Brasília, 18, (3), 237-246.
- Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (1999). Como as crianças representam a operação de divisão: da linguagem matemática oral para outras formas de representação. *Temas em Psicologia da SBP (Sociedade Brasileira de Psicologia)*. Ribeirão Preto, 7, (1), 23-36.
- Lautert, S. L. & Spinillo, A. G. (2009). Explorando o significado atribuído ao resto por crianças com dificuldades de compreensão sobre a divisão. *Anais VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Taguatinga, Distrito Federal: Brasil, CD-ROM.
- Moro, M. L. F. & Soares, M. T. C. (2005). *Desenho, palavras e números: as marcas da matemática na escola*. Curitiba: Editora Universitária UFPR.

- Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. In T. Nunes & P. Bryant (Orgs.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 29-52). London, Psychology Press.
- Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Schliemann, A. (1998). Da matemática da vida à matemática da escola. In A Schliemann & D. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos Ensino e Pesquisa* (pp. 11-38). Campinas: Papyrus.
- Selva, A. C. V. (1998). Discutindo o uso de materiais concretos na resolução de problemas de divisão. In A. Schliemann & D. Carraher (Orgs.), *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa* (pp. 95-119). Campinas: Papyrus.
- Selva, A. C. V. & Borba, R. E. S. (2005). O uso de diferentes representações na resolução de problemas de divisão inexata: analisando a contribuição da calculadora. *Boletim GEPEM*, Rio de Janeiro, 47, 51-72.
- Silver, E. A.; Shapiro, L. J. & Deutsch, A. (1993). Sense making and the solution of division problems involving remainders: an examination of middle school students solution processes and their interpretations of solutions. *Journal for Research in Mathematics Education*, Estados Unidos da América, 24, 2, 117- 135,
- Silver, E. A. (1988). Solving story problems involving division with remainders: the importance of semantic processing and referential mapping. *Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Dekalb: North Illinois, 127-133.
- Sinclair, A.; Mello, D. & Siegrist, F. (1989). A notação numérica na criança. In H. Sinclair (Org.), *A produção de notações na criança* (pp. 71-96). São Paulo: Cortez.
- Spinillo, A. G. & Lautert, S. L. (2002). Representations and solving procedures in word division problems: comparing formal and informal knowledge in children. *Proceedings of the 26th Annual International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norwich: UK. 1, 318.
- Spinillo, A. G. & Lautert, S. L. (2006a). Exploring the role played by the remainder in the solution of division problems. *Proceedings of the 30th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Praga. 5. 153 – 162.
- Spinillo, A. G. & Lautert, S. L. (2006b). O diálogo entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a educação matemática. In L. Meira & A. G. Spinillo (Orgs.), *Psicologia Cognitiva: cultura, desenvolvimento e aprendizagem* (pp. 46-80). Recife: Editora Universitária UFPE.
- Spinillo, A. G. & Magina, S. (2004). Alguns ‘mitos’ sobre a educação matemática e suas conseqüências para o ensino fundamental. In R. M. Pavanello (Org). *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula* (pp.7- 35). São Paulo: Biblioteca do Educador Matemático.
- Zunino, D. L. (1995). *A matemática na escola: aqui e agora*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Submetido: setembro de 2010

Aprovado: julho de 2011