

A Construção de um Estado da Arte Sobre Introdução, Dificuldades e Perspectivas de Conceitos e Simbologias da Álgebra no Ensino Fundamental

The Construction of a State of the Art on the Introduction, Difficulties and Perspectives of Algebra concepts and Symbologies in Elementary Education

Luigi Quintans Riveiro^{*a}; Kristine Sheila Schuster^a; Cristina Cavalli Bertolucci^a; Leandra Anversa Fioreze^a

^aUniversidade Federal do Rio Grande do Sul, RS, Brasil.

*E-mail: luigiriveiro@gmail.com

Resumo

Conhecer a produção científica sobre a introdução da Álgebra no Ensino Fundamental em processos de ensino e aprendizagem foi o tema de interesse deste Estado da Arte. Nessa direção surgiram questionamentos: como o estudante dos anos finais do Ensino Fundamental lida com a experiência do “mundo” das letras na Matemática? Que dificuldades ele apresenta para identificar e operar com símbolos além de números? Como se dá o processo da construção do pensamento algébrico? A partir de um cuidadoso processo descrito sobre a escolha das obras, construiu-se um corpus de análise com base na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, consultadas desde os anos 2000 até hoje. Analisando-se criteriosamente oito dissertações, foram criadas duas categorias, a primeira evidencia aspectos relacionados a teorias de aprendizagem e a outra dá ênfase à argumentação algébrica. Nesse estudo observou-se que existe uma recorrência de referenciais teóricos que se complementam, e uma constante preocupação acerca do modo como a álgebra é colocada para os alunos no Ensino Fundamental. Em relação às dificuldades, destacam que a construção dos conceitos feitos pelos alunos está diretamente ligada ao modo como os mesmos são apresentados a eles. Direciona-se a necessidade de maior estabelecimento das relações e conexões entre aritmética e álgebra, a atenção com a transição entre linguagens (usual, simbólica, algébrica), a produção do significado algébrico para além da manipulação mecanizada de símbolos, o discernimento entre os vários e possíveis usos da variável e a busca por estratégias didáticas com vistas à construção do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Introdução à Álgebra. Pensamento Algébrico, Estado da Arte. Aprendizagem. Ensino Fundamental.

Abstract

Knowing the scientific production about the introduction of Algebra in Elementary Education in teaching and learning processes was the theme of interest of this State of the Art. In this direction, questions arose: how do students in the final years of elementary school deal with the experience of the “world” of letters in mathematics? What difficulties do they have to identify and operate with symbols other than numbers? How does the process of building algebraic thought take place? From a careful process described on the choice of works, a corpus of analysis was built based on the Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations, consulted since 2000 until today. By carefully analyzing eight dissertations, two categories were created: the first highlights aspects related to learning theories and the second emphasizes algebraic reasoning. In this study, it was observed that there is a recurrence of theoretical references that complement each other, and a constant concern about the way algebra is presented to students in Elementary School. Regarding the difficulties, they highlight that the construction of the concepts made by the students is directly linked to the way they are presented to them. It addresses the need for greater establishment of relationships and connections between arithmetic and algebra, attention to the transition between languages (usual, symbolic, algebraic), the production of algebraic meaning beyond the mechanized manipulation of symbols, discernment between the various and possible uses of the variable and the search for teaching strategies with a view to building algebraic thinking.

Keywords: Introduction of Álgebra. Algebraic Thinking, State of art. Learning. Elementary Education.

1 Introdução

A Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental é predominantemente baseada nos números e nas operações básicas, etapa esta que o aluno experiencia a atividade algébrica com a inclusão de novos símbolos: letras que representam valores desconhecidos. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe o desenvolvimento do pensamento algébrico ainda nos primeiros anos do Ensino Fundamental, porém sem o uso das letras, direcionando o foco para regularidades, generalizações de padrões e propriedades da igualdade. A Matemática dessa fase do ensino se enriquece

ao evoluir das operações aritméticas com apenas números para os cálculos, as manipulações e novos significados com letras, números e operações. A variável, representada por uma letra, essa abstração de valor e forma de generalização de uma situação, tão comuns para aqueles que conhecem bem a Álgebra, é uma revolução para os alunos da escola básica. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) observam o quão poderoso tal campo da Matemática pode ser:

O estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para

resolver problemas (Brasil, 1998, p.115).

Tal abstração, natural da Álgebra, pode ser inovadora e impulsionadora se o aluno a alcançar, mas também pode ser angustiante e desanimadora em caso contrário. Ajudar o estudante a construir conceitos algébricos é essencial para o que ele conhecerá de Matemática durante o ciclo escolar. E não é difícil perceber uma certa preocupação dos estudiosos da Educação Matemática com este tema, como em Falcão (1994), Usiskin (1995), & Ponte, Branco & Matos (2009).

Por ser a Álgebra um assunto amplo, uma vez que se trata de uma das grandes áreas da Matemática, busca-se explorar uma parte introdutória relacionada ao ensino e aprendizagem da mesma. Conhecer como são apresentados e desenvolvidos conceitos algébricos nos anos finais do Ensino Fundamental, e como alunos desta fase do ensino básico lidam com o assunto, é a temática de estudo das pesquisas de mestrado dos dois primeiros autores deste artigo. Nesse sentido, surge o interesse em verificar como o tema vem sendo explorado em pesquisas científicas, despertando algumas questões para reflexão: como o aluno dos anos finais do Ensino Fundamental lida com a experiência do “mundo” das letras na Matemática? Que dificuldades ele apresenta para identificar e operar com símbolos além de números? Como se dá o processo da construção do pensamento algébrico?

Assim sendo, este trabalho busca verificar e conhecer pesquisas na área da Educação Matemática que abarquem a álgebra no ensino fundamental e, de certa forma, se inteirar do que pesquisadores vêm produzindo sobre o tema nos últimos anos. Para tanto, realizamos uma pesquisa do tipo estado da arte, modelo este de conhecimento acadêmico e científico, em dissertações publicadas na BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. Uma pesquisa do tipo estado da arte, conforme Romanowski & Ens (2006), visa, além de identificar a produção, analisá-la, categorizá-la e revelar os diversos enfoques e perspectivas. Em uma primeira etapa deste documento são apresentados os descritores utilizados, para na sequência descrever a escolha do ambiente de busca, o intervalo de tempo e o processo de escolha e definição do corpus de análise. Posteriormente, passa-se à uma análise dos trabalhos selecionados e às considerações.

2 Desenvolvimento

2.1 Metodologia

Para conhecer as pesquisas científicas de interesse, buscou-se individualizar descritores, ambientes de busca, intervalo de tempo, além de delimitar alguns processos de seleção para escolher as obras a serem analisadas.

Determinar os descritores, ou termos de busca, mostrou-se uma atividade semelhante a um processo conhecido como “tempestade de ideias”, no qual a partir de um determinado assunto, busca-se e avalia-se ideias que versem sobre o

próprio. Ao refletir sobre o percurso introdutório do ensino e da aprendizagem da Álgebra, aspectos relacionados a modelos de ensino, dificuldades de aprendizagem ou conceitos inerentes, algumas palavras e expressões surgem naturalmente para um docente de Matemática. Avaliar estas primeiras ideias se revelou um trabalho de direcionamento, descarte e aprofundamento no tema. A priori foram utilizadas as seguintes expressões e palavras: variável, álgebra, ensino fundamental e ensino de álgebra. De posse destes descritores, utilizando-se do ambiente de busca definido, optou-se por realizar tentativas iniciais de buscas para analisar o que a plataforma disponibilizaria. Ao analisar alguns trabalhos relacionados, outras palavras e expressões revelaram-se assíduas nos resumos dos documentos e, de certa forma, coerentes e confluentes com o que se queria investigar. Desta forma, no processo de interações com os repositórios, foram definidos como termos de busca para esta pesquisa: pensamento algébrico, álgebra no ensino fundamental, variável matemática, conceito algébrico e ensino de álgebra.

Para o processo relatado ocorrer foi preciso determinar o ambiente de busca para selecionar as pesquisas acadêmicas. Ao analisar uma lista de repositórios de trabalhos acadêmicos e confrontá-la com o que se queria, optou-se pela utilização de um repositório que abrangesse pesquisas a nível nacional, ou seja, que não disponibilizasse somente trabalhos regionais, como o Lume da UFRGS, o banco de teses da USP ou da UFMG. Conjecturando que a cultura influencia e direciona os processos de ensino e aprendizagem, e que, para qualquer que seja tal cultura em um país continental como o Brasil, o campo da Álgebra está estabelecido pela BNCC e pelos PCNs, entende-se que uma abordagem que englobe pesquisas de todo o país pode trazer mais contribuições para um trabalho desta natureza.

O catálogo de teses e dissertações da CAPES foi, em um momento inicial, a opção de ambiente de busca. Este repositório conta com aproximadamente¹ um milhão e meio de trabalhos, desde o ano de 1987. Somente no uso do descritor “variável matemática” ocorrem mais de setenta mil trabalhos. Porém, apesar da quantidade de ocorrências vislumbrar como fato relevante e auspicioso para a sequência do processo de busca, o repositório em questão apresenta alguns inconvenientes em seu manuseio, como a necessidade de ler opção por opção apresentada e escolher a que interessa. Em outros repositórios semelhantes existe a “busca avançada”, sendo possível digitar a opção para refinar a busca, tornando o trabalho mais interativo e menos moroso. Como exemplo, ainda no descritor “variável matemática”, para os milhares de trabalhos disponibilizados, uma das opções de filtro é nomeada como “área conhecimento”, com itens de seleção como “ensino de ciências e matemática”, “matemática”, “ensino” e “educação”. Estas são apresentadas em meio a outras 374 opções de filtro, tendo que ser escolhidas uma a uma. A pesquisa de doutorado

¹ Fonte: <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/info>

realizada por Guimarães em 2022, relacionada à recuperação de informações no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, amplia a discussão e apresenta resultados relacionados ao apresentado neste artigo, como por exemplo o preenchimento de campos diversificados, uso de simbologia diversas, e que por vezes mostram-se inadequados ao conteúdo, dificultando a recuperação de dados.

Outro ponto desfavorável nesse repositório, e que talvez comprometa o processo como um todo, é a instabilidade do site. Nas diversas tentativas de buscas e uso dos filtros realizadas, ao executar um filtro no processo de refinamento, o site falhava e perdia todos os filtros marcados, tendo-se assim que recomençar o trabalho desde o início.

Ao avaliar outro repositório e que também oferecesse abrangência nacional, optou-se por utilizar testar a BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, trazendo uma interface mais amigável, sendo possível interagir com os filtros e refinamentos, tão essenciais em um processo como este, permitindo um trabalho ágil e eficiente. Este repositório conta com aproximadamente² oitocentos e quarenta mil documentos, sendo 95% deles com datas a partir do ano 2000. Um total de 129 instituições acadêmicas nacionais participam, convergindo com o critério estabelecido para desenvolvimento deste trabalho. Explorando a interação com o repositório BDTD, os filtros de busca avançada, que permitem ao usuário estabelecer refinamento com filtros simultâneos, possibilitam a inclusão de novos campos de palavras ou expressões, oferecendo inclusive a opção para pesquisar todos ou qualquer termo digitado. Neste repositório é possível definir ano inicial e final, como intervalo de tempo. Outro recurso amplamente utilizado neste exercício são as sugestões de trabalhos semelhantes, onde o site disponibiliza trabalho a trabalho do que foi relacionado. Ao optar por um documento, o repositório traz várias informações do mesmo, como o resumo da tese ou dissertação, além da indicação de cinco trabalhos com alguma afinidade com o que foi selecionado inicialmente, ao que o site denomina de “Registros Relacionados”.

Estabelecidos os descritores e ambiente de busca, optou-se por fixar o intervalo de tempo com a maior abrangência da ferramenta, ou seja, do ano 2000 até os dias de hoje. Tal opção deve-se ao entendimento que para o tema escolhido como base para esta pesquisa, não haveria influência relevante algum período específico de análise diferente. Pensar na introdução do trabalho algébrico ao longo do Ensino Fundamental, com suas abordagens, dificuldades e peculiaridades, é de certa forma pertinente considerar os últimos vinte anos de trabalhos e pesquisas em Educação Matemática. Uma última consideração no contexto do uso do repositório foi delimitar que seriam selecionadas para análise somente dissertações de mestrado. Tal opção se apoia no interesse de uma revisão bibliográfica que traga um reconhecimento do assunto compatível com o momento de estudo ao qual vivenciam os

dois primeiros autores desta pesquisa.

O levantamento e revisão do conhecimento produzido sobre o tema abordado é um passo indispensável para desencadear um processo de análise qualitativa dos estudos produzidos. Tal processo não serve apenas como base fundamentada para uma investigação subsequente, mas também como uma convergência teórica ao que se quer apresentar com esta pesquisa. Nesse sentido, nossa análise dos dados caracteriza-se por ser descritiva e analítica (Romanowski & Ens, 2006).

2.1.1 Construção do Corpus de Análise

Ao operar com o repositório BDTD, segue-se a etapa de análise e seleção dos trabalhos que farão parte da primeira amostra. O ambiente de busca lista os resultados encontrados informando o título do trabalho, autor, ano de defesa e assunto, sendo que em assunto o sistema gera as palavras-chave. O critério de seleção inicial utilizado como descarte foi a abordagem trazida pela dissertação no título. Como a ideia deste trabalho permeia a fase introdutória do ensino e aprendizagem de álgebra no Ensino Fundamental, títulos como “Pensamento algébrico: um estudo exploratório com estudantes de Pedagogia” ou “O ensino de Álgebra: algumas questões do ENEM e da OBMEP”, que remetem a uma investigação não diretamente envolvendo o público alvo ou o objetivo desejado, foram descartados. Para os títulos que apontaram congruência com a investigação, estabeleceu-se o processo de análise do resumo do trabalho.

A partir da leitura de diversos resumos, apresentou-se a oportunidade de conhecer um pouco mais do campo das pesquisas. Nesse sentido, questionamentos e ideias não previstos direcionaram para reflexões que contribuíram no trabalho de seleção das dissertações. Os resumos trazem dados relevantes como motivações, metodologias, referenciais teóricos, resultados, entre outros, fornecendo desta forma base considerável para uma tomada de decisão inicial. Não obstante se queira utilizar o material que mais se adéque, é inegável a possibilidade de prescindir de algum texto; optou-se por visitar as listas de pesquisas disponibilizadas pelo repositório na tentativa de minimizar possíveis “perdas”. Concomitante a estes direcionamentos, buscou-se enriquecer o material selecionando textos com contribuições diversas, seja de referenciais teóricos, tipos de atividades, ano de ensino, ou até mesmo de região geográfica. Seguindo tais direcionamentos, na busca por construir um primeiro ensaio de corpus de análise, foram elencadas vinte e cinco dissertações.

Uma segunda etapa, buscando refinar este primeiro conjunto de trabalhos selecionados, envolveu a leitura diagonal de tópicos específicos apontados nos sumários das dissertações selecionadas. Tal processo auxiliou a dirimir dúvidas em resumos que apresentaram informações sucintas, causando por vezes dúvidas na proposta, do mesmo modo que trabalhos que discutiam metodologias ou referenciais teóricos

² Fonte: <https://bdttd.ibict.br/vufind/>

menos explorados em relação à amostra total analisada. Tendo como eixo principal o direcionamento desenvolvido anteriormente acerca da proposta para este trabalho, foram priorizados trabalhos que discutem em seus resumos conceitos algébricos, especificamente com o foco nos anos finais do Ensino Fundamental, dando preferência por pesquisas que apresentassem discussões baseadas em atividades pedagógicas realizadas com tal público. Desta feita, foram selecionados quatorze trabalhos dos vinte cinco apontados anteriormente para uma última fase de definição.

Com vistas a estabelecer um corpus de análise passível de uma análise atenciosa, nesta fase conclusiva de seleção, trabalhou-se o norteamento de desconsiderar dissertações em que a questão algébrica se apresentava como sustentação para outro tema. Algumas pesquisas apresentavam foco principal em questões como, por exemplo, investigações sobre o uso de tecnologias digitais na Educação Matemática, sendo o trabalho com conceitos algébricos meio para analisá-las. Ao promover tal ajuste, o corpus de análise ficou estabelecido e

definido em oito dissertações.

Estas oito dissertações, após leitura completa e análise, foram organizadas em categorias, definidas pelos autores deste trabalho, resultado da percepção de certos caminhos de confluência nas investigações escolhidas. Foi possível conjecturar duas linhas de desenvolvimento das pesquisas: uma na qual sobressaem os aspectos relacionados a teorias de aprendizagem e outra na qual é dada maior ênfase à argumentação algébrica. Cunhou-se este termo, argumentação algébrica, como forma de representar os textos que trazem uma maior discussão às questões da Álgebra: história, evolução, concepções, modelos, especificidades, além de esmiuçar conceitos, principalmente relacionados à variável. Pretende-se com esta forma de organizar o texto, auxiliar o leitor na visualização do todo da amostra analisada, inferindo uma possível perspectiva de como a comunidade acadêmica vem lidando com o assunto. Para tanto, segue-se o quadro abaixo com as dissertações categorizadas em dois grupos.

Quadro 1 - Categorização das dissertações selecionadas

Argumentação Algébrica	Teorias de Aprendizagem
<p>Magalhães, Ayrton Góes de - Construção de conceitos algébricos com alunos do 7º ano Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado em Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário Univates. Ano: 2016.</p>	<p>Klopsch, Cristiane - Campo conceitual algébrico: análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série 9º ano) Curso de Pós-Graduação em Psicologia Cognitiva, Universidade Federal de Pernambuco. Ano: 2010.</p> <p>Bilhalva, Aiana Silveira - Investigando o pensamento algébrico à luz da teoria dos campos conceituais Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Pelotas. Ano: 2020.</p> <p>Bortoletti, Anderson de Abreu - Introdução às expressões algébricas na escola básica: variáveis e células de planilhas eletrônicas Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Ano: 2014.</p>
<p>Silva, Cristiane Barcella - Introdução a álgebra no ensino fundamental: o “X” da questão Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Estadual Paulista. Ano: 2016.</p>	
<p>Silva, Rosania Maria da - Diferentes usos da variável por alunos do ensino fundamental Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Ano: 2009.</p>	
<p>Miranda, Tatiana Lopes de - A noção de variável de alunos do ensino fundamental Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Universidade Federal do Pará. Ano: 2014.</p>	
<p>Pimentel, Danilo Eudes - Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da Aritmética para a Álgebra Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos. Ano: 2014.</p>	

Fonte: dados da pesquisa.

2.1.2 Análise das obras selecionadas

Seguindo a nomenclatura de autores e títulos para os trabalhos estabelecida no Quadro 1, apresenta-se na sequência um resumo e análise das dissertações selecionadas.

Magalhães (2016) teve como propósito analisar dificuldades para a construção de conceitos algébricos por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, em uma escola do município de Santana (AP). O problema de pesquisa foi: Como os alunos do 7º ano desenvolvem conceitos algébricos?

O aporte teórico utilizado teve como base Usiskin (1995), que aponta a generalização de padrões como um caminho para o estudo do ensino e aprendizagem da álgebra. A pesquisa, de natureza qualitativa, foi desenvolvida com oito alunos selecionados de uma turma com 34 alunos do 7º ano.

Na introdução o autor explora a ideia de que o ensino da álgebra passou e ainda passa por vários questionamentos, desde quais são, ou não, os conteúdos deste campo de estudo; reflete sobre sua trajetória acadêmica e o que o levou a chegar no problema de pesquisa. No capítulo teórico é apresentado um

apanhado histórico importante e que esclarece questões sobre o processo de criação e desenvolvimento do estudo da Álgebra como campo de estudo dentro da matemática. Destaca autores matemáticos e filósofos que contribuíram e estabeleceram os primeiros padrões com relação ao uso de fórmulas e símbolos para o estudo da Álgebra, sem que a mesma seja vista como uma generalização de padrões observados nos estudos da aritmética. O autor destaca que, com o uso incorreto da linguagem utilizada para o ensino da álgebra, muitas vezes por desconhecimento do professor, as letras utilizadas para representar incógnitas e variáveis são compreendidas apenas como símbolos que substituem números, deixando seu real significado de lado. A análise dos dados revelou que a maioria dos alunos consegue identificar e desenhar os elementos que completam uma sequência, empenhando-se nas atividades. No entanto, apresentam lacunas em relação à aritmética, erros no uso da elaboração das regras, problemas na leitura e na interpretação da situação problema, dificuldades para identificar generalizações e dificuldades na escrita de seu pensamento algébrico.

Silva (2016) traz como objetivo colaborar com os professores de Matemática, em especial aqueles que lecionam nos 7º anos do Ensino Fundamental, momento em que tradicionalmente se dá a introdução da Álgebra no Brasil, conforme palavras da pesquisadora. A partir do referencial teórico buscou-se entender as dificuldades encontradas no ensino da Álgebra, realizando-se um estudo sobre as diferentes concepções da Álgebra, segundo Usiskin (1995) e os PCNs (Brasil, 1998), permitindo uma melhor compreensão sobre os vários tipos de usos das “letras” nessa área. Este cenário levou a autora a identificar que um dos principais problemas no ensino da Álgebra é tornar a linguagem algébrica significativa para o aluno, levando a explorar possibilidades e benefícios da sua introdução através do desenvolvimento de padrões e regularidades.

A dissertação se desenvolve de forma a investigar como introduzir a Álgebra no Ensino Fundamental de forma expressiva, clara e significativa para o aluno. A autora parte da motivação pessoal de buscar entender o porquê da dificuldade de seus alunos do Ensino Fundamental em trabalhar com Álgebra, apoiando-se na leitura e discussão de referenciais teóricos e materiais didáticos para conjecturar tal questão. Um desses aportes teóricos vem de Fiorentini, Fernandes e Magalhães (2005) ao indicar que o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ocorrer já desde os primeiros anos de escolarização. A autora complementa com uma citação do matemático Ken Milton (1989, apud Silva, 2016, p.17) que diz que “aquilo que ensinamos em aritmética e a forma como a ensinamos, tem fortes implicações para o desenvolvimento do pensamento algébrico”. Nota-se a preocupação de uma possível falta de conexão e relação dos conceitos trabalhados ao longo dos primeiros anos escolares com os anos seguintes como fator de influência nas dificuldades apresentadas pelos

alunos em relação a álgebra. Para dar sustentação a tais conjecturas, o texto traz que, de acordo com Booth (1995, apud Silva, 2016, p.20), uma das maneiras de encontrar o que torna a Álgebra difícil é identificar os tipos de erros que alunos cometem com mais frequência e analisar as razões desses erros. Booth (1995, apud Silva, 2016) realizou estudos no Reino Unido entre 1980 e 1983 com alunos de treze a dezesseis anos verificando erros semelhantes em todas as séries. A dissertação elenca os erros e seus aspectos, os quais remetem a exemplos que podem ser observados nas salas de aula de hoje, como por exemplo, a dificuldade que o aluno tem em aceitar a “natureza” das respostas no trabalho com Álgebra. Muitos alunos não admitem expressões algébricas como resposta, como se a atividade não apresentasse um fechamento. Conforme elabora a pesquisadora, o aluno só acredita que o exercício está finalizado quando encontra uma solução numérica, como ocorre na aritmética.

Objetivando que o estudante consiga construir o pensamento e linguagem algébricos, Silva (2016) mostra ser necessário um entendimento do que é Álgebra, trazendo a descrição das concepções de Álgebra segundo Zalman Usiskin e as diferentes interpretações da Álgebra escolar de acordo com os PCNs. Em Usiskin (1995), listam-se quatro concepções da Álgebra, relacionando a cada uma o uso das variáveis com verbos de ação: álgebra como aritmética generalizada (traduzir, generalizar); álgebra como meio de resolver certos problemas (resolver, simplificar); álgebra como estudo de relações (relacionar) e álgebra como estrutura (manipular, justificar). A dissertação desenvolve cada uma das concepções com exemplos, para depois compará-las com as dimensões de Álgebras estabelecidas pelos PCN, inferindo que é nítida a anuência entre ambas as perspectivas. Concepções de, ou sobre o que é Álgebra são propostas por outros autores, com diferentes ou semelhantes abordagens ao que Usiskin elabora. Usiskin (1995, p.9) cita que “não é fácil definir Álgebra”. A autora observa que a falta de conhecimento sobre as várias concepções da Álgebra pode ser um dos motivos das frustrações dos alunos com essa área da Matemática.

Ao observar as discussões e contribuições que o texto permeia, a pesquisa corrobora com reflexões apresentadas no início deste documento, entre elas as dificuldades que o aluno apresenta para identificar e operar com símbolos para além de números. Reiterando que a álgebra das letras é uma revolução para os alunos desta fase do ensino, a autora reproduz um comentário “habitual” de seus alunos: “Eu até gostava de Matemática professora, e era bom, mas depois que começou com esse negócio de números misturados com letras... aí não entendi mais nada” (Silva, 2016, p.15). Entender tal inquietação estudantil, além de procurar caminhos que auxiliem o aluno, passa por pesquisas como esta. Conforme objetivo inicial, conclui-se o trabalho sugerindo uma sequência didática composta de atividades voltadas para a generalização de padrões com a intensão de auxiliar o professor na introdução

da Álgebra e o aluno no desenvolvimento do pensamento e linguagem algébricos.

A dissertação de Silva (2009) se refere a um estudo de caso com o objetivo de verificar a compreensão e usos da variável por alunos de 8ª série em questões que envolvam sua simbolização, interpretação e manipulação. Para tal, foi utilizada uma ferramenta teórico-metodológica denominada Modelo dos Três Usos da Variável (3UV), apresentada por Trigueros & Ursini (2001). Tal modelo relaciona as habilidades necessárias ao entendimento dos três principais usos da variável na álgebra escolar: incógnita, número genérico e variáveis em relação funcional. A autora utiliza o modelo 3UV para elaborar um questionário para identificar os significados e usos da variável por um grupo de alunos. Conforme Silva (2009), tal modelo consiste numa descrição detalhada dos aspectos que envolvem a compreensão da variável em seus três principais usos na álgebra: como incógnita, cujo valor pode ser determinado conforme as restrições do problema; como número genérico, ou seja, aquela que aparece em generalizações, tautologias e métodos gerais; e como variável relacionada, que é a variável em uma relação conjunta com outra variável. Trigueros & Ursini (2001) apontam que a compreensão do conceito de variável, em nível elementar, pode ser descrita pelas seguintes capacidades básicas: executar operações simples com símbolos literais, compreender a funcionalidade destas operações, prever as consequências do uso da variável e distinguir e integrar os diferentes usos da variável. Ao longo da dissertação, a autora especifica tais capacidades ponto a ponto, de forma que o leitor consiga alcançar tal modelo, por vezes projetando-o para a sala de aula.

Percebe-se no trabalho uma narrativa com maior rigor matemático, inclusive com exemplos aplicados para o contexto algébrico. E esta é uma questão que, para além dos aportes teóricos, psicológicos e comportamentais, tem seu espaço de significado na investigação sobre ensino e aprendizagem de matemática. Para o estudante do Ensino Fundamental, que passa todo o primeiro ciclo de estudos trabalhando a Matemática dos fundamentos aritméticos, com seus resultados inalteráveis, como nas tabuadas, vivencia-se um estágio contínuo e evolutivo de construção do raciocínio matemático. Tal estágio apresenta para o estudante novas simbologias e possibilidades na disciplina, onde um mesmo símbolo exerce funções diferentes, dependendo da situação. Pesquisas que trazem maior aproximação com a realidade da sala de aula, com exemplos práticos do fazer docente e discente, proporcionam para o leitor-professor reflexões e oportunidades, e para o leitor-professor-pesquisador perspectivas e subsídios para seus questionamentos.

Neste contexto, Silva (2009) analisa estudos de autores como Caraça e Kuchemann, fazendo considerações distintas sobre simbologia algébrica. Para Caraça (1954), sem a representação simbólica teríamos sempre que estar atrelados a resultados particulares, não obtendo a generalidade

conveniente; o mesmo estabelece o aspecto simbólico da variável (letra ou símbolo utilizados) e o aspecto substancial (como conjunto que esse símbolo representa). Para o autor, esses dois aspectos são inseparáveis e sua síntese é o conceito de variável. Kuchemann (1987) detalha a simbologia algébrica, categorizando seis tipos de interpretações de letras: a “letra avaliada” referindo-se aos casos em que a letra é, desde o início, designada como um valor numérico; a “letra não usada” tem sua existência reconhecida, mas não apresenta significado, ocorrendo em situações algébricas onde a letra é substituída por valores sem produzir significância. Na categoria “letra usada como objeto”, a letra é uma abreviação para o nome de um objeto; neste caso, para os alunos, a letra não é vista como uma entidade numérica. A “letra usada como incógnita” utiliza a letra como representante de um número específico, mas desconhecido, com o qual é possível operar. A “letra usada como número genérico” pode representar vários valores ao invés de só um, e a “letra usada como variável” é apresentada como representante de um campo de valores não específicos, com uma relação sistemática entre dois conjuntos de valores. Ao longo da dissertação traz-se exemplos práticos de cada categoria, facilitando o entendimento do leitor. Tal detalhamento com a utilização da letra, e seu conceito como variável na Matemática, expõe a essencialidade de aprofundamento para um maior alcance de estudos e pesquisas sobre o assunto. Da forma como está apresentada, abarca inquietações presentes no dia a dia da docência matemática, evidenciando possíveis lacunas no ensino e na aprendizagem da Álgebra escolar. Os resultados mostram a dificuldade de simbolização, principalmente quando a variável deve ser colocada no papel de número genérico ou em relacionamento funcional, e que os aspectos simbólicos e substancial se destacam separadamente dependendo do que requer a questão.

O trabalho de Miranda (2014) trata da educação algébrica com o objetivo de buscar uma descrição da noção de variável através da resolução de problemas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A autora faz um estudo sobre os processos pelos quais se desenvolveu a Álgebra de forma a descrever historicamente o conceito de variável que é utilizado nos dias de hoje, buscando um recorte do que ela chama de “noção de variável” por parte dos participantes da pesquisa. A partir da aplicação de três questionários para um grupo de 65 alunos, Miranda (2014) destaca que foi possível identificar as noções de variável e os elementos destas noções presentes em sala de aula. Após estudo sobre seu referencial teórico a respeito do conceito de variável, aponta que os questionários aplicados trazem como base 10 perguntas relacionadas aos usos das variáveis, seguindo o modelo 3UV de Trigueros e Ursini (2001), este já citado anteriormente em Silva (2009). A autora defende que é “por meio da compreensão da variável e seus diferentes usos que se pode compreender o ensino de álgebra no contexto escolar” (Miranda, 2014, p.85).

Cada um dos questionários trabalhou com uma das ideias de variável, aplicados em diferentes datas. Durante

a aplicação, a autora descreve que teve de intervir devido à dificuldade demonstrada pelos alunos, explicando o conteúdo apresentado e motivando-os a respondê-los. Os alunos demonstraram maior domínio sobre a noção de variável como um valor desconhecido e maior dificuldade com a noção relacionada à ideia de generalização de padrão. Contudo, em sua conclusão, apresenta a reflexão de que os alunos apresentam dificuldades com relação ao estudo da álgebra pois não conseguem estabelecer uma ligação entre a linguagem usual e a linguagem algébrica, o que diz respeito à interpretação por parte dos alunos com relação ao que está sendo estudado. Verificou-se também que a noção de variável como incógnita é a que apresenta maior domínio por parte dos alunos, contudo, percebe-se que elementos que constituem esta e as outras noções, relativos a manipulação, simbolização e interpretação, representam obstáculos de compreensão do pensamento e da linguagem algébrica.

Pimentel (2014) apresenta as dificuldades na aprendizagem de álgebra, constatadas especialmente em alunos do 1º Ano do Ensino Médio, com a finalidade de descobrir e entender as origens do problema e estudar propostas para possíveis soluções, além das prováveis causas das dificuldades na transição da aritmética para a álgebra. O autor apresenta a ideia de que, utilizando a metodologia de resolução de problemas para identificar as dificuldades sobre a aprendizagem de álgebra dos alunos no Ensino Fundamental, estabeleceu-se uma ruptura entre o ensino da aritmética e da álgebra, normalmente ocorrendo entre o 5º e o 7º ano. Pimentel (2014) acredita na possibilidade de se estabelecer um estudo de pré-álgebra, trabalhando os conteúdos de maneira a introduzir os conceitos do uso de letras para a representação de variáveis e como as mesmas podem ser vistas na resolução de problemas matemáticos.

Na análise dos resultados, destaca-se a percepção de que a maioria dos estudantes demonstra a tendência em resolver os problemas propostos pela aritmética através de tentativa e erro, não utilizando as técnicas da álgebra. A estratégia de resolução de problemas ou exercícios matemáticos por tentativa e erro é parte integrante do processo de construção do raciocínio matemático. Tal processo leva o aluno, desde cedo, a trabalhar por uma perspectiva exploratória onde o erro. Vale manifestar que, como parte de uma construção, o docente perceba e auxilie o aluno em seu desenvolvimento, trabalhando este saber provisório rumo a outras possíveis formas de pensamento. Por fim, o autor da dissertação propõe um material que pode auxiliar os professores na construção do conhecimento junto com os alunos, estabelecendo relações para a pré-álgebra.

Klopsch (2010), alicerçada na Teoria dos Campos Conceituais (TCC) proposta por Gérard Vergnaud, teve como objetivo aprofundar a análise dos elementos algébricos a serem aprendidos e das dificuldades apresentadas por alunos do 9º ano. Através de um instrumento de avaliação sistematizado, tentou-se cobrir um conjunto relevante de atividades

matemáticas algébricas consideradas representativas de competências e habilidades cognitivas relacionadas à construção dos conceitos algébricos essenciais para estudantes ao final do Ensino Fundamental. A dissertação, apresentada em um Programa de Pós-graduação em Psicologia Cognitiva, traz para o tema um aporte diferenciado de conceitos e informações; as discussões e contribuições acerca do assunto extrapolam perspectivas observadas em trabalhos na área de Educação Matemática. Em uma das discussões, a autora questiona o que é um conceito matemático. Apoiada em autores como o próprio Vergnaud, tal debate percorre temas como o construto cognitivo e o caminho psicológico de construção de significado para um conceito, inferindo que a formação de conceitos matemáticos, do ponto de vista psicológico, está intrinsecamente relacionada à construção do conhecimento de cada indivíduo. O conceito de variável, comumente relacionado ao uso de letras na matemática, e que por este motivo pensa-se ser trabalhado somente nos anos finais do Ensino Fundamental, contempla conexões com noções diversas, como por exemplo a noção de igualdade. Corroborando com Silva (2016), Klopsch (2010) aponta que para pesquisadores, como Falcão (2003), é possível que as reiteradas dificuldades em álgebra sejam um reflexo da introdução tardia ao pensamento algébrico, com ênfase a uma educação aritmética anterior e de forma totalmente separada. Para pesquisas que contemplem analisar como o estudante estrutura seu pensamento algébrico, explorar o arranjo das citadas estruturas e relações na construção cognitiva do estudante, abordada de formas distintas por diferentes teóricos do assunto, contribui para a investigação do tema.

Seguindo a análise das dificuldades em álgebra por parte dos alunos do Ensino Fundamental, a autora traz considerações de Schliemann et al. (2003, apud Klopsch, 2010, p.12), destacando dificuldades como limitações sobre a interpretação do símbolo de igual e a recusa em aceitar expressões algébricas como resposta de um problema, este último semelhante ao apontado na dissertação de Silva (2016). À luz desta convergência, cabe destacar a preocupação de Klopsch (2010) com concepções históricas e filosóficas da Matemática. Ao desenvolver a partir de Pais (2002, apud Klopsch, 2010, p.12) que o platonismo e o formalismo determinaram ao longo da história um saber matemático constituído de noções teoricamente objetivas, a autora cita, conforme Brousseau (1986, apud Klopsch, 2010, p.13), que tal concepção abriu caminho para uma hegemonia sobre o estudo do saber a ser ensinado (polo epistemológico), deixando de lado o polo pedagógico (professor) e polo psicológico(aluno), elementos constituintes do triângulo das situações didáticas. Um aspecto inerente a esta perspectiva é a predominância de uma exigência escolar do domínio prático dos procedimentos algébricos sobre a construção do conceito algébrico. Conforme a pesquisadora, é possível utilizar um procedimento/algoritmo de duas formas distintas: levando em consideração a gama de conceitos envolvidos nestes procedimentos ou de forma reprodutiva automatizada, onde

não se manifesta o significado dos elementos envolvidos.

Ao longo da dissertação, é enfatizado que a TCC concebe o processo cognitivo não como aquele que somente organiza as atividades e seu funcionamento em situação, mas considera o desenvolvimento de uma pessoa durante sua experiência e as formas inteligentes de organização da sua atividade. A TCC aponta que um conceito pode ser representado segundo o tripé referência, esquemas mentais e representações simbólicas, trazendo contribuições específicas para a construção dos conceitos matemáticos e conseqüentemente para o ensino de Matemática. Vergnaud propôs, entre outros, um estudo aprofundado dos campos conceituais das estruturas aditivas e multiplicativas, os chamados campos conceituais. No caso da pesquisa de Klopsch (2010), o Campo Conceitual Algébrico (CCA) recebe uma atenção especial, elaborando que, segundo Falcão (1994), a atividade cognitiva deste campo abrange quatro aspectos: reconhecer determinadas funções da álgebra, transformar um problema em equação, conhecer os objetos algébricos e conhecer a ação a ser realizada.

Com base em um conjunto abrangente e explicativo de reflexões desenvolvido no texto, observando que a competência para trabalhar com termos algébricos é possível se forem utilizados conceitos aritméticos básicos, a pesquisadora apresenta uma ampliação da sistematização do CCA, proposto por Falcão (2003), estabelecendo os componentes aritméticos, cognitivos e algébricos da sua proposta. Este direcionamento evidencia novamente as relações e conexões de conceitos e experiências citadas anteriormente, e que por vezes se perdem em propostas didáticas mecânicas, elaboradas “somente” sobre o conteúdo programático. A pesquisa continua com a construção, aplicação e verificação de um instrumento de avaliação de competências e habilidades baseado nos componentes do CCA composto pela autora. Relevante destacar que o trabalho como um todo se desenvolve a partir de concepções primárias e fundamentais, oferecendo e estimulando o leitor a reflexões para além dos resultados encontrados. Os dados foram analisados de forma quantitativa unidimensional e multidimensional. Os resultados da pesquisa indicaram que as maiores dificuldades apresentadas pelos estudantes se referem aos conceitos e situações abordados no 8º ano, em especial nas situações envolvendo conceitos como generalizações de padrões aritméticos, fatoração e inequações. Tais resultados sugerem, entre outros, que sejam propostas novas estratégias didáticas que auxiliem na superação das dificuldades relatadas.

Bilhalva (2020) buscou investigar o pensamento algébrico à luz da Teoria dos Campos Conceituais (TCC). A pergunta que orientou a pesquisa foi: “Como ocorre a manifestação do pensamento algébrico na resolução de situações-problema que exploram relações e comparações entre padrões compondo parte do Campo Conceitual Algébrico (CCA)?”. O objetivo foi identificar as manifestações de invariantes operatórios e de representações do CCA, previamente delimitado, nas resoluções de um conjunto de situações-problema. A discussão

sobre as resoluções representativas esperadas e divergentes permitiu identificar os componentes dos esquemas utilizados pelos alunos. Assim, foi possível relacionar a terna da TCC (conjuntos de situações, invariantes e representações) com a manifestação do pensamento algébrico e o desenvolvimento da linguagem algébrica. Nesse sentido, a linha de desenvolvimento traz novas e relevantes contribuições para a análise do pensamento algébrico. Ademais, ao propor analisar as resoluções e os diálogos que a professora-pesquisadora teve em aulas com os estudantes, mediante aplicação de uma sequência de atividades matemáticas, confere-se uma perspectiva de análise diferenciada da dissertação de Klopsch (2010).

Percebe-se neste trabalho uma atenção também para uma abordagem teórica sobre educação algébrica, aprofundando o conceito de linguagem algébrica. Neste contexto, evidencia-se e analisa-se uma preocupação latente na docência matemática que é o entendimento comum de que a Álgebra da escola básica é tão somente a compreensão das “letras”; o que significam e como operá-las. Para tentar se afastar da visão reducionista, a pesquisadora investiga as concepções, por exemplo, Fiorentini, Fernandes e Magalhães (2005). Segundo ela, é preciso superar a visão de que Álgebra seria apenas um instrumento para resolução de problemas, que facilita a comunicação matemática, e considerá-la, também, uma forma específica de pensamento e de leitura do mundo. O mesmo autor defende que comparando as concepções de educação algébrica dominantes, o ponto comum entre elas é a redução do pensamento algébrico à linguagem algébrica. Bilhalva (2020) corrobora ao citar que vários autores concordam que nos livros didáticos de Álgebra escolar é excessivo o uso do aspecto transformacional, dando maior ênfase para as regras de manipulação das letras e menos importância para as noções conceituais (Usiskin, 1995, Ponte, Branco & Matos, 2009).

Ao desenvolver especificamente sobre Álgebra escolar Bilhalva (2020) cita Lins e Gimenez (1997), que apontam que conteúdos aritméticos de séries iniciais devam abordar alguns conceitos como generalização e padrões, indicando que a inserção de ideias algébricas junto aos conceitos aritméticos pode proporcionar significado para esses conteúdos em sua formalização. Eles reforçam a inquietação apresentada em Silva (2016), a qual aponta que os ensinamentos de Aritmética e Álgebra são vistos como partes distintas, como se uma vez concluído o trabalho com conhecimentos aritméticos, se começasse então o desenvolvimento de conhecimentos algébricos.

Bilhalva (2020) elabora também sobre o pensamento algébrico sob a visão de alguns autores. Ponte, Branco & Matos (2009) observam que aprender Álgebra implica em ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações envolvendo relações, regularidades, variação e modelação; Cyrino & Oliveira (2011, Bilhalva, 2020, p.23) apresentam o pensamento algébrico como a maneira de dar significado para os objetos da Álgebra, às relações existentes

entre eles, à modelação e à resolução de problemas. Fiorentini, Fernandes & Magalhães (2005) enunciam caracterizadores do pensamento algébrico, enfatizando a ideia de que para possibilitar seu desenvolvimento na educação básica, o professor precisa levar para a sala de aula atividades que manifestem tais caracterizadores. Esse olhar científico acadêmico e sua exteriorização, no caso, para sala de aula, auxilia o docente não somente com bases teóricas, mas com possíveis ideias e formulações para novas práticas didáticas. Entre os caracterizadores listados estão: estabelecer relações entre expressões numéricas ou padrões geométricos, produzir mais que um modelo aritmético para uma mesma situação-problema, desenvolver algum tipo de processo de generalização e desenvolver uma linguagem concisa ou sincopada ao expressar-se matematicamente. Analisando as resoluções das atividades, foi identificado que os alunos compreendem noções algébricas, porém, têm ainda dificuldades para representá-las em linguagem matemática formal. Por fim, são apresentadas perspectivas de continuidade da pesquisa como, por exemplo, ampliar os conjuntos de situações do CCA.

Os trabalhos de Klopsch (2010) & Bilhalva (2020) se complementam ao desenvolver sobre a TCC e a análise e utilização do CCA, por vezes também repetindo conceitos. Porém tanto na complementaridade como na recorrência, ambas abordagens trazem contribuições diversas e adicionais. As duas autoras compartilham a preocupação apontada no início deste trabalho, e verificada em diversas pesquisas, em procurar entender como é para o aluno do Ensino Fundamental o “trabalhar” com a Álgebra, sistematizando, de formas diferentes, modelos de análise. Nesta procura, fica evidente a necessidade do desenvolvimento e elucidação de teorias, sejam elas de aprendizagem, concepções algébricas, de uso das variáveis, que auxiliem na investigação, alicercem possíveis conclusões e direcionem para novas formas de ensino e de aprendizagem.

A dissertação de Bortoletti (2014) apresenta planejamento, execução e análise de uma sequência didática que visa introduzir as expressões algébricas aos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Durante o desenvolvimento das atividades planejadas, os estudantes passaram a utilizar variáveis a partir da generalização de determinadas situações numéricas e, posteriormente, as variáveis passaram a ser associadas às células de planilhas eletrônicas. O autor traz uma preocupação recorrente para os professores que lecionam no Ensino Fundamental: despertar o interesse do estudante na Álgebra, fugindo dos exercícios mecânicos e da manipulação de símbolos e regras. Corroborando com estas palavras, não é difícil perceber nos alunos um certo grau de desconforto com a forma tradicional que se trabalham conceitos algébricos. Independentemente da influência possível de uma matriz programática ou dos padrões estabelecidos pelos livros e apostilas didáticos, as aulas de Álgebra são sobrecarregadas em mecanicidade, levando o aluno a saber operar com letras de forma semelhante como aprenderam com outros símbolos,

os números, mais do que desenvolver um pensamento de generalização e abstração, tão relevantes para a construção do raciocínio matemático. Não sem razão, a pergunta de pesquisa colocada pelo autor é: “Como introduzir aos estudantes a linguagem algébrica de forma que o uso de letras, representando quantidades numéricas, seja um assunto compreensível pelos estudantes e não se torne algo sem significado?”.

Em busca do questionamento, o pesquisador transita por campos diversos em seu texto; desde o desenvolvimento da álgebra escolar, passando pela metodologia da Resolução de Problemas, alcançando os estudos sobre representação semiótica de Raymond Duval. Ao abordar o ensino da Álgebra no Ensino Fundamental, faz uso de discussões apresentadas anteriormente, como as concepções de Álgebra segundo Usiskin ou as contribuições de Fiorentini sobre a construção do pensamento algébrico. Com vistas a dar significado ao trabalho algébrico para o estudante do Ensino Fundamental, Bortoletti (2014) se apoia no direcionamento da metodologia do ensino através da Resolução de Problemas proposta por Allevato & Onuchic (2009) e Polya (1978). Estes autores enxergam em tal metodologia de ensino uma forma de fazer o aluno ser ativo em relação à construção do conhecimento, entendendo que por meio dela o mesmo pode vir a reconhecer diferentes funções da Álgebra, como por exemplo, modelar, resolver e demonstrar. Evidencia-se a inquietação do pesquisador em buscar alternativas à recorrente mencionada mecanicidade do ensino e aprendizagem da Álgebra em tal fase do ensino escolar.

Bortoletti (2014) enriquece o trabalho ao trazer discussões de Duval, principalmente àquelas relacionadas à Álgebra, em particular, a transição entre linguagem natural e símbolos algébricos. Duval defende que através das representações semióticas, como desenhos, tabelas, escritas algébricas entre outras, é que se desenvolve o processo cognitivo do pensamento. Duval (2010) apresenta dois tipos de transformação semiótica: o tratamento e a conversão. O tratamento caracteriza-se por continuar no mesmo sistema; a conversão consiste na mudança de sistema. Duval (2012) aponta que a grande dificuldade que os estudantes apresentam ao transcrever uma frase para a escrita simbólica explica-se justamente pela não congruência destas duas representações. Recorrendo a exemplos, Bortoletti (2014) elucida tais conceitos para o leitor e aproxima a pesquisa de seus propósitos. A escrita algébrica é a representação de um objeto matemático; o estudante que não se apropria desta simbologia não vê sentido, não percebe sua dimensão e tem dificuldade com o trabalho algébrico. Tal teoria sugere perspectivas e, conforme o texto, indica que a passagem entre diferentes registros de representação não é algo natural e, portanto, deve ser trabalhada pelos professores de Matemática com atividades que auxiliem o estudante.

Por fim, a investigação busca encaminhar uma proposta de prática pedagógica para introdução às expressões algébricas apoiada na Resolução de Problemas e com o uso de tecnologias

digitais, no caso, planilha eletrônica. Conclui-se que as atividades oportunizaram aos estudantes o trabalho com as expressões algébricas de forma natural e o desenvolvimento de diversas características necessárias ao pensamento algébrico. Bortoletti (2014) também afirma que é possível, assim como pensam outros os autores deste trabalho, introduzir os estudantes ao uso da simbologia das letras de forma que, em um processo de apropriação e ampliação, palavras estas do próprio pesquisador, eles atribuam significado à linguagem algébrica.

2.2 Discussão

Verificando os dados e resultados das dissertações analisadas, observam-se aspectos relevantes para o tema em questão. As dificuldades, em seus diversos níveis e fatores, apresentada pelos alunos em desenvolver a Álgebra dos anos finais do Ensino Fundamental é um aspecto recorrente. Observando os trabalhos categorizados como “Argumentação Algébrica” no Quadro 1, Magalhães (2016) pondera, segundo os relatos dos próprios alunos, que os professores utilizam apenas atividades repetitivas de completar e resolver cálculos diretos, não estimulando o raciocínio do pensamento algébrico. Em sua investigação, o autor utilizou-se de atividades com padrões geométricos e numéricos para levar o aluno a refletir sobre a representação algébrica em suas tarefas do dia a dia, ao que chamou de “estratégia de ensino diferenciada”, proporcionando o estabelecimento de relações entre padrões e generalizações. Ele conclui que tais relações proporcionaram para o aluno maior autonomia na busca de meios de resolução para questões algébricas.

A dissertação de Silva (2016) aponta em seus resultados que um dos caminhos para o sucesso no ensino dessa área seria uma introdução ocorrendo de forma significativa para o aluno, oportunizando um amadurecimento do pensamento algébrico. Desta forma, ao entender e interpretar situações que envolvam uma nova simbologia, o aluno faz do conteúdo uma ferramenta facilitadora para problemas e situações do dia a dia. Ao desenvolver seu trabalho apoiado nas concepções de Álgebra de Usiskin, a autora desenvolve conjecturas que se apresentam como realidade em salas de aula de Matemática. Seu resultado de pesquisa, que se traduz em uma proposta didática de cunho exploratório, evidencia uma extensão do que se observou nas dissertações analisadas.

Silva (2009) aponta que a maioria das dificuldades apresentadas pelo grupo de alunos pesquisados é fruto da forma como são abordados os diferentes usos da variável na álgebra escolar, não evidenciando a diferenciação entre os papéis que a variável pode assumir. Utilizando-se do modelo 3UV proposto por Trigueros e Ursini (2001), a pesquisa buscou verificar conhecimentos que se manifestam na simbolização, manipulação e interpretação das variáveis. Na visão da autora, predomina a necessidade, por parte do aluno, de apresentar uma solução manipulando os símbolos, porém “esquecendo” o que eles representam. Emerge o uso

dos procedimentos algorítmicos, enfatizando assim que o fato de manipular as variáveis por mero uso sistemático parece mostrar a dissociação entre os aspectos simbólico e substancial teorizados por Caraça.

A dissertação de Miranda (2014), ao buscar identificar como as noções de variável são articuladas pelos alunos em ambiente escolar, observou as dificuldades apresentadas em cada um dos três usos propostos pelo modelo 3UV. Verificou que os alunos interpretam as situações problemas de modo que a interpretação proporciona uma maior compreensão do campo algébrico, evidenciando que tal compreensão não é consolidada devido ao que a autora chamou de “obstáculo de grande influência”: a tradução da linguagem usual para a linguagem matemática. No uso da variável como incógnita, aponta que a tradução está presa a princípios aritméticos, que refletem no modo como o aluno desenvolve expressões algébricas. No uso como número genérico, ou padrão generalizador, a tradução é influenciada pela falsa analogia entre linguagem usual e linguagem matemática, que pode ser verificado quando o aluno transpõe linearmente as palavras da linguagem usual para a simbolização matemática, sem levar em consideração o caráter semântico das linguagens. No uso da variável como parâmetro, ou variável relacionada, a tradução encontra barreiras no processo de generalização, este referente ao reconhecimento das relações entre variáveis dependentes e independentes. Miranda (2014) observa que tais dificuldades fazem com que a interpretação realizada pelos alunos não saia do estágio de desenvolvimento fundamentado nos princípios aritméticos, criando obstáculos para o estabelecimento de conexões com os princípios algébricos. Ela conclui que a tradução escrita da linguagem usual para a linguagem algébrica se transforma em um obstáculo de ordem epistemológica para a noção de variável.

Pimentel (2014) constata que o aluno, em seu dia a dia, apresenta uma forma passiva de comportamento frente ao processo de aprendizagem. O autor verifica a dependência do estudante de seguir modelos e sequências de procedimentos determinadas pelo professor, trazendo que a introdução de técnicas algébricas, por meio da Resolução de Problemas, desperta a autonomia dos alunos e dessa forma contribui para uma formação que apresente significados dentro da Álgebra. O autor sugere a necessidade do trabalho de pré-álgebra, como a generalização das operações aritméticas, apontando que tal modelo trará maiores condições de entendimento do significado da letra em contextos algébricos.

Os trabalhos categorizados como “Teorias de Aprendizagem”, conforme Quadro 1, traçam paralelos das teorias utilizadas como referencial teórico com os obstáculos apresentados pelos estudantes para construir o raciocínio algébrico. Ao criar um instrumento avaliativo como forma de análise, Klopsch (2010) busca englobar neste instrumento elementos considerados como relevantes para o Campo Conceitual Algébrico, trazendo que para Vergnaud (1996), o conhecimento possui uma forma operatória, o saber-fazer, e

uma forma predicativa, o saber explicitar os objetos e suas propriedades. A autora procurou se aproximar de um meio para avaliar a forma predicativa do conhecimento algébrico, verificando como os alunos evidenciam tal conhecimento. A partir dos resultados apurados, conclui que os estudantes estão pouco habituados a explicar conceitos matemáticos, inferindo que a forma como o saber algébrico é ensinado nas escolas pode ser um dos motivos das dificuldades apresentadas pelos alunos. A mesma autora cita inclusive que os PCNs apontam para a necessidade de que sejam propostas situações que se distanciem das atividades mecanizadas.

Articulando com Bilhalva (2020), onde faz sua investigação sob a perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, a autora aponta que os alunos participantes da atividade tiveram muita dificuldade para realizar o que foi proposto, ressaltando que os mesmos já tinham noções de resolução de questões algébricas. Ao propor uma abordagem exploratório investigativa na qual não há uma explicação prévia, onde o aluno é levado a observar, interagir e fazer relações, criou-se uma certa inquietação no estudante acostumado a realizar tarefas escolares após a explicação dada. Ela aponta que tal dificuldade apresentada se deveu à falta de estabelecimento de relação entre o papel da representação da letra e seu significado, reforçando a necessidade de se trabalhar com a significação antes da representação.

Recorrendo à análise da dissertação de Klopsch (2010), é possível fazer o paralelo entre o saber-fazer e a representação, e o saber explicar e a significação. Percebe-se a constância do ensino de Matemática voltado para a prática do algoritmo mais do que para os porquês e sentidos. Existe a preocupação maior em fazer o aluno reproduzir ao invés de preparar o aluno para pensar. A Álgebra mecanizada, que passa a letra para um lado da igualdade e o número para o outro lado, que não reflete possibilidades e sim automatização, não oportuniza para o aluno construir o pensamento algébrico da abstração e da generalização. Importante notar, ainda em Bilhalva (2020), que ao propor que os alunos criassem suas próprias estratégias, mesmo não tendo ocorrido a escrita algébrica, houve indícios da manifestação do pensamento algébrico, corroborando com Fiorentini, Fernandes e Magalhães (1993) que aponta que o pensamento algébrico pode ser manifestado através de diversos meios, mesmo sem a representação algébrica formal.

Bortoletti (2014), a partir da teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Duval, ressalta que as atividades propostas propiciaram aos alunos o contato com diferentes registros ao levar os mesmos a expressarem sequências numéricas ou geométricas através da linguagem algébrica. Coadunando tais atividades com a metodologia do ensino através da Resolução de Problemas, o pesquisador oportuniza ao aluno criar suas conexões de conceitos a partir de um problema antes mesmo da formalização do professor. Aproximando com a abordagem exploratório investigativa proposta em Bilhalva (2020), percebe-se uma disposição similar em trabalhar a Álgebra pela construção do raciocínio,

seja pelos conceitos constituídos, seja pelos possíveis tipos de registros, de tal forma que o estudante interaja com o seu aprendizado de forma ativa, buscando relações e significados. O autor conclui que é possível introduzir os estudantes ao uso de letras de forma que eles atribuam significado à linguagem algébrica, orientando que o ensino de Álgebra seja em um processo crescente de apropriação e ampliação.

Ao buscar sintetizar os dados, impactos e sugestões relatados pelas oito dissertações analisadas, é preciso trazer de volta as inquietações dispostas no início deste trabalho. Vislumbrando a Álgebra como importante campo da Matemática e de significativas implicações no dia a dia do ensino e aprendizagem, mais especificamente na escola básica, e da relevância dos conceitos intrínsecos a mesma, em especial o conceito de variável, estabeleceram-se algumas reflexões. Como o aluno dos Anos Finais do Ensino Fundamental lida com a experiência do “mundo” das letras na Matemática? Que dificuldades ele apresenta para identificar e operar com símbolos além de números? Como se dá o processo da construção do pensamento algébrico?

Pode-se inferir que, independentemente da ênfase teórica conferida às dissertações, neste trabalho categorizadas em Teorias de Aprendizagem e Argumentação Algébrica, existe uma recorrência em certos referenciais teóricos, que no todo se complementam, e uma constante preocupação acerca do modo como a álgebra é colocada para os alunos e as dificuldades que estes apresentam. Os autores, no geral, destacam que a construção dos conceitos feitos por parte dos alunos está diretamente ligada ao modo como os mesmos são apresentados a eles. Observa-se, em meio a tais fatos, aspectos e direcionamentos que se compartilham em demandas como: um maior entendimento e aprofundamento nas dificuldades dos alunos, o estabelecimento das relações e conexões entre aritmética e álgebra, a atenção com a transição entre linguagens (usual, simbólica, algébrica), a produção do significado algébrico para mais que a manipulação mecanizada de símbolos, o discernimento entre os vários e possíveis usos da variável e a busca por alternativas e estratégias didáticas com vistas à construção do pensamento algébrico. Os autores deste trabalho entendem que tais demandas, entre outras mais específicas, vão de encontro às interrogações que foram feitas e auxiliam no porvir de pesquisas próprias e de outros.

3 Conclusão

Este estudo, com o formato de Estado da Arte, deteve-se em analisar dissertações que versam sobre a construção do pensamento algébrico na escola básica de modo a tratar de inquietações recorrentes entre docentes e estudiosos da área. Ao categorizar e analisar o que trazem os referenciais teóricos e as metodologias utilizadas no desenvolvimento das práticas em relação ao objeto de estudo, esta pesquisa observou, e aqui ratifica-se, que existe uma preocupação central acerca do modo como a Álgebra é apresentada para os alunos no Ensino Fundamental.

As dificuldades apresentadas pelos estudantes quanto a compreensão dos conceitos algébricos e na construção do pensamento algébrico se apoiam na falta de métodos adequados quanto ao seu ensino em sala de aula. Em relação ao modo como os conceitos algébricos são apresentados para os estudantes, destaca-se que os professores por vezes fazem uso de atividades repetitivas, de completar e resolver cálculos diretos, não estimulando o raciocínio do pensamento algébrico. Tal dinâmica cria uma dependência em seguir modelos e sequências de procedimentos determinadas pelo professor. Fiorentini (2005, p.4, apud Fiorentini & Miorim, 1993) aponta que “tradicionalmente o ensino da álgebra se sustenta na crença de que o pensamento algébrico só se manifesta e se desenvolve a partir do cálculo literal ou através da manipulação da linguagem simbólica da álgebra”. O mesmo autor complementa que “tanto do ponto de vista histórico quanto cognitivo, a linguagem algébrica é também resultado de uma forma especial de pensamento”. Por consequência, percebe-se que muitas das dificuldades apresentadas pelo grupo de alunos pesquisados é fruto da forma como são abordados os diferentes usos da variável na álgebra escolar.

As pesquisas mostram que a introdução da álgebra sendo feita de forma significativa ao aluno oportuniza um amadurecimento do pensamento algébrico. A introdução de conceitos algébricos por meio, por exemplo, da Resolução de Problemas, desperta a autonomia e contribui para uma formação que apresenta significados dentro da Álgebra. A necessidade do trabalho de pré-álgebra, como a generalização das operações aritméticas, é apontada como um modelo que traz maiores condições de entendimento do significado da letra em contextos algébricos. Atividades com padrões geométricos e numéricos levam o aluno a refletir sobre a representação algébrica em suas tarefas do dia a dia, proporcionando o estabelecimento de relações entre padrões e generalizações. Verificou-se também que a interpretação de situações problema proporciona maior compreensão do campo algébrico, alertando ao obstáculo apresentado na tradução da linguagem usual para a linguagem matemática. Muitas vezes o uso da variável como incógnita fica atrelada a princípios aritméticos, uso este advindo dos padrões repetitivos de aula e de livros didáticos, refletindo no modo como o aluno desenvolve expressões algébricas.

A análise das obras selecionadas aponta para a necessidade de situações de ensino que propiciem ao estudante estabelecer relações e conexões entre a aritmética e a álgebra, dedicando especial atenção com a transição entre as linguagens usual, simbólica e algébrica. Fica evidenciado que o trabalho com Álgebra no Ensino Fundamental deve ir além da manipulação mecanizada de símbolos, discernindo os vários e possíveis usos da variável e a busca por estratégias didáticas com vistas à construção do pensamento algébrico.

A despeito da privação de informações de demais trabalhos, entende-se que tal amostra trouxe representatividade e sustentação para a discussão sobre o assunto proposto,

concluindo-se que, após as análises e reflexões realizadas, existe o potencial e a necessidade de continuidade e desenvolvimento de pesquisas com o referido tema. Entende-se que este estudo pode auxiliar outras pesquisas quanto ao status sobre investigações que tratam sobre o estudo da Álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental.

Referências

- Allevato, N.S.G., & Onuchic, L.R. (2009). Ensinando Matemática na Sala de Aula através de resolução de Problemas. *Boletim GEPEN*, 55, 133-154.
- Bilhalva, A.S. (2020). Investigando o pensamento algébrico à luz da teoria dos campos conceituais. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pelotas.
- Bortoletti, A.A. (2014). Introdução às expressões algébricas na escola básica: variáveis e células de planilhas eletrônicas. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. MEC/SEF.
- Caraça, B.J. (1954). *Lições de álgebra e análise*. Lisboa: Sá da Costa.
- Duval, R. (2012). Diferenças semânticas e coerência Matemática: introdução aos problemas de congruência. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(1), 97-117. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p97>.
- Duval, R. (2010). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: S.D.A. Machado. *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*, (pp. 11-33). Campinas: Papirus.
- Falcão, J.T.R. (2003). Álgebra só se ensina lá pela 7ª série. *Boletim Salto para o Futuro*, 8-17. MEC Secretaria de Educação a Distância. TV Escola.
- Falcão, J.T.R. (1994). Representação do problema, escrita de fórmulas e tutoria na passagem da aritmética à álgebra, 4(2), 1-28. Eventos: Brasília.
- Fiorntini, D.; Fernandes, F.L.P.; Cristovão, E.M. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Seminário Luso-Brasileiro de Investigações Matemáticas*. Universidade de Lisboa.
- Fiorntini, D., Miorim, M.Â. & Miguel, A. (1993). A contribuição para repensar a educação algébrica elementar. *Pró-posições*, 4(1), 78-91.
- Guimarães, L.J.B.L.S. (2022). Chatbot em contexto: Design de experiência do usuário aplicado à recuperação da informação no catálogo de dissertações e teses da CAPES (Tese de doutorado). Programa de Pós-Graduação em Ciência da Informação. Universidade Federal de Minas Gerais.
- Klopsch, C. (2010). Campo conceitual algébrico: análise das noções a serem aprendidas e dificuldades correlatas encontradas pelos estudantes ao final do ensino fundamental (8ª série 9º ano). (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco.
- Küchemann, D. (1987). Algebra. In: K.M. Hart. *Mathematics*. (pp.102-119). London: Joh Murray.
- Magalhães, A.G. (2016). Construção de conceitos algébricos com alunos do 7º ano. (Dissertação de Mestrado). Centro Universitário Univates.
- Miranda, T.L. (2014). A noção de variável de alunos do ensino

- fundamental. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Pará.
- Pimentel, D.E. (2014). Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da Aritmética para a Álgebra. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de São Carlos.
- Polya, G. (1978). A arte de resolver problemas. Interciência.
- Ponte, J. P., & Matos, A. (2009). Álgebra no ensino básico. Ministério da Educação.
- Romanowski J. P., & Ens, R. T. (2006). As pesquisas Branco, N.; denominadas do tipo “estado da arte” em educação. *Diálogo Educação*, 6(19), 37-50.
- Silva, C.B. (2016). Introdução a álgebra no ensino fundamental: o “X” da questão. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual Paulista.
- Silva, R.M. (2009). Diferentes usos da variável por alunos do ensino fundamental. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Trigueros, M. & Ursini, S. (2001). A model for the uses of variable in elementary algebra. In: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 25. (pp. 327-334). Proceedings H University.
- Usiskin, Z. (1995). Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis: As ideias da Álgebra. *Atual*.
- Vergnaud, G. (1996). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEMPA*, 4, 9-19.