DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2024v17n2p231-242

A Proposição de Problemas como Recurso Potencializador de um Caminhar de Exploração de Problemas: uma Experiência com a Calculadora Gráfica Desmos

Problem Posing as a Potential Tool for a Problem Exploration Walk: an Experience with the Desmos Graphing Calculator

Jair Dias de Abreu*[a]; Adriano Alves da Silveira[a]; Fabíola da Cruz Martins[a]; Silvanio de Andrade[a]

[a]Universidade Estadual da Paraíba. PB, Brasil.
*E-mail: jairedmat@gmail.com

Resumo

Este artigo objetiva analisar em quais aspectos a Proposição de Problemas como um recurso potencializador de um caminhar de exploração de problemas, articulado ao uso da calculadora gráfica Desmos, pode impulsionar o ensino-aprendizagem de Matemática. Para fundamentar essa discussão, apresentam-se aspectos teóricos relacionados à Resolução de Problemas como metodologia de ensino, sob uma perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e, em seguida, traz-se uma discussão prática sobre uma atividade de pesquisa realizada no âmbito do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade. A atividade desenvolvida evidencia que, na perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, existe um movimento não-linear durante todo o processo, o qual não se limita à resolução de um problema, mas desperta novas reflexões, descobertas e sínteses. Durante o trabalho de exploração da atividade, fez-se uso da calculadora gráfica Desmos fazendo-se perceber o quanto esse recurso pode potencializar a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, ampliando suas possibilidades. Os resultados deste estudo evidenciaram a existência de um movimento complexo durante todo o processo de exploração de problemas, o qual não é sequenciado, em que se toma como ponto de partida a Proposição de Problemas ao mesmo tempo em que se mantém a Resolução do Problema junto ao trabalho de propor, resolver e explorar problemas. É possível perceber que o fim dessa discussão não demarca o fim da exploração do problema. Dessa forma, conclui-se que essa é uma característica ímpar da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, em que o trabalho realizado não termina ao fim de um momento de resolução e proposição de problemas.
Palavras-chave: Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação. Aplicativo Desmos. Educação Matemática.

Abstract

This paper aims to analyze in which aspects the Problem Posing as a tool that enhances the Problem Exploration, linked to the use of the Desmos graphing calculator, can boost the Mathematics teaching-learning. To support this discussion, it's presented theoretical aspects regarding to Problem Solving as a teaching approach, from a Problem Exploration-Posing-Solving perspective and then it's made a practical discussion about a research activity carried out within the scope of the Study and Research Group on Education and Post Modernity. The activity that was developed shows that, from the perspective of Problem Exploration-Posing-Solving, there is a non-linear movement throughout the process, which is not only limited to solving a problem, but awakens new reflections, discoveries and syntheses. During the activity exploration work the Desmos graphing calculator was used, making it clear how much this tool can enhance Problem Exploration-Posing-Solving, expanding its possibilities. The study results has showed the existence of a complex movement throughout the problem exploration process, which is not sequenced, in which it's take the Problem Posing as a starting point while maintaining the Problem Solving alongside the work to posing, solving and exploring problems. It is possible to see that the end of this discussion does not mark the end of the problem exploration. Therefore, it has been concluded that this is a unique characteristic of Problem Exploration-Posing-Solving, in which the work carried out does not end at the end of a Problem Posing and Solving moment
Keywords: *Problem Exploration-Posing-Solving. Information and Communication Digital Technologies. Desmos App. Mathematics Education.*

1 Introdução

O trabalho com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas tem sido compreendido em uma perspectiva atual da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, o qual tem avançado nas discussões nessa linha de pesquisa, pois tem compreendido a sala de aula como um espaço aberto, não-linear e que possibilita um trabalho que pode ir além da própria matemática.

A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas não é uma linha de pesquisa isolada. É uma metodologia composta por três elementos interdependentes, a qual é desenvolvida de modo integrado, envolvendo etapas de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

Nessa perspectiva, surgem diversas possibilidades para o desenvolvimento de um trabalho nessa direção, podendo, inclusive, articular com outras metodologias de ensino, como é o caso deste trabalho, uma vez que fazemos uma articulação com as Tecnologias Digitais (TD). Esses recursos didáticos têm potencializado o trabalho com a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, pois, por meio delas, o aluno tem uma gama de possibilidades de contemplar esses momentos da metodologia de forma mais profunda e precisa.

Neste artigo, temos como objetivo analisar em quais aspectos a Proposição de Problemas como um recurso potencializador de um caminhar de Exploração de Problemas, articulado ao uso da calculadora gráfica Desmos, pode impulsionar o ensino-aprendizagem de Matemática. A calculadora gráfica Desmos foi utilizada como um recurso didático, que possibilitou aprofundamentos na Exploração de Problemas, nos permitindo identificar suas potencialidades frente a essa proposta metodológica.

Para tanto, trazemos resultados de discussões geradas a partir de uma atividade desenvolvida no Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), grupo composto por alunos regulares e egressos do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM/UEPB).

Salientamos que o GEPEP tem desenvolvido pesquisas e práticas de ensino que alcançam a sala de aula de Matemática, no contexto da Educação Matemática, as quais vêm abrangendo, em sua totalidade, discussões geradas em torno da metodologia de Resolução de Problemas e suas implicações para o cotidiano de sala de aula.

Essas pesquisas têm proporcionado destaque ao grupo em âmbito nacional e internacional, em que, sob a ótica da proposta de "*Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução, Codificação e Descodificação de Problemas"* (Andrade, 1998; 2017), os pesquisadores desse grupo vêm discutindo como se configura uma aula de matemática por meio dessa proposta, identificando suas potencialidades a partir de um olhar profundo sob todo desenrolar de uma "trama de sala de aula", que emergem de um olhar multicontextual para a sala de aula de matemática.

Neste artigo, toda a atividade foi desenvolvida sob a perspectiva da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998, 2017) objetivando uma discussão junto a professores e professoras de matemática de modo que isso contribua em suas propostas de pesquisas e reflitam a multicontextualidade da sala de aula de matemática. Essa discussão é importante, pois como mencionam Martins e Andrade (2022), uma das decisões mais significativas na prática docente envolve a escolha das atividades propostas em sala de aula, pois é através delas que o professor busca alcançar seus objetivos pedagógicos.

Dessa forma, destacamos a relevância das discussões apresentadas neste artigo, considerando que é fundamental que professores, tanto em formação quanto em serviço, incorporem em suas práticas metodologias e recursos didáticos que promovam o ensino-aprendizagem de Matemática de modo efetivo.

2 Desenvolvimento

2.1 Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no Ensino-Aprendizagem de Matemática

Os problemas de matemática ocupam um lugar central nos currículos desde a antiguidade, os quais sempre fizeram parte de situações cotidianas e passaram a ser contemplados nas salas de aula de matemática. No entanto, diversos entendimentos sobre os problemas na sala de aula existiram ao longo da história, em que nem sempre a Resolução de Problemas foi contemplada da forma que trabalhamos atualmente. Nas últimas décadas, educadores matemáticos vêm discutindo a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece uma atenção especial (Andrade, 1998; Onuchic, 1999; Stanic; Kilpatrick, 1989).

Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina e Bruder (2016) pontuam que a resolução de problemas matemáticos tem sido vista nas pesquisas como um aspecto importante do ensino e aprendizagem da matemática, fomentando os currículos de matemática em todo o mundo, com convites para o ensino de resolução de problemas, bem como o ensino da matemática através da resolução de problemas. Os autores explicam que essa temática tem despertado o interesse dos pesquisadores desde a existência da Educação Matemática, o que permitiu o "ingresso" para participarem, de forma efetiva, de todas as conferências do ICME (*International Congress on Mathematical Education* - Congresso Internacional de Educação Matemática), datado o primeiro encontro em 1969.

Assim, observa-se que há esforços dos pesquisadores no mundo inteiro que explicitam diferentes estudos e práticas de Resolução de Problemas que avançaram nas últimas décadas com relação à compreensão de aspecto afetivo, cognitivo e metacognitivo da resolução de problemas em matemática. Além disso, nota-se um número considerável de pesquisas sobre o ensino de resolução de problemas matemáticos em sala de aula, bem como o ensino de matemática através da resolução de problemas (Lester; Cai, 2016).

Andrade (1998; 2017) percebeu que as abordagens iniciais de resolução de problemas, principalmente as da década de 1980, limitavam-se apenas à busca da solução do problema, nunca ia além do problema inicialmente dado. Nota-se, hoje, que ainda precisamos avançar bastante nesse sentido. A partir daí, o autor apresenta uma proposta de Exploração de Problemas, visando dar conta dessa limitação, já que, entre outros pontos, tem-se como orientação teórica/prática ir além da resolução do problema. O pesquisador afirma que,

> No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez (Andrade, 1998, p. 24).

Andrade (2017) enfatiza um novo modelo em que a exploração e a resolução de um problema são desenvolvidas a partir de um movimento aberto, não fechado, embora não solto, denominado de Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R). Numa aplicação prática desse modelo, inicialmente, é dado ou proposto um problema ou situação-problema, que pode partir tanto do professor quanto dos próprios alunos. Esses alunos realizam um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e sínteses, chegando, desse modo, possivelmente, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses. Andrade (2017) explica que,

> A proposta de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas precisa ser sempre percebida como uma proposta aberta, não fechada, embora não solta, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas, nos encantos e desencantos, na transfiguração poética, no espaço-tempo, que o cotidiano da sala de aula nos proporciona. O final de uma experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo (Andrade, 2017, p. 367).

Silveira e Andrade (2020) enfatizam que, nessa abordagem, quando o aluno compreende o problema e suas soluções, cabe ao professor incentivar a exploração de novos problemas a partir do problema inicial, visando a uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Ademais, quando o professor está explorando variações do problema que foi apresentado inicialmente, está propondo meios valorosos que levam os alunos a refletirem sobre os significados das diversas ideias matemáticas que estão implícitas no problema apresentado.

Silva (2013) ressalta algumas posturas pedagógicas que o professor pode adotar, quando operacionaliza a proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, sendo elas:

> Ir além do problema – no momento em que o professor faz uso do problema, mas extrapola os limites curriculares dele;
> Construindo novos problemas – na exploração de uma determinada situação-problema, o professor lança mão de novas situações derivadas da primeira;
> Buscando padrões e mediando a aprendizagem – ao trazer situações mediadoras para situações mais complexas, intensificando a aprendizagem do aluno (Silva, 2013. p. 21-22).

Desse modo, a proposta de Andrade (1998; 2017) tem como um dos principais fundamentos teórico-práticos ir além da resolução e solução do problema, com a realização de um trabalho de Exploração e Proposição de Problemas em perspectivas múltiplas. Sendo assim, as pesquisas do GEPEP têm acompanhado o movimento do campo de Resolução de Problemas, uma vez que a literatura de pesquisa tem sugerido a Proposição de Problemas como um dos avanços emergentes das pesquisas e práticas de Resolução de Problemas (Cai, Hwang, 2020; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Jurado, 2016; Liljedahl, Cai, 2021; Silver, 1994; Singer, Ellerton, Cai, 2015).

Embora nos últimos anos os pesquisadores tenham dado mais atenção à Proposição de Problemas como temática de pesquisa e como uma forma de ensinar e aprender matemática (Cai, Hwang, 2020; Crespo, 2015; Felmer, Pehkonen, Kilpatrick, 2016; Jurado, 2013; Kilpatrick, 1987; Silver, 1994; Milinkovic, 2015; Singer, Ellerton, Cai, 2015), ainda há muito o que avançar para compreender o impacto de uma aula de matemática que coloca a responsabilidade do problema advindo do aluno, como também do professor.

A Proposição de Problemas não deve ser vista apenas como um objetivo de ensino, mas também como um meio de ensinar matemática. Nesse sentido, a experiência de descobrir e criar os próprios problemas matemáticos deve fazer parte da formação de cada aluno (Kilpatrick, 1987).

Cai e Hwang (2020) explicam sua estrutura de definição da Proposição de Problemas Matemático (PPM), separando os tipos de atividades intelectuais formuladas de acordo com o nível matemático e experiência dos propositores de problemas:

> Para os alunos, definimos PPM como consistindo nas seguintes atividades intelectuais específicas: (a) Os alunos propõem problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas, e (b) os alunos propõem problemas alterando (ou seja, reformulando) os problemas existentes (Cai; Hwang, p. 2, tradução nossa, grifo nosso). [1]
> Para os professores, definimos PPM como consistindo nas seguintes atividades intelectuais específicas: (a) Os próprios professores propõem problemas matemáticos com base em determinadas situações-problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas, (b) os professores preveem os tipos de problemas que os alunos podem propor com base em determinadas situações problemas, (c) os professores propõem problemas ao alterar os problemas existentes, (d) os professores geram situações de proposição de problemas matemáticos para os alunos proporem problemas e (e) os professores propõem problemas matemáticos para os alunos resolverem (Cai; Hwang, p. 2, tradução nossa, grifo nosso). [2]

Os estudos de Proposição de Problemas evidenciam que os alunos de todas as idades, incluindo, aqui, aqueles que mais tarde se tornam professores, apresentam experiências

1 For students, we define MPP as consisting of the following specific intellectual activities: (a) Students pose mathematical problems based on given problem situations which may include mathematical expressions or diagrams, and (b) students pose problems by changing (i.e., reformulating) existing problems.

2 For teachers, we define MPP as consisting of the following specific intellectual activities: (a) Teachers themselves pose mathematical problems based on given problem situations which may include mathematical expressions or diagrams, (b) teachers predict the kinds of problems that students can pose based on given problem situations, (c) teachers pose problems by changing existing problems, (d) teachers generate mathematical problem-posing situations for students to pose problems, and (e) teachers pose mathematical problems for students to solve.

limitadas, com relação à tarefa de propor seus próprios problemas (Crespo; Sinclair, 2008).

Jurado (2013) descreve diversas razões didáticas que evidenciam o potencial da Proposição de Problemas no ensino, com ênfase no professor, resultando em,

> propor problemas próximos das motivações dos alunos e aos contextos em que vivem; propor uma sequências de problemas de dificuldade gradual que levam a um problema particularmente importante; propor problemas que coletam as iniciativas, percepções ou dúvidas dos alunos, que contribuem para esclarecer ou expandir suas ideias, diante do desafio de solucionar problemas ou compreender matemática (isso fortalece muito uma dinâmica de aprendizagem por descoberta); [...] fortalecer a capacidade de pesquisa dos professores; melhorar a qualidade de avaliações; e consolidar a formação matemática de professores (Jurado, 2013, p. 130)[3].

A tarefa de propor problemas para as suas aulas de matemática se apresenta como uma atividade mais complexa para os professores do que para os alunos, sobretudo porque as responsabilidades dos docentes são ainda maiores, visto que devem refletirem não só a partir de perspectivas matemáticas do problema formulado, mas, também, olhar através de perspectivas pedagógicas (Crespo; Sinclair, 2008).

Andrade (2017) ressalta que, em todas as pesquisas realizadas pelos membros do GEPEP, a partir de uma imersão no cotidiano da sala de aula, a proposição de problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida junto aos alunos. Ainda de acordo com ele, isso advém de uma prática de sala de aula concentrada apenas na resolução de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos, em consequência disso, a proposição de problemas só é desenvolvida após um período intenso de trabalho de sala de aula, sendo que, inicialmente, emerge muito mais a resolução de problemas, em seguida, a exploração de problemas e, posteriormente, a proposição de problemas.

Na sua proposta, Andrade (2017) destaca que a proposição de problemas, na sala de aula, é percebida como uma ferramenta de problematização consciente que impulsiona e avança tanto o processo da resolução quanto o da exploração do problema. O pesquisador acrescenta que a proposição de problemas pode ocorrer tanto **antes** como **durante** e **depois** do processo de resolução e exploração de problemas. Nesse sentido,

> Sobre isso, explanamos que a proposição de problemas ocorre antes do processo de resolução e exploração de problemas, quando o foco principal não é a solução, e sim a proposição de novos problemas, tomando como ponto de partida alguma situação que tenha ligação com a matemática ou com alguma experiência vivenciada pelo aluno, e posteriormente a resolução dos mesmos. Além disso, a proposição de problemas ocorre durante o processo de resolução e exploração de problemas, quando, a partir de um problema dado, são formulados e explorados novos problemas, tanto pelo professor como pelos alunos. Ao fim, podem-se fornecer *insights* ao solucionador, possibilitando a solução do problema inicial, como também potencializando e aprofundando o conceito que está sendo construído. Por fim, a proposição de problemas pode ocorrer depois do processo de resolução e exploração de problemas, quando a solução de um problema impulsiona um processo de reflexões e síntese, gerando novos problemas em nível mais avançado ou não, e provocando, assim, uma aprendizagem com compreensão (Silveira; Andrade, 2022, p. 7-8).

Dessa forma, enfatizamos que, neste estudo, a proposição de problemas ocorreu antes, durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas. O ideal é que a proposição de problemas seja sempre o ponto de partida de todo o processo de resolução e exploração de problemas (Andrade, 2017).

Cai *et al.* (2015) discutem o estado atual da pesquisa em Proposição de Problemas e apontam algumas questões para futuras pesquisas. Dentre elas, nos chamam atenção o questionamento que consiste em observar como a tecnologia pode ser utilizada em atividades de proposição de problemas. A pesquisa em Proposição de Problemas tem avançado nos últimos anos, porém, quando se trata no uso das tecnologias associada a ela, ainda é muito tímida a sua investigação. Abramovich e Cho (2015) enfatiza essa realidade, pois,

> embora o interesse e a pesquisa do campo da educação matemática em proposição de problemas tendo sido ativa, [...], menos foco tem sido no estudo do papel da tecnologia na facilitação e avanço das habilidades na formulação de problemas. Além disso, estudos publicados sobre os problemas propostos com tecnologia não foram apenas limitados em número e escopo, mas também no nível da série. A maioria dos estudos foi realizada no nível secundário com ênfase principal no desenvolvimento de conjecturas em ambientes de geometria dinâmica (ou parcialmente dinâmica) (Abramovich; Cho, 2015)[4].

No que tange à relação entre a Proposição de Problemas e a Resolução de Problemas, Abramovich e Cho (2008) enfatizam que ambas estão, inerentemente, ligadas uma à outra através do uso da tecnologia. Em suas experiências com o uso de tecnologias, a exemplo de planilhas eletrônicas, os pesquisadores trazem reflexões quanto ao uso na proposição e resolução de problemas levando os professores a refletirem

3 [...] proponer problemas que sean cercanos a las motivaciones de los alunos y a los contextos en los que viven; crear secuencias de problemas de dificultad gradual que lleven a un problema particularmente importante; proponer problemas que recojan las iniciativas, percepciones o interrogantes de los alumnos, que contribuyan a aclarar o ampliar sus ideas, ante el reto de resolver problemas o de comprender temas de matemáticas (esto fortalece mucho una dinámica de aprendizaje por descubrimiento); [...]fortalecer la capacidad de investigación de los profesores; mejorar la calidad de las evaluaciones; y a consolidar la formación matemática de los profesores.

4 Although the mathematics education field's interest in and research on problem posing has been active [...], lessa focus has been on the study of the role of technology in facilitating and advancing skills in formulating problems. Further, published studies on problem posing with technology have been not Only limited in number and scope but also in grade level. Most of the studies have been conducted at the secondary level with the main emphasis on developing conjectures in dynamic (or partially dynamic) geometry environments.

criticamente sobre seus próprios problemas e discutirem o papel dos ambientes computacionais utilizados no desenvolvimento de problemas.

2 Metodologia

Este estudo foi realizado a partir de uma abordagem qualitativa, a qual, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), tem as seguintes características: i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; ii) a investigação qualitativa é descritiva; iii) o processo é tão importante quanto os resultados ou produtos; iv) os dados são analisados de maneira indutiva e v) o significado é de importância essencial na abordagem qualitativa.

Desse modo, destaca-se, a seguir, alguns pontos da pesquisa desenvolvida que correspondem aos aspectos citados.

Primeiramente, trataremos sobre o Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), âmbito no qual esta pesquisa foi desenvolvida. Esse grupo é composto por alunos regulares e egressos do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM/UEPB) em nível de mestrado e doutorado, os quais, semanalmente, se reúnem de forma presencial, on-line ou de forma híbrida, com encontros de duração em torno de duas horas.

O grupo é considerado um espaço rico, em que os participantes discutem os seus projetos de pesquisas, andamento das pesquisas, leituras realizadas e desenvolvem atividades com foco nas suas pesquisas, buscando, assim, aprofundar ideias e identificar limitações e potencialidades em suas atividades de pesquisa antes de elas serem levadas a campo.

Nesse sentido, o presente estudo é fruto das discussões geradas a partir de uma atividade desenvolvida no grupo. Nela, temos como objetivo analisar em quais aspectos a Proposição de Problemas como um recurso potencializador de um caminhar de Exploração de Problemas, articulado ao uso da calculadora gráfica Desmos, pode impulsionar o ensino-aprendizagem de Matemática.

Essa atividade foi desenvolvida de forma remota em decorrência da pandemia da COVID-19, momento este em que os encontros do GEPEP foram realizados via plataforma *Google Meet*. Aqui, trazemos resultados de uma exploração que aconteceu em dois encontros do grupo, com duração de duas horas cada, em que estavam presentes os autores deste artigo – membros do GEPEP e mediadores desta proposta de atividade, e mais quatro membros do grupo – alunos regulares do mestrado, todos professores e professoras de matemática em exercício.

No primeiro encontro, contamos com 4 participantes, além dos mediadores e líder do grupo, já no segundo encontro, estávamos em um total de 12 pessoas.

No primeiro encontro realizado no dia 31 de março de 2021, com base no texto de Jurado (2013), discutiu-se a Proposição de Problemas na formação do professor de Matemática, o que direcionou para a proposição de novos problemas a partir de um problema apresentado no texto. No segundo encontro, realizado no dia 07 de abril de 2021, demos continuidade à exploração dos problemas propostos, retomando as ideias iniciais do encontro anterior, selecionamos um dos problemas propostos para realizar uma exploração mais profunda.

Salientamos que as discussões e análises foram realizadas a partir do acompanhamento do desenvolvimento dos participantes no decorrer da oficina, em que os dados foram levantados por meio de uma atividade desenvolvida em dois encontros do GEPEP, tendo como registros: i) gravação dos encontros realizados via *Google Meet*; ii) registros escritos dos alunos na resolução das atividades e iii) diálogos registrados durante as aulas.

Utilizamos essa forma de registro por compreendermos que o propósito das atividades desenvolvidas não era centrado no resultado obtido, mas no percurso de cada aluno durante o desenvolvimento da atividade e no decorrer da exploração do problema.

Para auxiliar os participantes nas diferentes formas de representar a resolução do problema e potencializar a Exploração de Problemas, utilizamos como recurso didático a calculadora gráfica Desmos, pois temos em Abreu (2018) discussões que evidenciam suas potencialidades, a qual nos possibilitou explorar o problema de maneira mais profunda e interativa, sendo plausível irmos além do que era possível ser desenvolvido graficamente por meio de construções utilizando lápis e papel, ao mesmo tempo em que a Exploração de Problemas estava sendo realizada de forma remota, sendo mais eficiente o uso de recursos de natureza digital.

Discussão e análise da atividade de Proposição de Problemas

Inicialmente, compartilhamos, via *Google Meet*, a atividade de proposição de problemas. Em seguida, solicitamos aos participantes que a explorassem. Eles estavam incumbidos de evidenciar suas impressões, descobertas e anseios em forma de problemas.

Quadro 1 - Atividade de proposição de problemas.

Uma senhora deve receber 15 reais como troco de uma compra e pede ao caixa da loja que dê apenas em moedas de 1 real e notas de 2 reais.

Fonte: adaptado de Jurado (2013).

Durante o desenvolvimento do primeiro encontro, além dos mediadores, estavam presentes 4 participantes membros do GEPEP. Com o intuito de uma melhor organização das informações, denotaremos, aqui, os participantes que propuseram problemas por: P1, P2, P3 e P4 e PP os professores e pesquisados que estão mediando essa proposta de atividade. A seguir, evidenciaremos os problemas que foram propostos:

> P1: Se ela receber, no máximo, duas moedas de 1 real, será possível ela receber o restante do troco em notas de 2 reais?
> P2: Qual será o menor número de moedas de 1 real e notas de 2 reais no total, que ela receberá, se ela pedir para lhe dar a

mesma quantidade de moedas e notas?
P3: Se a quantidade de moedas de 1 real for o dobro da quantidade de notas de 2 reais, qual a quantidade de moedas e notas que ela receberá?
P4: Se a quantidade de notas de 2 reais for o dobro da quantidade de moedas de 1 real, qual a quantidade de moedas e notas que ela receberá?

É importante ressaltar que, a *priori*, quando pensamos a Proposição de Problemas a partir da Exploração de Problemas, não estamos preocupados com a resolução e solução dos problemas formulados, mas, sim, por meio de um movimento de problematização, traduzir a situação dada em forma de problemas, percebendo possíveis explorações e novos caminhos que pudessem levar à discussão de processos/procedimentos e conceitos/conteúdos matemáticos. Sobre isso, Silveira & Andrade (2022, p.18) explicam que:

> Na Resolução de problemas, o aluno deve pensar no conceito matemático, principalmente durante e depois do processo de resolução do problema. Isso difere na Proposição de problemas, sobretudo pelo fato de que a postura que pode/deve ser assumida pelo aluno requer uma tomada de consciência a qual exige pensar no conceito matemático antes mesmo da resolução e solução do problema.

Por sua vez, os participantes propuseram uma sequência de problemas que possibilitava pensar em um conceito/conteúdo matemático com profundidade. Para isso, solicitamos que os participantes explicassem suas proposições de problemas, enfatizando suas descobertas. Durante a explanação de P1, os participantes, por tentativa e erro, sistematizaram as possíveis somas que resultavam em 15, envolvendo moedas de 1 real e notas de 2 reais. Ademais, explicitaram uma descoberta que ajudou na resolução de todos os problemas, como também ratificou o quão eles foram bem-sucedidos com relação aos problemas propostos. Veja a seguir:

> P1, P2, P3, P4: Para que a senhora receba moedas de 1 real e notas de 2 reais, é necessário que a quantidade de moedas seja um número ímpar, como, por exemplo: 1 moeda + 7 notas de 2 reais, 3 moedas + 6 notas de 2 reais, 5 moedas + 5 notas de 2 reais, 7 moedas + 4 notas de 2 reais, 9 moedas + 3 notas de 2 reais e 13 moedas + 1 nota de 2 reais.

Nesse contexto, os participantes observaram padrões na proposição dos problemas, uma vez que, a partir do problema proposto por P1, levantaram e externaram algumas conjecturas, tais como: "A soma de dois números pares sempre resulta em número par"; "A soma entre um número ímpar e um n***úmero par sempre*** resulta em número ***ímpar***" e "A soma entre um número par com outro n***úmero par*** sempre resulta em número par".

É nossa atribuição, como professores e educadores matemáticos, reconhecer padrões existentes no mundo dos problemas matemáticos (Milinkovic, 2015). Por exemplo, durante as discussões, os problemas também foram representados algebricamente pelos participantes P3 e P4, denotando **x** como número de moedas de 1 real e **y** como o número de notas de 2 reais. Destacaram, respectivamente: **x = 2y** e **y = 2x**, ou seja, os problemas têm em comum o fato de um dos números desconhecidos ser igual ao dobro do outro. Em outras palavras, eles mantêm a mesma estrutura conceitual, já que a condição enfatizada pelo participante P3 foi: "Se a quantidade de moedas de 1 real for o dobro da quantidade de notas de 2 reais", e para P4 foi: "Se a quantidade de notas de 2 reais for o dobro da quantidade de moedas de 1 real".

Assim, defendemos que a Proposição de Problemas, pensada a partir da Exploração de Problemas, pode potencializar a busca de padrões na escrita dos problemas em termos de conceitos/conteúdos matemáticos, devido ao movimento de problematização, que possibilita ao explorador de problemas ir cada vez mais longe, ir cada vez mais fundo. Esse "ir" que não tem limite pode evidenciar que alguns dos problemas propostos convergem em termos de processos e conceitos/conteúdos matemáticos e, consequentemente, mantêm uma estrutura conceitual semelhante, facilitando, assim, a proposição de novos problemas.

Ademais, durante a proposição dos problemas, houve uma necessidade de controle de ideias matemáticas, mediante à necessidade de manter uma coerência da escrita dos problemas em termos de ideias matemáticas, no nosso caso, a soma de moedas de 1 real com notas de 2 reais resultar em 15. Assim, os problemas propostos pelos participantes podem ter solução ou não. Sobre isso, Milinkovic (2015) diz que a proposição bem-sucedida depende do resultado do conhecimento do professor sobre o assunto ou da falta dele.

No caso desta atividade, os participantes perceberam, sem muitas dificuldades (acreditamos que isso ocorreu pelo fato de serem professores), a necessidade do total de moedas a receber, ser uma quantidade ímpar. Esse dado corroborou para que fossem propostos problemas matemáticos com soluções. Essa descoberta permitiu que eles enfatizassem, no problema proposto por P1, que, se fosse exatamente 2 moedas de 1 real, não seria possível receber o troco de 15 reais. Contudo, esse problema trabalhado a nível de Educação Básica, na ótica da proposta de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, poderia ser explorado servindo como trampolim para a proposição de novos problemas, em que se toma alguns casos parecidos que permitem buscar padrões, visando ampliar para uma situação geral, compreendendo, assim, o motivo de um problema proposto nas condições dadas na atividade não possuir solução, e até aprofundando/refinando o debate, podendo partir não só do professor, mas, também, dos alunos a necessidade de modificar os dados da atividade para dar conta dessa limitação e continuar avançando.

As primeiras discussões em torno dos problemas propostos possibilitaram a resolução e solução dos problemas, consequentemente, chegando a novos conteúdos. As reflexões e sínteses (como, por exemplo, o levantamento de conjeturas sobre o resultado da soma de dois números naturais) permitiram ampliar e aprofundar o debate, ajudando, inclusive, a entender que podemos gerar um novo problema mudando o que é dado ou desconhecido, amparados na busca de padrões para a proposição dos problemas, como foi observado nos trabalhos realizados pelos participantes P3 e P4.

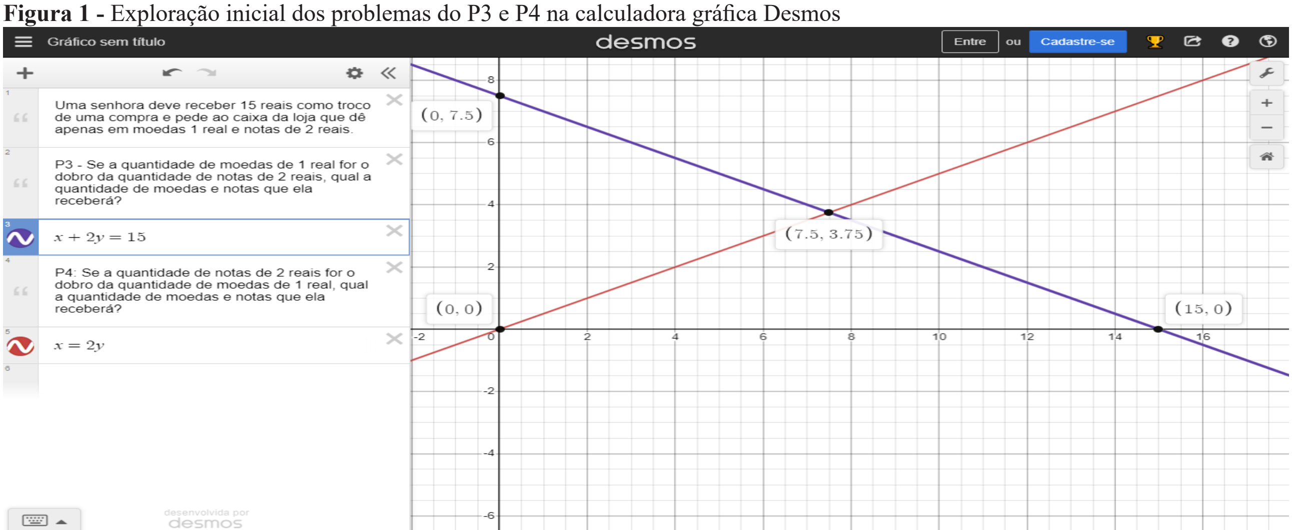
O aprofundamento da exploração dos problemas propostos foi direcionado ao final do primeiro encontro para os problemas propostos por P3 e P4. Tendo já explorado a representação algébrica dos problemas, os participantes começaram a questionar como seria a representação gráfica desses problemas. Para melhor subsidiar essa exploração, passamos a fazer uso da calculadora gráfica Desmos. Devido ao tempo, percebemos que seria melhor dar continuidade a essa exploração no próximo encontro tendo em vista que muitas eram as inquietações naquele momento e já estávamos há duas horas em frente à tela do computador e/ou smartphone. Um dos principais questionamentos que motivaram a necessidade do 2° encontro faz referência à forma de representar corretamente o gráfico da função, levando em consideração o problema ora explorado, limitando o domínio.

“Ademais, a exploração de um problema não pode ser vista como fim, mas sob uma perspectiva na qual, em um determinado momento, podemos retornar ao problema anterior buscando apresentar um novo conceito ou conteúdo em um nível mais avançado ou não” (Silveira & Andrade, 2020, p.8). Assim fizemos no segundo encontro. Retomamos à discussão que envolveu a proposição de problemas no encontro anterior. Passamos a contar com uma participação mais efetiva de membros do GEPEP neste encontro, totalizando 12 pessoas. Dessa forma, daremos continuidade à identificação dos novos participantes a partir de P5.

Para alguns participantes, o problema era considerado algo novo, uma vez que estavam iniciando o processo de exploração do problema. Já para os demais participantes que estavam desde o primeiro encontro, o problema já estava em um nível de aprofundamento tendo iniciado com a proposição e a resolução de forma aritmética, algébrica e estávamos, agora, buscando interpretar e representar o problema graficamente. Porém, o envolvimento dos participantes teve o mesmo nível de contribuição neste momento da atividade, não rotulando a exploração de problema a níveis/etapas ou momentos em que o aluno e/ou professor tenha que seguir um roteiro fixo, ou fique impossibilitado de contribuir a partir de um certo tempo desde o início da exploração. A Exploração-Proposição-Resolução permite o envolvimento em qualquer momento da exploração desde que sujeito se sinta motivado pelo problema.

Nesse sentido, para aprofundarmos a discussão já iniciada no primeiro encontro, retomamos inicialmente a discussão no início do segundo encontro, resgatando os problemas propostos por P3 e P4. Em seguida, compartilhamos, via *Google Meet*, a tela com a calculadora gráfica Desmos, para que pudéssemos iniciar a exploração dos problemas. Foi discutido, inicialmente, a necessidade de tentar reformular o problema alterando os dados e, dentro desses novos problemas, tentar envolver a representação gráfica. Percebemos que, desde o problema inicial, a modificação dos dados já vem acontecendo. Para isso, resgatamos o problema inicial, a fim de que todos tomassem conhecimento, já fazendo a representação do problema por meio da calculadora gráfica Desmos, como se pode observar na Figura 1.

Figura 1 - Exploração inicial dos problemas do P3 e P4 na calculadora gráfica Desmos



Fonte: dados da pesquisa.

Incialmente, passamos a chamar de a quantidade de moedas de um real e de a quantidade de notas de dois reais. Tendo em vista que, no problema, o sujeito quer receber um troco de 15 reais, a representação algébrica para o problema de P3 seria . À medida que representávamos o problema algebricamente na calculadora Desmos, ao mesmo tempo a sua representação gráfica era esboçada. Essa potencialidade nos permitiu explorar o problema fazendo uso das múltiplas representações da Álgebra. Ainda na mesma tela (Figura 1), inserimos a representação verbal do problema proposto por P4 e desafiamos os participantes a apresentarem a sua representação algébrica.

Os participantes começaram a apresentar no chat do *Google Meet* e verbalmente a representação algébrica para o problema de P4. Obtivemos as seguintes respostas:

P5: Então, nesse caso, ficaria
P1, P2, P3, P4, P6, P7, P8:

A maioria dos participantes apresentou como resposta . Inserimos tal informação na calculadora gráfica Desmos e lançamos os seguintes questionamentos: o gráfico da forma como ele está representado na calculadora gráfica Desmos é suficiente para que o aluno chegue à resposta correta? Será que esse problema tem uma solução possível de ser determinada? Essa representação algébrica está correta ou teríamos outra sugestão? Como podemos discutir isso com os alunos? Ao resolver algebricamente o problema, vocês encontraram uma solução para esse problema? Após essas indagações, tivemos um momento de silêncio, no qual acreditamos que os participantes estavam refletindo sobre os questionamentos. Em seguida, tivemos as seguintes arguições:

> P6 - No caso, quando a gente resolve o sistema e por substituição, pegando a forma simples, o resultado encontrado não é solução para o problema, porque não vai ser um número inteiro, ou melhor, nem vai ser um número natural, o que foge do contexto das moedas.
> PP - E para o contexto das moedas? É possível uma solução nos Inteiros ou nos Naturais?
> P6 - Pensando nessa nota que está colocada (referindo-se ao problema de P4 colocado no Desmos na figura 1), para ser o dobro, se ela receber três moedas de um real, ela vai ter três reais. O dobro seria seis notas de dois reais que daria doze. Os três reais em moedas mais os doze reais quando somados dariam igual a quinze, que corresponde ao troco.
> PP – Exato. E por que quando a gente resolve aqui (referindo-se à calculadora gráfica Desmos), analisando graficamente, a gente não encontra essa solução? Tem alguma coisa errada? O que podemos modificar?

Neste momento da exploração do problema, percebemos que os participantes, em sua totalidade, confundiram as variáveis envolvidas nos problemas e representaram algebricamente de forma equivocada. A participante *P6* declara: "*quando foi colocado de início, eu confundi o significado de cada variável, por isso que eu tinha até colocado no chat* ".

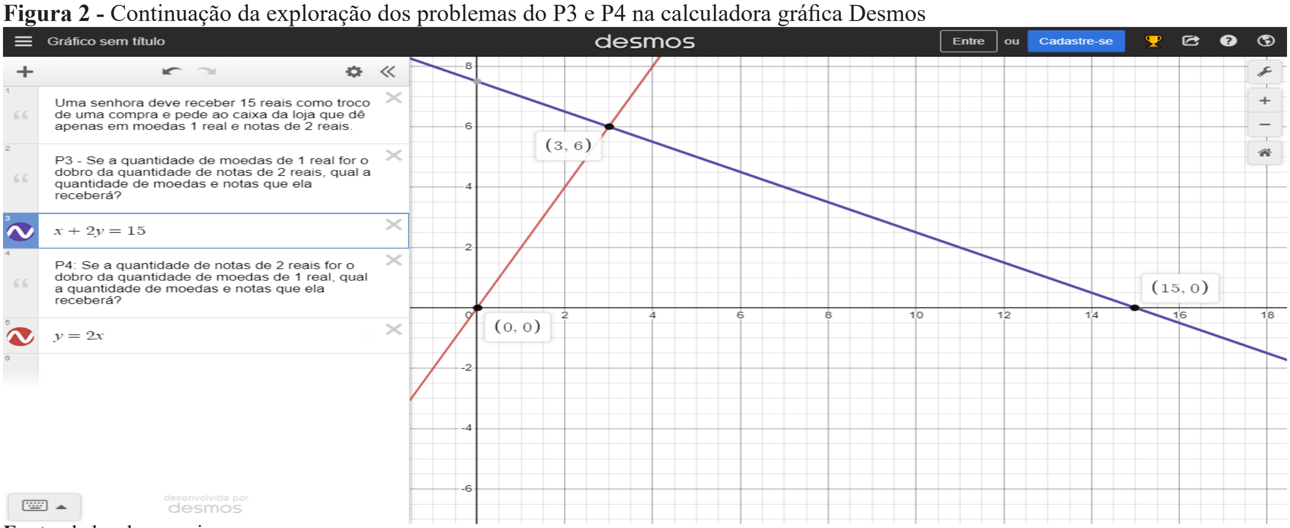
Ao comparar a representação algébrica junto à representação gráfica, os participantes foram capazes de perceber o erro e se viram diante do problema novamente. É possível perceber, nesse momento da exploração, a importância de manter a resolução junto à proposição de problemas. Além disso, destacamos a importância do uso e trânsito entre as múltiplas representações algébricas, para que tenhamos um conhecimento mais denso, complexo e uma exploração mais rica, profunda e com argumentos consistentes. A possibilidade de trabalhar com todas essas ferramentas pedagógicas e tecnológicas permitiram explorar melhor o problema, identificar erros e evoluir na exploração do problema.

Após um breve momento de silêncio, os participantes começaram a analisar melhor as informações dadas e conseguiram chegar à representação algébrica correta para o problema.

> P5 – Eu acho que, no caso, seria , será que daria certo?
> P6 – Isso! Eu também pensei assim, trocar... apagar esse e colocar . Porque, nesse caso, o é a nota de dois reais que será igual a duas vezes que é o dobro de x notas de um real.

Fizemos a representação na calculadora gráfica Desmos, alterando a representação algébrica do problema proposto por P4 para (Figura 2). Após colocarmos corretamente a representação algébrica e, consequentemente, a gráfica na calculadora gráfica Desmos, demos continuidade à exploração do problema lançando, novamente, alguns questionamentos aos participantes, sendo eles: observando a representação gráfica com , ela é solução para o problema? O aluno, ao ter contato com essa representação gráfica, pode, de forma direta, chegar ao resultado da solução para esse problema? Ou existe aí algumas limitações ou observações que são interessantes levarmos em consideração aqui? Ficamos atentos às observações dos alunos. Inicialmente, os alunos não manifestaram suas inquietações. Com isso, nos motivamos a questionar se toda a reta seria solução para o problema em exploração.

Figura 2 - Continuação da exploração dos problemas do P3 e P4 na calculadora gráfica Desmos



Fonte: dados da pesquisa.

Neste momento da exploração do problema, retomávamos a principal discussão ao final do primeiro encontro que consistia em como representar o gráfico da função não sendo o domínio o conjunto dos números Reais. Em seguida. os participantes começaram a fazer suas observações:

> P6 – Existem algumas observações. Principalmente quanto ao conjunto da solução, pois, na reta, temos os eixos com a reta real e a solução não são valores dentro do conjunto dos Reais, mas sim dos Naturais.

Era justamente essa observação que gostaríamos de explorar nesse momento da atividade. Devemos provocar essa discussão junto aos alunos para que percebam que o conjunto solução do problema está no conjunto dos números Naturais. Dessa forma, a reta está levando em consideração o conjunto dos números Reais, o que não corresponde à solução do problema explorado. Ficamos diante de um novo problema dentro do problema que estamos exploramos, que consiste em como representar graficamente a função no conjunto dos números Naturais. Na maioria das vezes, os problemas não discutem a sua representação gráfica. Isso faz com que os alunos e até mesmo professores representem o problema graficamente como sendo toda a reta.

Nessa perspectiva, passamos a discutir junto aos participantes como poderíamos representar graficamente o problema, possibilitando ao aluno entender qual o domínio da função e com qual conjunto numérico ele está trabalhando para a solução do problema. Essa discussão já tinha aparecido em outros momentos em que fazíamos uso da representação gráfica para problemas dessa natureza motivados pelo líder do GEPEP. Porém, fazer essa representação por meio de um recurso gráfico como a calculadora gráfica Desmos, até então, era um problema ainda não solucionado, pois não conhecíamos os comandos técnicos necessários junto às ferramentas disponíveis para que tivéssemos tal representação. Sabemos da importância de desenvolver esses conceitos por meio da construção gráfica usando lápis e papel, porém, estávamos em uma proposta de atividade remota na qual se via necessário o uso de recurso dessa natureza e queríamos discutir como esse tipo de representação se dá por meio desses recursos.

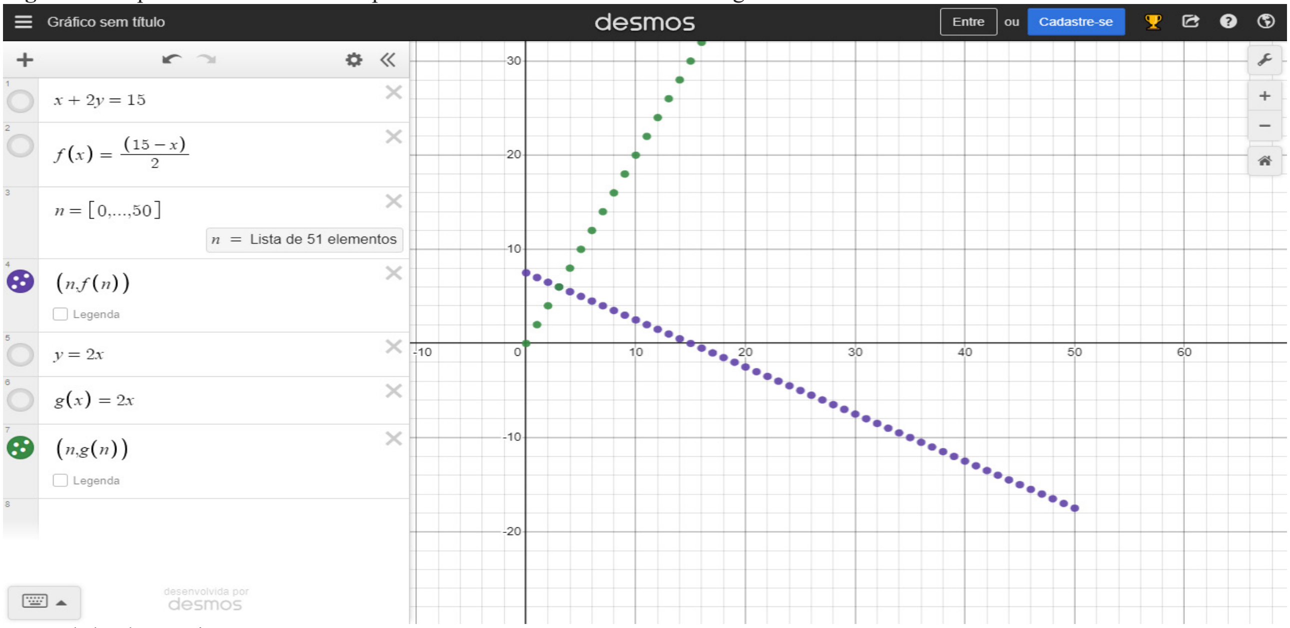
Antes mesmo de apresentarmos essa representação, os participantes continuaram a explorar o problema. O participante *P8* enfatizou: "*discutirmos o domínio e a imagem no conjunto dos Naturais mais o zero*." Sugerimos pegar essa informação e transformar em um problema que o envolvesse. No mesmo momento, o participante *P7* apresenta o seguinte problema: *"e se trocássemos a moeda de 1 real por duas de 50 centavos?"*. No momento, não queríamos perder o foco de explorar a questão da representação gráfica do domínio, sugerindo aos participantes que retomaríamos esses problemas em outro momento.

Retomamos à discussão questionando como poderíamos representar graficamente o problema de modo que o aluno não fique em dúvida ou interprete que toda a reta é solução do problema. Continuamos a exploração, fazendo provocações afim de saber o que os participantes fariam se estivessem lá na sala de aula fazendo o gráfico junto aos alunos. Em seguida, a discussão tomou o seguinte rumo:

> P8 – Colocaria um ponto no gráfico e perguntaria se esse ponto seria a solução do problema.
> PP – Acredito, P8, que você está se referindo a esse ponto aqui de intersecção entre as duas funções. Então, a gente pode determinar ele no gráfico (figura 2). É o ponto (3, 6), em que a gente determinou o eixo x para a moeda de um real e o eixo y para a nota de dois reais.
> P8 – Eu marcaria algum ponto negativo no primeiro quadrante, ou no quarto quadrante. Não necessitaria ser um ponto solução do sistema. Mas, marcando um ponto qualquer desse, também poderia ser no conjunto dos Naturais ou dos Inteiros de preferência, geraria uma reflexão se, de fato, essa seria uma solução do problema. Iria perguntando, questionando e gerando comentários também, para que eles pudessem assimilar que, no caso desse problema não haveria moedas negativas, por exemplo.
> PP – Isso! Entendi, P8. Muito boa a proposta. O que mais vocês poderiam estar discutindo com base no que P8 já propôs?
> P9 – Acho que algo interessante seria eles interpretarem o que significa a reta passando em cima dos eixos, o que isso significa.
> PP – Seria o ponto (0, 0) e (0, 7.5) (figura 2). A gente poderia também provocar essa discussão. O que poderíamos explorar no contexto da questão referente aos conceitos matemáticos dessas duas funções?
> P9 – De conceitos matemáticos, poderíamos trabalhar todo o conceito de função, domínio, contradomínio, imagem, sistemas lineares, equação linear. São diversos. Até para a formação de professores também, muito bom.

Após essas discussões, passamos a apresentar aos participantes como representar corretamente o gráfico da função de forma que represente a solução do problema, observando o seu domínio. Temos, inicialmente, . Para representarmos essa função de forma que consigamos restringir o domínio, temos que colocá-la na forma reduzida . Para um melhor entendimento das informações, na calculadora gráfica Desmos vamos representar na forma . Em seguida, vamos fazer uso da funcionalidade da calculadora gráfica chamada de lista de elementos. Para criá-la, é possível usar qualquer letra, diferente da usada na função , para nomear a lista de elementos, depois o símbolo de igualdade e, em seguida, entre colchetes, coloca-se o primeiro e o último elemento de sua lista, separados por vírgulas e com reticências ao meio (figura 3). Na caixa de tarefas abaixo, cria-se um ponto de coordenadas utilizando a letra que usou para nomear a lista de elementos . No mesmo momento, são plotados os pontos na janela gráfica. Repetimos o mesmo procedimento para a função , representando a mesma como .

Figura 3 - Explorando o domínio nos problemas do P3 e P4 na calculadora gráfica Desmos.



Fonte: dados da pesquisa.

Com essa representação, passamos a discutir se o gráfico contempla a solução para o problema, as mudanças que ocorreram e os novos problemas que podem surgir a partir dessa representação. Discutimos, também, como a calculadora gráfica Desmos contribui para esse tipo de exploração, destacando que a representação gráfica proporcionada foi fundamental para que pudéssemos ter uma compreensão melhor de problema e elucidar erros algébricos que foram solucionados a partir da representação gráfica. Observamos que, inicialmente, a exploração do problema se deu por meio de um contexto extramatemático relacionado às moedas. Entretanto, a partir das discussões e explorações (proposição e resolução) do problema, percebemos que conseguimos propor novos problemas, fazer outras análises que resultaram em um contexto intramatemático. Esse contexto se dá quando começamos a analisar o domínio da função, a representação algébrica e gráfica concomitantemente, o que representa a intersecção dos pontos, entre outras explorações que surgiram.

Passamos a refletir criticamente as limitações e potencialidades do problema e da calculadora gráfica Desmos, para qual série/ano esse problema poderá ser aplicado, quais conteúdos podemos explorar a partir dele e como a Exploração-Proposição-Resolução de problemas contribui para a prática pedagógica do professor de Matemática. Destacamos, neste momento, a importância de discutimos as nossas atividades de pesquisa no GEPEP, pois, a partir do momento que trazemos para o grupo, o olhar dos demais pesquisadores conseguem identificar elementos/informações que, até então, não estavam evidentes, trazendo contribuições valiosas como essas que estamos discutindo aqui.

> P6 – Eu queria deixar só uma observação. Achei interessante essa ferramenta que foi utilizada, a lista de elementos, pois possibilitou a mudança na representação da reta para os pontos. Foram selecionados os números naturais e dá para a gente debater essa lista de elementos, observando a primeira função. Por exemplo, alguns pontos ficam no quarto quadrante (figura 3). Esses pontos do quarto quadrante seriam soluções no contexto das moedas ou a gente poderia pensar até que valor a gente poderia colocar essa lista de elementos para ela ficar apenas no primeiro quadrante? Achei bem interessante essa lista de elementos, dá para fazer algumas discussões também diante do que está representado aí na calculadora gráfica. Essa lista de elementos a gente poderia pensar, foi colocado de 0 a 50 como sendo um número máximo de moedas ou de notas e limitar colocando um valor menor que 50 para não ter essa parte negativa. Perguntar aos alunos qual o máximo de moedas que eles poderiam receber ou o máximo de notas. E aí ele limitava, né?

Aqui, é possível perceber como a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas é um processo que não acaba, uma vez que, quando pensamos que acabou, sempre é possível ir mais além, alguém sempre irá observar algo que lhe impulsionará a ir em busca de novos horizontes. É um solo fértil para a construção do conhecimento matemático. A última observação feita aqui por *P6* torna o problema ainda mais rico em informações e cada vez mais coerente matematicamente. Até o momento, estávamos discutindo que o domínio seria os números naturais, mas, analisando o problema graficamente, percebemos que não são todos os naturais. A representação gráfica facilitou essa percepção.

Essas observações nos ajudaram a perceber a importância de explorar dois pontos importantes na representação gráfica do problema. Os pontos e . Podemos fazer vários questionamentos referentes a esses pontos. Quando o ponto toca o eixo na coordenada quinze, representa que o troco será todo em moedas de um real. Essa discussão nos retoma o que foi discutido no problema inicial (JURADO, 2013), quando estávamos discutindo, por exemplo, as possíveis conjecturas para que a soma desse igual a quinze. Poderia somar um número ímpar com um número ímpar, ou um número ímpar com um número par, mas percebeu-se que um número par somado com outro número par não resultaria em um número ímpar.

O quinze na coordenada do ponto que toca o gráfico é justamente a soma de quinze moedas de um real sem receber nenhuma nota de dois reais no troco. Porém, se essa mesma observação for feita analisando a soma sucessiva de notas de dois reais para o recebimento do troco, perceberá que não é possível. Analisando o ponto que corresponde no gráfico ao não recebimento de moedas de um real no troco, chegaremos no valor 7.5 (sete notas e meia de dois reais), que não é solução para o problema e corresponde, justamente, à coordenada do ponto que toca o eixo .

Para esse novo contexto, poderíamos propor um novo problema. Nesse caso, se retomarmos o problema proposto anteriormente por *P7* "*e se trocássemos a moeda de 1 real por duas de 50 centavos",* conseguiríamos explorar esse problema com uma solução possível para os pontos que tocariam os eixos e . Porém, devido ao tempo que temos para essas discussões, não iremos adentrar nessa exploração, servindo de motivação para que os demais participantes o explorem em outro momento.

Finalizamos esse momento de exploração provocando nos participantes reflexões no que tange ao aprofundamento dado ao problema, que, inicialmente, tratava-se apenas de um troco envolvendo moedas e notas, ao mesmo tempo em que destacamos como a calculadora gráfica Desmos nos permitiu um aprofundamento na exploração do problema, nos direcionando à proposição e resolução dos problemas por meio da representação algébrica e gráfica. Com isso, percebemos o quanto o uso das TD aliado à Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode potencializar a prática pedagógica na sala de aula de matemática.

3 Conclusão

Este trabalho objetivou analisar em quais aspectos a Proposição de Problemas como um recurso potencializador de um caminhar de Exploração de Problemas, articulado ao uso da calculadora gráfica Desmos, pode impulsionar o ensino-aprendizagem de Matemática. Ao mesmo tempo, pudemos perceber como esse recurso didático Desmos ampliou as possibilidades de exploração dos problemas.

A Proposição de Problemas, operacionalizada a partir da Exploração de Problemas, possibilitou ir cada vez mais longe, ocorrendo **antes** (a proposição de problemas como ponto de partida, sendo este o foco principal do nosso estudo), **durante** e **depois** do processo de Exploração e Resolução de problemas. Observamos que as reflexões e sínteses geradas em torno das proposições e resoluções dos problemas sinalizavam novos caminhos para a exploração dos problemas propostos, inclusive.

A calculadora gráfica Desmos viabilizou a compreensão de processos e conceitos matemáticos, como também evidenciou seu potencial para a problematização e a exploração de novos problemas, demonstrando um pluralismo de possibilidades de avançar com a atividade por meio do trânsito entre as representações verbais, algébricas, aritméticas, tabular e gráfica. Dessa forma, esse recurso didático digital nos permitiu visualizar informações, identificar padrões, criar conjecturas e fortalecer ideias matemáticas com um grau de precisão, dinamicidade e interatividade que são limitadas a um ambiente de sala de aula comum, fazendo uso apenas de papel e lápis e/ou lousa e pincel.

No problema explorado, destacamos que, a partir do uso da representação gráfica, foi possível reconhecer erros na representação algébrica e se chegar à construção de conhecimentos mais precisos. Ao mesmo tempo, a visualização dos objetos matemáticos desencadeou outros momentos e movimentos dentro da exploração do problema. Sendo assim, percebemos o quanto o uso de TD pode potencializar a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, fortalecendo ainda mais essa proposta metodológica.

Os resultados deste estudo evidenciaram um movimento não-linear durante todo o processo de Exploração de Problemas, no qual tomamos como ponto de partida a Proposição de Problemas. É possível perceber que o fim dessa discussão não demarca o fim da exploração do problema. Concluímos que essa é uma característica ímpar da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas por enxergarmos que o problema não termina ao fim de um momento de exploração.

Agradecimentos

O segundo autor deste artigo, registra seus agradecimentos à Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ/PB), pela bolsa de doutorado. O último autor registra o apoio ao CNPQ, Bolsa PDE.

Referências

Abramovich, S.; Cho, E. K. (2008). On mathematical problem posing by elementar pre-teachers: The case of spreadsheets. *Spreadsheets in Educations*, *3*(1), 1-19.

Abramovich, S.; Cho, E.K. (2015). Using digital technology for mathematical problem posing. In: F.M Singer, N.F Ellerton, J Cai. *Mathematical problem posing: from research to effective practice*. (pp. 493-511). New York: Springer.

Abreu. J.D. (2018). *Aprendizagem móvel: explorando a matemática por meio de aplicativos educacionais em smartphones.* 2018. 233 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB.

Andrade, S. (1998). *Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.* 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.

Andrade, S. (2017). Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemático no Cotidiano da Sala de Aula. In: L.R Junior Onuchic, M. Pironel, M. *Perspectivas para Resolução de Problemas*. (pp. 355-395). São Paulo: Editora Livraria da

Física.

Bodgan, R.C.; Biklen, S.K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos* (v. 12). Portugal: Editora Porto.

Cai, J; Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, *102*, 1-8.

Cai, J.; Hwang, S.; Jiang, C.; Silber, S. (2015). Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: Singer, F. M., Ellerton, N. F., Cai, J. (Eds.). *Mathematical problem posing: from research to effective practice.* (pp. 493-511). New York: Springer.

Crespo, S.A. (2015). Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In: Singer, F. M., Ellerton, N. F., Cai, J. (Eds.). *Mathematical problem posing: from research to effective practice*. (pp. 493-511). New York: Springer.

Crespo, S., Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 395–415.

Felmer, P., Pehkonen, E.; Kilpatrick, J. (2016). *Posing and solving mathematical problems: advances and new perspectives*. Switzerland: Springer.

Jurado, U. M. (2013). La creación de problemas de matemáticas en la formación de professores. In: *Anais do Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 129-140). Montevideo, Uruguai.

Jurado, U. M. (2016). Problem Posing: An Overview for Further Progress. In: Liljedahl, P.; Santos-Trigo, M.; Malaspina, U.; Bruder, R. (2016). *Problem solving in Mathematics education.* (pp. 31-34) *Hamburg,* Germany, University of Hamburg.

Kilpatrick, J. Problem formulating: Where do good problems come from? (1987) In Schoenfeld, A. H. (Ed.). *Cognitive science and mathematics education.* (pp. 123–147). NJ: Lawrence Erlbaum.

Lester, F., Cai, J. Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. (2016). In: Felmer, P; Kilpatrick, J; Pehkonen, E (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives*. (pp. 117-136). Switzerland: Springer.

Liljedahl, P; & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: a look at the state of the art. *ZDM – Mathematics Education*, 53, 723–735.

Liljedahl, P.; Santos-Trigo, M.; Malaspina, U.; Bruder, R. (2016) *Problem solving in Mathematics education*. Hamburg, Germany, University of Hamburg.

Martins, F. C.; & Andrade, S. (2022). Ensino de Sistemas Lineares: uma Proposta Metodológica Utilizando a

exploração, Proposição e Resolução de Problemas. *Educação Matemática em Revista.* 27(77), 166-179

Milinković, J. (2015). Conceptualizing Problem Posing via Transformation. In: Singer, F. M., Ellerton, N. F., Cai, J. (Eds.). *Mathematical problem posing: from research to effective practice.* (pp. 47-70). New York: Springer.

Onuchic, L.R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, M. A. V. (Org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas.* (pp.199-218) São Paulo: Editora UNESP.

Silva, A.P. (2013). *Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas: um olhar para a sala de aula.* 2013. 92f. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, PB.

Silveira, A.A.; & Andrade, S. (2020). Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. *Revista de Educação Matemática*, *17*, 01-21.

Silveira, A.A; & Andrade, S. (2022). Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. *Revista de Educação Matemática, 19*, (1), 1-23.

Silver, E.A. On mathematical problem posing (1994). *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.

Singer, F.M., Ellerton, N.F., Cai, J. (2015). *Mathematical problem posing: from research to effective practice.* New York: Springer.

Stanic, G.M.A.; Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving gin the mathematics curriculum. In: R.I. Charles, E.A. Silver. *The teaching and assessing of mathematical problem solving*. (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.