DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2023v16n1p13-20

Resolução de Problemas que Envolvem Simultaneamente Sequências Aritméticas e Geométricas na 11ª Classe

Solving Problems Involving Simultaneously Arithmetic and Geometric Sequences in 11th Class

Venâncio Sebastião Finda[a]; José Luiz Magalhães de Freitas*[bc]

[a]Instituto Superior de Ciências de Educação do Uíge. Angola.
[b]Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. MS, Brasil.
[c]Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal. MS, Brasil.
*E-mail: joseluizufms2@gmail.com

Resumo

Na presente pesquisa objetivou-se resolver problemas que envolvem simultaneamente sequências aritméticas e geométricas para o desenvolvimento de habilidades dos alunos da 11ª Classe do Liceu do Uíge, em Angola. Nesta, defendeu-se a ideia de que a resolução de problemas que envolvem simultaneamente sequências aritméticas e geométricas desenvolvidas com base em passos estabelecidos por Pólya contribui para o desenvolvimento de habilidades dos alunos da 11ª Classe do Liceu com esses conteúdos. Realizou-se uma pesquisa de estudo de caso, único quanto à escolha do objeto de estudo em relação à natureza, é uma pesquisa aplicada com abordagem quantitativa e qualitativa. Quanto aos procedimentos, foi realizada pesquisa bibliográfica e pesquisa-ação. Em relação ao local, realizou-se uma pesquisa em campo. Foi aplicado um questionário com 69 alunos selecionados de forma aleatória simples. Verificou-se nessa aplicação o fraco desempenho alcançado pelos alunos no primeiro teste diagnóstico aplicado, indicando que os procedimentos metodológicos utilizados pelo professor faziam parte da base das várias dificuldades de compreensão dos conteúdos matemáticos pelos alunos, em particular os relacionados à resolução de problemas envolvendo as duas sequências simultaneamente. Diante do baixo aproveitamento, realizaram-se sessões visando o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas e aplicou-se o segundo teste diagnóstico, com características semelhantes às do primeiro, cujos resultados mostraram que houve melhorias expressivas do desempenho dos alunos.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Sequências Aritméticas e Geométricas. Teste Diagnóstico. Educação Básica.

Abstract

This research intends to solve problems that simultaneously involve arithmetic and geometric sequences for the development of skills of students in the 11th Class of the Liceu do Uíge, Angola. In this one, the idea was defended that the resolution of problems that simultaneously involve arithmetic and geometric sequences developed based on steps established by Pólya, contributes to the development of skills of the students from the 11th Grade of the Lyceum, with these contents. A single case study was carried out regarding the choice of the object of study, in relation to nature, an applied research wich a quantitative and qualitative approach. In term of the procedures, a bibliographic research and action research were carried out, and in relation to the place, a field research was carried out. A questionnaire was applied with 69 students selected in a random way. In this application, it was verified that the results achieved by the students in the first diagnostic test applied was verified, indicating that the methodological procedures used by the teacher most of all were the basis of the various difficulties in understanding the mathematical contents by the students, in particular those ones related to problems solving involving the two sequences simultaneously. In view of the unsatisfactory results obtained, the sessions were held aiming at the development of skills in problem solving and the second diagnostic test was applied with similar characteristics to those of the first one, showing at the end that there were significant improvements in the students performance.

Keywords: *Problem solving. Arithmetic and Geometric Sequences. Diagnostic Test. Basic Education.*

1 Introdução

O processo de ensino-aprendizagem de resolução de problemas em Matemática não tem sido fácil para os professores, porque são muitos aspectos a serem considerados, para que a aprendizagem por parte dos alunos seja acessível e expressiva. Tal como Bernardo (2020, p.8) afirma que:

> Uma das tarefas mais difíceis na condução do processo de ensino-aprendizagem da Matemática é a que se refere precisamente ao ensino da resolução de problemas por parte de alguns professores e sua aprendizagem por parte de alguns alunos. A essência deste problema pode estar nas dificuldades que trazem consigo pelo fato de que ensinar procedimentos e regras heurísticas é um assunto de extrema complexidade.

Sendo assim, para que não seja uma realização difícil, o professor de Matemática deve saber o trabalho do aluno que, segundo Brun (1996, p.37-38):

> O trabalho do aluno deve ser, por momentos, comparável a esta atividade científica. Saber matemática não é apenas aprender definições e teoremas a fim de reconhecer as ocasiões em que eles podem ser utilizados; sabemos perfeitamente que fazer matemática implica em resolver problemas. Não se faz matemática simplesmente resolvendo problemas; por vezes esquece-se que resolver um problema é apenas uma parte do trabalho. Encontrar boas questões é tão importante quanto encontrar soluções para elas. Uma boa reprodução de uma atividade científica pelo aluno exige que ele haja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com os outros, reconheça aqueles que são conformes à

cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc.

Nesta ordem de ideia, queremos afirmar que este processo depende direitamente da boa preparação da aula que o professor efetuar. Segundo Brun (1996, p.4) enfatiza, “a conceção moderna do ensino solícita, pois, ao professor que provoque ao aluno as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe”.

Para que o processo de ensinar e de aprender a resolução de problemas em Matemática não seja difícil, requer-se que o professor assuma o seu papel e mostre atitude e simplicidade, de modo que os alunos entendam as etapas que vão percorrendo durante a resolução de cada problema. Conforme Matos & Serrazina (1996, p.171) declaram que “a atitude do professor é crucial para o desenvolvimento de uma atmosfera na aula em que os alunos partilhem os seus pensamentos matemáticos, comunicando ativamente entre si e com o professor”. Por isso, mediante a Lei-nº17/16, (2016, p.3.994) citada por Bernardo, 2020, p.7) diz que, à luz do princípio constitucional, o ponto nº 1 do Artigo 2 da Lei de Base do Sistema de Educação e Ensino afirma: “A educação é um processo planificado e sistematizado de ensino e aprendizagem, que visa preparar de forma integral o indivíduo para as exigências da vida individual e coletiva”.

Por isso, a seleção da forma de abordar a resolução de problemas de modo eficiente e eficaz é um assunto que exige do professor a realização de muitas pesquisas e ações para que seus alunos compreendam o que se pretende trabalhar em sala de aula.

2 Problemas Matemáticos

Os problemas matemáticos são assuntos que, de modo geral, trazem dificuldades no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Sendo assim, para falarmos propriamente de problemas matemáticos, necessitamos referenciar a questão relacionada com o problema. Segundo Dante (2010), citado por Konig (2013, p.42), “um problema é definido como um obstáculo a ser vencido, algo que deva ser solucionado e que requer o pensar consciente do sujeito a fim de resolvê-lo”. Ou ainda, segundo Onuchic (1999, p.208), citada por Miranda (2015, p.9), “Problema se constitui em tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. Nesta perspectiva do conceito de problema, Kantowski (1974) e Vale e Pimentel (2004) citados por Martins (2016, p.58), esclarecem que:

> Um indivíduo está perante um problema quando encontra uma questão à qual não consegue responder ou uma situação que não é capaz de resolver usando o conhecimento imediatamente disponível. Tem que se pensar num caminho de combinação da informação de que dispõe, no sentido de poder chegar à solução do problema.

Segundo Toledo (2010), citado por Miranda (2015, p.19-20), um problema matemático refere-se:

> a qualquer situação na qual é requerida uma descoberta de informações matemáticas, antes desconhecidas para aquela pessoa que está tentando resolvê-la ou, também, é o desenvolvimento de um determinado resultado matemático. Portanto, conforme o autor, um problema matemático deve ter a conotação de uma situação em que o estudante esteja em constante investigação, sendo desafiado a descobrir e resolver determinadas questões.

Para Muchanga, Simone, Nhabique & Leitão (2019, p. 9), “Um problema matemático é toda a situação que requer a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo ou a invenção da demonstração de um resultado matemático dado”. Dante (2003, p. 9), citado por Miranda (2015, p.19), afirma que “problema matemático também se refere a qualquer situação que exija o pensar do indivíduo para solucioná-lo”.

Considerando o exposto acima, pode-se deduzir que o problema matemático é aquela situação matemática em que quem pretende resolver não tem a via segura para solucioná-la e que precisa encontrar a solução para responder o enunciado do mesmo.

3 Resolução de Problemas no Processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática

A resolução de problemas tem sido motivo de grandes preocupações e de muitas discussões no processo de ensino-aprendizagem da Matemática ao longo do tempo. Face a estas grandes preocupações e discussões, muitos matemáticos começaram a dedicar seu tempo em pesquisar sobre a resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática. Tal como afirma Miranda (2015, p.22):

> As pesquisas sobre Resolução de Problemas tiveram origem a partir de Pólya (1944) que, até hoje, é considerado o mentor da Resolução de Problemas. O autor preocupou-se em como encontrar soluções para os problemas e também em como criar estratégias para resolvê-los.

Segundo Onuchic (1999), citada por Konig (2013), “O ensino de resolução de problemas, como campo de pesquisa em Educação Matemática, começou a ser explorado de forma sistemática tendo influência de Pólya nos Estados Unidos, na década de 60”. Ainda segundo Onuchic (1999, p. 207), citada por Konig (2013, p. 40), reforça-se que, “ao se ensinar matemática através da resolução de problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso”.

Em relação aos objetivos, Dante (1998) citado por Santos (2015, p.29), descreve os seguintes: fazer o aluno pensar produtivamente, desenvolver o raciocínio do aluno, ensinar o aluno a enfrentar situações novas, dar ao aluno a oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática, tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras, equipar o aluno com estratégias para resolver problemas e dar uma boa base matemática às pessoas.

De acordo com Miranda (2015, p.25), “A resolução de problemas pode ser entendida segundo três diferentes perspectivas: ensinar Matemática para resolver problemas, ensinar a resolver problemas pela Matemática e ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas".

3.1 Ensinar Matemática para Resolver Problemas

Para Diniz (2001), citado por Miranda (2015, p.25), "A resolução de problemas matemáticos acompanha o currículo escolar desde a Antiguidade". Segundo o mesmo autor,

> [...] na perspectiva de ensinar Matemática para depois resolver problemas, pode-se dizer que a Resolução de Problemas é o alvo do ensino da Matemática. Todo ensino da Matemática estrutura-se para preparar o estudante para resolver problemas, isto é, as aulas são organizadas e estruturadas de forma que os estudantes aprendam os conteúdos necessários, para que possam resolver. Esta perspectiva de que se ensina Matemática para resolver problemas foi a ideia dominante de Resolução de Problemas, anterior ao Movimento da Matemática Moderna e ainda é utilizada até os dias de hoje.

Relativamente a este aspeto, Onuchic (1999), citada por Miranda (2015, p.26), enfatiza que "Ao ensinar Matemática para resolver problemas, o professor se concentra nos conteúdos a ser ensinados e a maneira como ele poderá ser aplicado na solução de problemas rotineiros ou não rotineiros. O essencial é aprender Matemática para saber usá-la". Neste caso, "ensinar o conteúdo para que o aluno possa resolver problemas, alinha-se ao tecnicismo mecanicista onde o estudante resolve os problemas por meio de técnicas, regras sem a preocupação de fundamentá-los.

O professor de Matemática tem de saber que a matemática que é ensinada destina-se a resolver problemas que o seu aluno vive no seu dia-a-dia, em vez de apenas ensinar fórmulas, exercícios e procedimentos de resolução de exercícios tabulados.

3.2 Ensinar a Resolver Problemas pela Matemática

Onuchic e Allevato (1999), citadas por (Miranda, 2015, pp. 26-27) defendem que,

> é necessário que o estudante seja capaz de propor e resolver problemas, conhecendo as diversas técnicas para resolução; entender a importância para a aprendizagem matemática e compreender a sua contextualização com o cotidiano. É necessário, entretanto, que o educador considere os conceitos e as habilidades do educando para encontrar a solução, pois são fatores importantes para a Resolução de Problemas.

De acordo com Soares e Bertoni (2001), citadas por Sanstos (2015, p.32) "o professor é o incentivador, facilitador, mediador das ideias de forma que sejam as informações produtivas, levando os alunos a pensarem e gerarem seus conhecimentos". Para facilitar o processo, Pólya (1978), citado por Miranda (2015, p.27), "organizou o processo de resolução de problemas em quatro fases: Compreender o Problema, Estabelecimento de um Plano, Execução do Plano, Retrospeto ou Verificação". Para se compreender as quatro fases dadas por Pólya, (Souza, 2015, p.29-31), esclarece:

> **Compreender o problema**: o aluno precisa compreender completamente o problema proposto, identificando todos os pontos necessários para a resolução, para assim questionar-se sobre o objetivo do exercício e a possibilidade de uma possível resolução do problema; **Estabelecer um plano**: o aluno necessita criar um plano para resolver o problema. Com a atuação discreta do professor, esse plano baseia-se em criar uma conexão dos dados encontrados com a incógnita a ser resolvida; **Executar o plano**: após conceber o plano, o que não é uma incumbência fácil, o estudante deve colocá-lo em prática, sendo que o fator mais importante para isso é, segundo Pólya, paciência; **Verificar**: examinar a solução obtida e fazer um retrospeto do trabalho efetuado.

Ainda segundo Pólya (1995), citado por Souza (2015, p. 31), "A etapa 'verificar a solução' é a mais importante, pois propicia uma depuração[1] e uma abstracção[2] da solução do problema". A partir destes elementos identificados por Pólya, "a resolução de problemas matemáticos foi encarada como um procedimento de ensino e de aprendizagem" (Souza, 2015, p.32).

Segundo Cardoso, (2007, p.28-29), a execução dos passos de resolução de problemas proposta por Pólya

> leva o aluno a entender o problema de forma mais clara e a seguir um raciocínio organizado, possibilitando a incorporação consciente de alguns procedimentos úteis no processo de resolução. Permite ainda, ao professor, identificar e solucionar eventuais falhas conceituais e procedimentais do aluno durante o processo funcionando, como avaliação da habilidade de utilização do conhecimento apreendindo.

Guzmán (2007), citado por Miranda (2015, p.28) diz que, "o ensino por Resolução de Problemas ressalta os processos de pensamento e de aprendizagem, mas não se deve deixar de lado o valor dos conteúdos matemáticos".

Estando de acordo com Miranda (2015), pode-se deduzir que, em todo o processo, o eixo principal deve ser a própria atividade dirigida pelo professor, colocando o estudante a participar sem oprimir o prazer da descoberta, desenvolvendo sua motivação e criatividade, deixando de lado a passividade.

3.3 Ensinar Matemática Por Meio de Resolução de Problemas

A Matemática também pode ser ensinada por meio da Resolução de Problemas com atividades que sejam um meio de conduzir o currículo a ser desenvolvido. Para (Miranda, 2015, pp. 29-30), "cria-se, assim, um ambiente de aprendizagem motivador e estimulante que promova uma aprendizagem mais significativa", que, segundo Machado (2006, p. 30), citado pelo autor acima, nesta perspectiva, "a Resolução de Problemas começa a se alicerçar como uma metodologia de ensino, um meio de ensinar Matemática, e o problema, um

1 Tem como objetivo verificar a argumentação usada e simplificá-la, podendo até modificar para outra mais simples e objetiva, que antes estava inacessível ao estudante.

2 Tem como objetivo refletir sobre a solução encontrada, descobrindo a essência do problema e do método empregado, tornando possível resolver outros problemas, aumentando a capacidade de pensamento matemático.

elemento ativador de construção de conhecimento".

Ensinar Matemática por meio da resolução de problemas segundo Onuchic e Allevat (2009), citados por Konig (2023, p.41) coloca "o foco da atenção dos alunos sobre as ideias e sobre o dar sentido; desenvolve o poder matemático; desenvolve a certeza de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que ela faz parte do seu cotidiano". Tal como enfatiza Miranda (2015, p.29), "os estudantes ampliam seus conhecimentos, desenvolvem seu raciocínio lógico, contextualizam as situações e se tornam capazes de enfrentar situações novas". O docente que trabalha com a Resolução de Problemas pode, assim, alcançar seus objetivos e tornar as aulas mais interessantes e motivadoras.

Nesta síntese da ideia Gimenez & Burin (2011, p.,30) defendem que:

> Ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas oportuniza aos estudantes a construção de conceitos, desenvolve a autonomia e a capacidade de contextualizar as situações apresentadas com o mundo à sua volta, além de relacionar os novos conhecimentos com os já existentes.

Onuchic (1999, p. 208), citada por Konig (2013, p.46), defende que, "quando os professores ensinam Matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão". Ainda este autor evidencia que

> enquanto a compreensão dos discentes vai se aprofundando e enriquecendo, sua habilidade em utilizar matemática na resolução de problemas aumenta consideravelmente. Acredita-se que é uma boa alternativa de ensinar a Matemática, visto que os alunos aprendem com compreensão e de maneira significativa.

Com base nas ideias apresentadas acima pelos autores citados, pode-se deduzir que ensinar matemática por meio da Resolução de Problemas não significa apenas apresentar os problemas e esperar que a aprendizagem aconteça. É necessário mediá-la, e o professor é o responsável por esta ação. Compete a ele criar um ambiente favorável para que a aprendizagem ocorra. Na opinião de Onuchic (1999, p.221), citada por Miranda (2015, p.30), "[...] O professor é responsável pela criação e manutenção de um ambiente matemático motivador e estimulante em que a aula deve transcorrer".

Dos vários problemas matemáticos que possam existir, Pérez e Pozo (1994), citados por Martins (2016, p.61), afirmam que "apenas existem dois tipos de problemas, os de carácter dedutivo, onde é utilizada uma fórmula matemática, e os de caracter indutivo, para os quais é preciso estabelecer uma regularidade".

Em função dos tipos de problemas mencionados, esta pesquisa resolveu os problemas de caracter indutivo porque são baseados nos procedimentos estabelecidos por Pólya desenvolvidos nos planos de aulas, que constam nos tipos de atividades realizadas.

4 Metodologia

É sabido que existem várias possibilidades de escolha sobre a definição do método. Dentre as várias contribuições existentes Zanella (2013, p.19) descreve que, "o método é uma série de procedimentos intelectuais e técnicas adotadas para atingir determinado conhecimento".

Este trabalho pode ser classificado como uma pesquisa de estudo de caso único que, segundo a Yin (2001), citado por Oliveira (2011, p.27), "é caracterizado pelo estudo profundo e exaustivo dos factos de investigação, permitindo um amplo e pormenorizado conhecimento da realidade e dos fenómenos pesquisados".

Em relação à natureza, realizou-se uma pesquisa aplicada que, segundo Prodanov e Freitas (2013, p. 51), "objetiva gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos, envolvendo verdades e interesses locais". Em relação à forma de abordagem, é quantitativa. Segundo Richardson (1999), citado por Oliveira (2011, p.25), "é caracterizada pelo emprego da quantificação, tanto nas modalidades de coletas de informação quanto no tratamento delas por meio de técnicas estatísticas", e é também qualitativa segundo Richardson et al. (2007), citados por Zanella (2013, p.35): "Pode ser definida como a que se fundamenta principalmente em análises qualitativas, caracterizando-se, em princípio, pela não utilização de instrumentos estatísticos na análise dos dados".

Tendo em conta o objetivo, esta pesquisa é explicativa. Tal como Gil (1999), citado por Oliveria (2011, p.22), descreve "tem como objectivo identificar os fatores que determinam ou contribuem para a ocorrência de um fenômeno e é o tipo que mais aprofunda o conhecimento da realidade, explicando a razão e as relações de causa e efeito dos fenômenos". Em relação aos procedimentos, utilizou-se a pesquisa bibliográfica e a pesquisa-ação. Como Souza, Muller, Fracassi & Romeiro (2013, p.16-17) descrevem,

> a pesquisa bibliográfica é a busca sistemática do conhecimento sobre o assunto, do que já existe, o que os diferentes autores já discutiram, propuseram ou realizaram. A pesquisa-ação quando é concebida e realizada com pesquisa sobre os problemas que afligem uma comunidade associada com ação ou com a resolução de um problema do coletivo.

Em relação ao local, realizou-se uma pesquisa em campo que segundo Souza et al, (2013, p. 16) "ocorre no próprio local onde o problema se manifesta [...]".

Depois da fase da identificação do problema e do levantamento da bibliografia que sustentou teoricamente esta pesquisa, realizou-se um conjunto de atividades na sala de aula com a intenção de estimular a participação ativa dos alunos da 11ª Classe do Liceu do Uíge na resolução de problemas que envolvem simultaneamente sequências aritméticas e geométricas.

4.1 Proposta de atividade para o ensino de resolução de problemas que envolvem simultaneamente as sequências aritméticas e geométricas

Depois de lida e de se ter feito análises das fontes bibliográficas que serviram de base para fundamentar teoricamente a presente pesquisa, e tendo em conta os resultados do pré-teste aplicado aos alunos da 11ª Classe do Liceu do Uíge, houve a necessidade de se realizar atividades com o objetivo de contribuir no desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas que envolvem simultaneamente as sequências aritméticas e geométricas.

Atividade

Escola do Liceu do Uíge

Disciplina: Matemática
Tema 3- Sucessões
Subtema 3.2- Sequências aritméticas e Sequências geométricas
Sumário: **Resolução de problemas que envolvem simultaneamente sequências aritméticas e geométricas**

No desenvolvimento desta atividade, considerou-se como meios de ensino o quadro, o giz e o apagador. A experiência durou 90 minutos. Em relação aos métodos de ensino, foi utilizada a elaboração conjunta e o método expositivo, e teve-se a apropriação de novos conhecimentos, como o tipo de aula.

A atividade, desenvolvida com os alunos da 11ª Classe, teve como objetivos específicos: definir sequência aritmética e geométrica, dominar as propriedades das sequências aritmética e geométrica, interpretar as informações vindas no problema, conhecer a fórmula de Bhaskara, resolver qualquer sistema de equações.

I. Introdução ($aproximadamente$ 5 $minutos$)

Asseguramento do nível de partida: Breve revisão sobre as definições, propriedades e fórmulas dos termos das sequências estudadas;
Motivação: Determinar a e b para que a sucessão $(a, b, 12)$ seja uma P.A. e a sucessão $(16, b, a)$ seja uma P.G.;
Orientação para o objetivo: Nesta aula de hoje será abordada a resolução de problemas que envolvem simultaneamente P.A. e P.G.

II.Desenvolvimento ($aproximadamente$ 60 $minutos$)

Há vários problemas que envolvem, simultaneamente, progressões aritméticas e geométricas. Para resolvê-los, usamos em geral a propriedade fundamental que caracteriza cada uma dessas progressões e aplicamos os passos elaborados por Pólya: compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e verificar.

Problema 1

Determinar a e b para que a sucessão $(a, b, 12)$ seja uma P.A. e a sucessão $(16, b, a)$ seja uma P.G.

Resolução:

1º Passo: a compreensão do problema implica em identificar a simultaneidade das duas progressões num só problema.
2º Passo: Estabelecendo o plano, teremos:
Se $(a, b, 12)$ é uma P.A., então $b = \frac{a+12}{2}$ (1) e se $(16, b, a)$ é uma P.G., então $b^2 = 16a$ (2).
3º Passo: Executando o plano, tem-se:
$b = \frac{a+12}{2} \Leftrightarrow a + 12 = 2b \Rightarrow a = 2b - 12$ (1´) substituindo em (2), obteremos:

$$b^2 = 16a \Leftrightarrow b^2 = 16(2b - 12) \Leftrightarrow b^2 = 32b - 192 \Rightarrow b^2 - 32b + 192 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 1024 - 768 = 256 \Rightarrow \Delta = 256$$
$$b_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{32 \pm \sqrt{256}}{2a} = \frac{32 \pm 16}{2} \begin{cases} b_1 = 8 \\ b_2 = 24 \end{cases}$$

Substituindo $b_1 = 8$ na expressão (1´), tem-se: $a = 2b - 12 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow a = 4$. Por outra, substituindo $b_2 = 24$ na expressão (1´), tem-se: $a = 2b - 12 = 48 - 12 = 36 \Rightarrow a = 36$.
Portanto, os valores de a e b são $(a = 4\ e\ b = 8)$ ou $(a = 36\ e\ b = 24)$.
4º Passo: Para verificar, tem de se substituir os valores encontrados nas sucessões dadas. Assim:

Para $(a = 4\ e\ b = 8) \Rightarrow \begin{cases} (4, 8, 12)\ é\ a\ P.A. \\ (16, 8, 4)\ é\ a\ P.G. \end{cases}$

Para $(a = 36\ e\ b = 24) \Rightarrow \begin{cases} (36, 24, 12)\ é\ a\ P.A. \\ (16, 24, 36)\ é\ a\ P.G. \end{cases}$

Problema 2

São dados quatro números positivos: $12, x, y, 4$, sabendo que os três primeiros estão em P. A. e os três últimos estão em P.G.. Achar os valores de x e de y.

Resolução:

1º Passo: Pela compreensão do problema, deduz-se que se trata da simultaneidade das duas progressões.
2º Passo: Estabelecendo o plano.
Se os três primeiros números estão em P.A., então $(12, x, y) \Rightarrow x = \frac{12+y}{2}$ (1)
Se os três últimos números estão em P.G., então $(x, y, 4) \Rightarrow y^2 = 4x$ (2)
3º Passo: Executando o plano, tem de se substituir (1) em (2)

$$y^2 = 4x \Leftrightarrow y^2 = 4\left(\frac{12 + y}{2}\right) \Leftrightarrow y^2 = 24 + 2y \Rightarrow y^2 - 2y - 24 = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 96 = 100 \Rightarrow \Delta = 100$$
$$y_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{2a} = \frac{2 \pm 10}{2} \begin{cases} y_1 = -4 \\ y_2 = 6 \end{cases}$$

Substituindo $y_1 = -4$ em (1), tem-se: $x = \frac{12+y}{2} = \frac{12-4}{2} = 4 \Rightarrow x = 4$. Substituindo $y_2 = 6$ em (1), tem-se: $x = \frac{12+y}{2} = \frac{12+6}{2} = 9 \Rightarrow x = 9$.
Assim, para $x = 4 \Rightarrow y = -4$ e para $x = 9 \Rightarrow y = 6$
4º Passo: Para verificar, deve ser substituida $x = 4$ e $y = -4$ nos três primeiros números que estão em P. A. e depois substituir também $x = 9$ e $y = 6$ nos três últimos números que estão em P.G.

i. Para $x = 4$, temos $y = -4$

Substituindo na P.A. $(12, x, y)$, será $(12, 4, -4)$ de razão -8. Também a P.G. $(x, y, 4)$, será $(4, -4, 4)$ de razão -1. Logo, como $y = -4$, então desprezamos essas sucessões pois o problema pede números positivos.

ii. Para $x = 9$, temos $y = 6$

Substituindo na P.A. $(12, x, y)$, será $(12, 9, 6)$ de razão -3. Também na P.G. $(x, y, 4)$, será $(9, 6, 4)$ de razão $\frac{2}{3}$.

Resposta: a solução do problema é $x = 9$ e $y = 6$.

Problema 3

A soma de três números que formam P.G. crescente é 19. Calcular esses três números, sabendo que, se subtrairmos 1 do primeiro, sem alterar os outros dois, eles passam a constituir P.A.

Resolução:

1º Passo: Pela compreensão do problema, deduz-se que se trata de identificar, na sequência procurada, a simultaneidade das duas progressões.

2º Passo: Estabelecendo o plano.

Anotemos por x, y, z os números que formam P.G. e por $x-1, y, z$, os que formam a P.A., ou seja, P.G. (x, y, z) e P.A. $(x-1, y, z)$. Pelo problema, temos $x + y + z = 19$.

- Se (x, y, z) formam P.G., então $y^2 = xz$
- Se $(x-1, y, z)$ formam P.A., então $y = \frac{x-1+z}{2} \Leftrightarrow 2y + 1 = x + z$

3º Passo: Executando o plano.

Vamos formar o sistema e resolvendo-o aplicando qualquer método de resolução:

$$\begin{cases} x + y + z = 19 \\ y^2 = xz \\ 2y + 1 = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 19 - y & (1) \\ y^2 = xz & (2) \\ x + z = 2y + 1 & (3) \end{cases}$$

Comparando membro a membro (1) e (3), entao teremos:

$(1) = (3)$: $2y + 1 = 19 - y \Leftrightarrow 3y = 18 \Rightarrow y = 6$ Substituindo o valor do sistema na 2ª equação e na 3ª ou 1ª equações, então teremos um novo sistema de equações.

$$\begin{cases} y^2 = xz \\ 2y + 1 = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (6)^2 = xz \\ 2(6) + 1 = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 = xz \\ 13 = x + z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 = xz & (2') \\ z = 13 - x & (3') \end{cases}$$

Substituindo (3´) na equação (2´), teremos:

$36 = xz \Rightarrow 36 = x(13 - x) \Leftrightarrow 36 = 13x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0.$

Fatorando, vem:

$x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ ou \\ x = 9 \end{cases}$ Substituindo esses valores tanto em (2´) como em (3´), vem: se $x = 4 \Rightarrow z = 9$ e se $x = 9 \Rightarrow z = 4$. Substituindo esses valores na equação $x + y + z = 19$, temos:

- ✓ Para $x = 4$ e $z = 9$, então: $x + y + z = 19 \Leftrightarrow 4 + y + 9 = 19 \Rightarrow y = 6$
- ✓ Para $x = 9$ e $z = 4$, então: $x + y + z = 19 \Leftrightarrow 9 + y + 4 = 19 \Rightarrow y = 6$

Assim:

- ✓ Para $x = 4$, $y = 6$ e $z = 9$, $(4, 6, 9)$ formam P.G. crescente de razão $\frac{3}{2}$ e $(3, 6, 9)$ formam uma P.A. de razão 3.
- ✓ Para $x = 9$, $y = 6$ e $z = 4$, $(9, 6, 4)$ não forma P.G. crescente.

Resposta: os três números procurados são $4, 6$ e 9.

Problema 4

Em uma P.G. alternada, o 1º termo vale 2 e a soma dos dois seguintes é 12.

a) Escreva os 3 primeiros termos da P.G.

b) Que número deve ser somado ao 2º termo para que os três primeiros termos constituam, nessa ordem, uma P.A.?

Resolução:

1º Passo: Do enunciado, consegue-se compreender que o problema dado trata de simultaneidade das progressões aritméticas e geométricas.

2º Passo: Estabelecendo o plano. Nesta etapa, vamos formar um sistema de duas equações.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 + a_3 = 12 \end{cases}$$

3º Passo: Executando o plano. Aqui, vamos realizar todos os cálculos possíveis que o problema exige.

Sabendo que $a_2 = a_1 \times q$ e $a_3 = a_1 \times q^2$, vamos substituir no sistema formado anteriormente.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 + a_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_1 \times q + a_1 \times q^2 = 12 \Rightarrow 2q + 2q^2 = 12 \Leftrightarrow q^2 + q - 6 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo esta equação do segundo grau, teremos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 24 = 25 \Rightarrow \Delta = 25, \text{ então}$$

$$q_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2a} = \frac{-1 \pm 5}{2} \begin{cases} q_1 = -3 \\ q_2 = 2 \end{cases}$$

Como a P.G. é alternada, então $q_2 = 2$ será desprezado. Logo consideraremos apenas $q_1 = -3$.

a) Os três termos da P.G., serão:

$$a_2 = a_1 \times q = 2 \times (-3) = -6 \Rightarrow a_2 = -6$$
$$a_3 = a_1 \times q^2 = 2 \times (-3)^2 = 18 \Rightarrow a_3 = 18$$

Resposta: Os três termos da P.G. alternada, são: $(2, -6, 18, \ldots)$.

b) Seja x o número a ser somado ao 2º termo para que os três primeiros termos constituam nessa ordem uma P.A., isto é, $(2, -6 + x, 18, \ldots)$. Aplicando as propriedades da P.A., vem:

$$-6 + x = \frac{2 + 18}{2} \Leftrightarrow -6 + x = 10 \Rightarrow x = 16$$

Resposta: O número que deve ser somado para que os três primeiros termos constituam uma P.A., é 16.

4º Passo: Verificar.

Nesta etapa, basta substituirmos o valor do segundo e terceiros termos respetivamente no sistema para encontrarmos uma igualdade. Assim: $a_2 + a_3 = 12 \Leftrightarrow -6 + 18 = 12$.

III. Consolidação e avaliação ($aproximadamente$ 25 $minutos$)

Um painel contém lâmpadas vermelhas e azuis. Em um instante inicial, acendem-se, simultaneamente, uma lâmpada vermelha e 38 azuis e, a partir daí, de 5 em 5 segundos, acendem-se vermelhas segundo uma P.G. de razão 2 e apagam-se azuis segundo uma P.A. Após 20 segundos, o processo é paralisado e o painel apresenta entre as lâmpadas acesas somente 2 azuis. Determine:

a) O número a_n de lâmpadas vermelhas acesas.

b) A razão da P.A.

Respostas: a) $a_5 = 16$ b) $r = -9$

Deve-se salientar que, durante a realização das atividades nas salas de aulas, a presença dos alunos teve grande influência, porque permitiu que se identificassem suas dificuldades. Essas dificuldades que eles apresentaram durante as atividades foram analisadas e ultrapassadas com a aplicação do procedimento de Pólya na resolução desses problemas.

Finalmente, após o desenvolvimento das atividades realizadas, foi aplicado um segundo teste que é o pós-teste, isto é, no último dia das atividades que permitiu averiguar se as dificuldades dos alunos foram ultrapassadas ou não ou para se verificar se houve desenvolvimento de habilidades por parte dos alunos face à resolução de problemas envolvendo simultaneamente as progressões aritméticas e geométricas.

5 Resultados e Discussão

O desenvolvimento desta pesquisa obedeceu a dois (2) momentos fundamentais, os quais foram:

1º Momento: Neste momento aplicou-se o primeiro teste diagnóstico para identificar o estado inicial das habilidades dos 69 alunos selecionados de uma forma aleatória simples na resolução de problemas que envolvem simultaneamente as progressões aritméticas e geométricas.

2º Momento: Este momento serviu de aplicação do segundo teste diagnóstico de modo que se verificasse o nível de compreensão e das habilidades adquiridas pelos alunos selecionados neste pesquisa e validar a resolução de problemas.

O primeiro teste diagnóstico foi aplicado com o objetivo de averiguar o nível de habilidade dos alunos face à resolução de problemas que envolvem simultaneamente as sequências aritméticas e geométricas. O segundo teste-diagnóstico aplicado teve como propósito averiguar se houve desenvolvimento de habilidades nos alunos face às atividades realizadas na sala de aula. Os mesmos estavam compostos por três (3) problemas, todos relacionados ao assunto desta pesquisa. Os resultados produzidos nos dois testes estão comparados no Quadro 1.

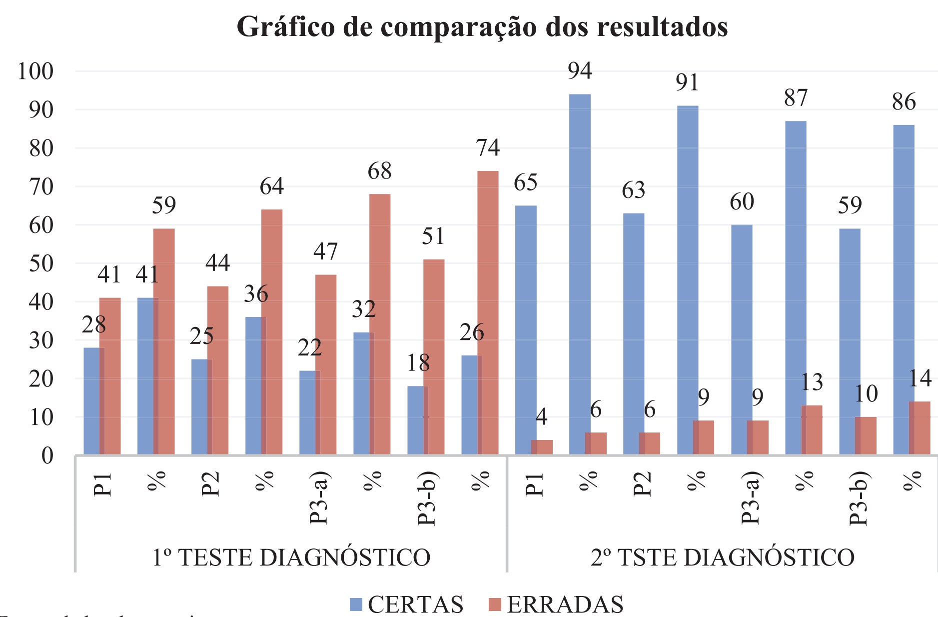
Quadro 1 - Comparação dos resultados obtidos nos dois testes diagnósticos aplicados

Problemas	1º Diagnóstico				2º Diagnóstico				Total
	Certas		Erradas		Certas		Erradas		
	Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%	
P1	28	41	41	59	65	94	04	06	69
P2	25	36	44	64	63	91	06	09	69
P3-a)	22	32	47	68	60	87	09	13	69
P3-b)	18	26	51	74	59	86	10	14	69

Fonte: dados da pesquisa.

Após ter-se apresentado os resultados obtidos pelos 69 alunos da 11ª Classe da especialidade de Ciências Físicas e Biológicas do Liceu do Uíge na tabela acima, apresenta-se a seguir o gráfico abaixo, que mostra a comparação entre os dois testes aplicados:

Gráfico 1 - Comparação dos resultados dos dois testes diagnósticos



Fonte: dados da pesquisa.

Analisando os resultados comparados respetivamente no quadro e no gráfico, apurou-se o seguinte:

No P1 do primeiro diagnóstico, dos 69 alunos inquiridos, 28 alunos, o equivalente a 41%, responderam de forma correta e 41 alunos, que é equivalente a 59%, erraram. No segundo diagnóstico o número de respostas certas subiu para 65, equivalente a 94%, enquanto o número de respostas erradas foi reduzido para 04, o equivalente a 06%. Com esses dados, pode-se deduzir que houve um aumento de 37 respostas certas, o equivalente a 54%.

No P2 do primeiro diagnóstico, dos 69 alunos 25, correspondendo a 36%, acertaram o problema e 44, equivalente, a 64%, erraram o mesmo problema. Ao passo que no segundo diagnóstico 63, equivalente a 91% desses alunos acertaram o problema contra 06, que equivale a 09%, erraram. Pode-se notar que houve um aumento, 38, equivalente a 55%

de respostas certas.

Finalmente, no P3, alínea a) do primeiro diagnóstico 22 (32%) dos alunos acertaram, ao passo que 47 (68%) dos 69 alunos erraram a mesma alínea. No segundo diagnóstico dos 69 alunos diagnosticados, 60 (87%) resolveram de forma certa contra 09, que é equivalente a 13% dos mesmos alunos, erraram a alínea, o que permite verificar um aumento de 38, que equivale a 55% de respostas certas nesta alínea. Na alínea b), primeiro diagnóstico, 18 alunos, o equivalente a 26%, acertaram, ao passo que no mesmo diagnóstico 51 (74%) resolveram erradamente. No segundo diagnóstico, 59 (86%) desses alunos acertaram contra 10, indicando que o equivalente a 14% dos 69 alunos fizeram a alínea de uma forma errada. Isso implica que houve um acréscimo de 41 respostas certas, o equivalente a 59%, mostrando que a maioria fez acertadamente a alínea b) no segundo diagnóstico.

Com essa comparação feita entre os dois diagnósticos realizados aos alunos da 11ª Classe do Liceu do Uíge na especialidade de Físicas e Biológicas, pode-se deduzir que os objetivos almejados neste trabalho foram atingidos, pelo fato de haver melhorias nos resultados obtidos no segundo diagnóstico aplicado.

6 Conclusão

A resolução de problemas no ensino de Matemática é um dos assuntos que os alunos da 11ª Classe do Liceu do Uíge têm apresentado muitas dificuldades, o que foi notado durante a aplicação do primeiro diagnóstico, assim como ao longo do desenvolvimento das atividades realizadas nas respetivas salas de aula. A partir das dificuldades que os alunos foram apresentando, chegou-se às seguintes conclusões:

- ✓ A forma de abordagem de resolução de problemas que envolve simultaneamente as progressões aritméticas e geométricas no manual do aluno da reforma educativa utilizado no Liceu do Uíge pode ter influenciado no baixo rendimento dos alunos neste conteúdo de ensino;
- ✓ A ausência da abordagem de atividades com resolução de problemas envolvendo as progressões aritméticas e geométricas no programa de Matemática da 11ª Classe provavelmente contribuiu negativamente no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo;
- ✓ A dificuldade em utilizar procedimentos metodológicos, considerando alguns princípios da obra de Pólya para a resolução de problemas, pode ser um fator que contribuiu para os resultados insatisfatórios obtidos pelos alunos na resolução de problemas envolvendo as progressões aritméticas e geométricas;
- ✓ As atividades realizadas na sala de aula que permitissem a participação ativa dos alunos em atividades diversificadas com resolução de problemas envolvendo simultaneamente progressões aritméticas e geométricas por meio de procedimentos metodológicos com questionamentos que favorecessem atividades de estudos e pesquisas individuais e em pequenos grupos, certamente contribuiriam para uma melhor aprendizagem dos alunos.

Espera-se que este trabalho possa contribuir positivamente e com estudos e pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem de resolução de problemas envolvendo as progressões aritméticas e geométricas, fornecendo subsídios para minimizar as dificuldades que os alunos apresentaram diante dos diagnósticos aplicados.

Referências

Bernardo, M. (2020). *Conjunto de Problemas que envolvem sistemas de equações lineares à duas incógnitas: Monografia de licenciatura* . Uíge.

Brun, J. (1996). *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Horinzontes Pedagógicos.

Cardoso, D. C. (2007). *A técnica de resolução de problemas aplicadas no ensino de Física.* Uberlândia: IPCBESE.

Gimenez, C. S., & Burin, N. E. (2011). *Resolução de Problemas* (2ª ed.). Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM.

Konig, R. I. (2013). *Resolução de problemas matemáticos na formação continuada de professores.* Lajeado: UNIVATES.

Lei-nº17/16. (7 de Outubro de 2016). *Lei de Base do Sistema de Educação e Ensino. Diário da República I Série nº 170 de 07 de Outubro.* Luanda, Angola.

Martins, C. S. (2016). *Aplicação do modelo de Pólya na resolução de problemas de processo: um estudo envolvendo alunos do 2º ano do 1º ciclo do ensino de base.* Castelo Branco: IPCB.

Matos, J. M., & Serrazina, M. d. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Miranda, A. S. (2015). *Resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise das repercussões de uma formação continuada.* Porto Alegre: PUCRS.

Muchanga, C. E., Simone, H. A., Nhabique, F. F., & Leitão, J. L. (2019). *Resolução de problemas matemáticos: formação de professores do ensino primário.* Maputo-Moçambique: MINEDH.

Oliveira, M. F. (2011). *Metodologia Científica: um manual para a realização de pesquisas em administração.* Catalão-Goiás: UFG.

Prodanov, C. C., & Freitas, E. C. (2013). *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas de Pesquisa do Trabalho Acadêmico* (2ª ed.). Novo Hamburgo-Rio Grande do Sul- Brasil: Universidade Feevale.

Santos, T. A. (2015). *Resolução de problemas como metodologia no ensino fundamental II: uma revisão bibliográfica do ENEM.* São Paulo: IFSP.

Souza, D. I., Müller, D. M., Fracassi, M. A., & Romeiro, S. B. (2013). *Manual de orientações para projetos de pesquisa.* Novo Hamburgo: Fundação Escola Técnica Liberato Salzano Vieira da Cunha: FESLSVC.

Souza, L. C. (2015). *Resolução de problemas: tradução de situações problemas para Matemática.* São Paulo: IFSP.

Zanella, L. C. (2013). *Metodologia de Pesquisa* (2ª-reimpressa ed.). Florianópolis: UFSC