# QUELQUES POINTS SUR L'HISTOIRE ET L'EPISTEMOLOGIE DES FONCTIONS, POUVANT ECLAIRER CERTAINES QUESTIONS DIDACTIQUES SUR LEUR ENSEIGNEMENT

**Marc Rogalski** [1]
Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Denis Diderot-Paris 7

## RESUME

Dans une première partie on expose une brève version de l'histoire des fonctions de l'antiquité au XIXème siècle. On y cherche des ressorts épistémologiques et des passages obligés à prendre en compte dans le travail didactique sur l'enseignement des fonctions. Dans une deuxième partie on dégage ainsi deux hypothèses à la charnière entre épistémologie et didactique. L'une est interne aux mathématiques (l'articulation nécessaire entre symbolisme et calcul algébrique, équations numériques, inconnues, variables et covariation de grandeurs sur des courbes données par des équations), l'autre leur est en partie externe (étude de phénomènes temporels, des mouvements, de covariations de grandeurs physiques). Ces deux hypothèses proposent des précurseurs et des passages obligés, et des articulations nécessaires au développement et à l'enseignement du concept de fonction. Dans une troisième partie on dégage un ensemble de thèmes et de liens entre-eux à prendre en compte pour mettre en œuvre les hypothèses précédentes dans la didactique de la notion de fonction. Le réseau tissé ainsi par ces thèmes et leurs liens, combinant articulations entre registres, cadres, champs conceptuels et points de vue variés, devrait permettre de mettre en place un ensemble d'ingénieries coordonnées susceptible de construire un curriculum complet pour l'enseignement des fonctions.

**Mots clefs**: fonctions, variables, covariation, histoire, épistémologie, didactique.

## ABSTRACT

[1] marc.rogalski@upmc.fr

In the first section we give a survey on the history of the concept of function, from antiquity to 19° century, in order to find in it necessary ways for the didactical research about teaching of functions. In the second part we assert two dictatical and epistemological hypothesis about the concept of function. One is internal to mathematics (links between some frames and registers), and the other one is partly external (covariation of physical and geometrical quantities). These hypothesis set out precursors, obligated ways and links for the teaching of functions. In the third section we propose a set of themes and links between them, in accordance with our two hypothesis. They combine articulations between registers, frames, conceptual fields with different points of view. We think that this net can be used for building coordinated engineerings for the teaching of functions.

**Keywords:** functions, variables, covariation, history, epistemology, didactic.

**PLAN**

## I. Histoire, premiers constats épistémologiques

A. Deux grandes étapes (survol - résumé)

B. De l'antiquité au 14° siècle

C. Le collège de Merton et Nicole d'Oresme

D. Le 16° siècle: formules symboliques, la géométrie analytique de Descartes, les équations de courbes

E. Le 17° siècle, le calcul infinitésimal, le début de la conception unitaire comme formules algébriques

F. Le passage au numérique, les fonctions à la base de l'analyse et des sciences, la première conception d'Euler

G. Les cordes vibrantes et la deuxième conception d'Euler

H. La suite de l'histoire, en trois mots

## II. Premières questions épistémologiques/didactiques

A. Equations numériques, courbes géométriques, inconnues et variables, langage symbolique et algébrique: passages obligés vers la notion de fonction?

B. Le passage par la covariation de grandeurs, le rôle du temps et des mouvements, familiarisation nécessaire ?

## III. Questions et problèmes didactiques et curriculaires

A. Quelle notion de fonctions ?

B. Articulations didactiques

## IV. Conclusions?

## I. HISTOIRE, PREMIERS CONSTATS EPISTEMOLOGIQUES

**Avertissement**: il s'agit d'une lecture en partie «récurrente» de l'histoire, nous cherchons des *précurseurs*, des *étapes*, des *liens*, des *passages obligés*, que nous pensons utiles pour la didactique. Et bien entendu, nous ne sommes pas historien, il s'agit donc d'un survol bref, s'appuyant sur les travaux d'historiens, en particulier (Youschkevitch 1986, Commission inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques 1987, Dahan-Dalmenico et Peiffer, 1986).

### A. Deux grandes étapes (survol - résumé)

*1. Antiquité - début du 17ème siècle*

La motivation est *la relations entre grandeurs d'un phénomène naturel.*

Il s'agit de «fonctions» *particulières*, dans *différents registres* (tabulations, langage naturel, grandeurs, «latitudes des formes», formules, courbes géométriques).

Il n'y a aucune conception générale, les fonctions utilisées sont des *outils* sans unification ni formalisation, et sans symboles jusqu'à Viète et Descartes.

On trouve d'abord des problèmes astronomiques, physiques ou mécaniques, *le temps joue un rôle fondamental, c'est la première variable*. Puis, avec Descartes, apparaît le rôle des formules pour décrire des courbes géométriques.

*2. Milieu du XVII ème siècle jusqu'à nos jours*

Il apparaît un *concept unifié* de fonction, donc un *objet mathématique*, mais dont les *définitions successives* vont évoluer en fonction des problèmes (surtout pour modéliser des phénomènes physiques).

Avec Newton et Leibniz, la géométrie et les grandeurs prédominent encore.

Il apparaît un saut avec Euler: la notion de fonction est mise à la base de l'analyse, plus de rapport de *fondation* avec la covariation de grandeurs, mais l'approche du réel devient fondamentalement *fonctionnelle*.

La *première définition moderne* est appelée par un problème de physique, et est utilisée mais contestée jusqu'au milieu du 19ème siècle. La version ensembliste naïve apparaît avec Cantor, suivie de la version moderne formelle au 20ème siècle.

## B. De l'antiquité au 14° siècle

Ce qui prédomine, c'est *l'astronomie, et les fonctions apparaissent sous forme de tabulations*, la variable est la «variable temps», et les grandeurs qui en dépendent sont les «grandeurs angles». Mais on trouve aussi des *covariations* sans la variable temps: au 2ème siècle, Ptolémée étudie et tabule la réfraction de la lumière entre l'air et l'eau.

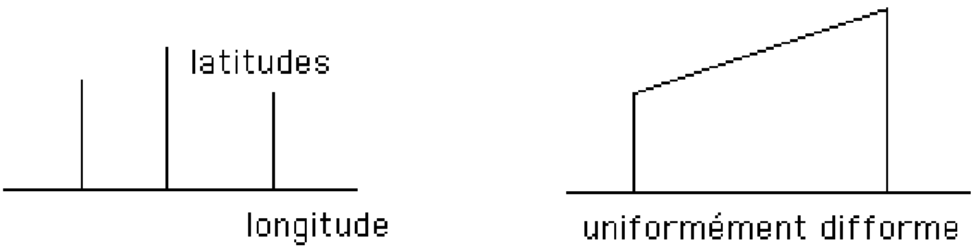
| Angle d'incidence | Angle de réfraction | Angle d'incidence | Angle de réfraction |
|---|---|---|---|
| 10° | 8° | 50° | 35° |
| 20° | 15° 1/2 | 60° | 40° 1/2 |
| 30° | 22° 1/2 | 70° | 45° 1/2 |
| 40° | 29° | 80° | 50° |

- Il est à noter qu'il s'agit toujours de *covariation entre grandeurs mesurées par des nombres* (pas du tout conçue comme "fonctions numériques d'une variable numérique"). Et il semble qu'aucun autre registre de représentation que les tables ne soit utilisé à cette époque.
- Il y a un développement important des «fonctions trigonométriques». Aux 5ème-6ème siècle, Aryabhata (Inde) élabore une table des sinus.
- Al-Tusi (1201-1274), au 13ème siècle, introduit toutes les «fonctions» trigonométriques actuelles (sous forme géométrique), pour l'astronomie.
- Au 15ème siècle, Regiomontanus (J. Müller, de Königsberg, 1436-1476) *développe la trigonométrie comme une branche des mathématiques, indépendante de l'astronomie*. Mais il se place toujours dans le cadre géométrique, et les utilisations pour l'astronomie se font via des tableaux de valeurs.

### C. Nicole d'Oresme et la "latitude des formes", la variation de grandeurs dépendant du temps avant Galilée

Au 14° siècle, au sein du Collège de Merton, à Oxford, plusieurs mathématiciens conçoivent que *les valeurs successives d'une grandeur peuvent se représenter par les points d'une "droite numérique", c'est-à-dire par des longueurs*. Ils fondent le concept de vitesse instantanée (définie comme une "qualité", pas comme un nombre) et même de mouvement uniformément accéléré, avec le "théorème de Merton": la distance parcourue entre deux instants t et t' est la même que celle d'un mouvement uniforme dont la vitesse est la moyenne arithmétique des vitesses à ces deux instants. Et cela 3 siècles avant Galilée…

Nicole d'Oresme (Paris, 1323-1382) va tirer parti de cette conception pour inventer un nouveau registre pour figurer les valeurs d'une grandeur dépendant d'une autre: "…*toute intensité susceptible d'être acquise d'une manière successive doit être imaginée au moyen d'une droite élevée verticalement à partir de l'espace ou du sujet qu'affecte cette intensité*. […] *La quantité d'une qualité linéaire se doit imaginer à l'aide d'une surface dont la longitude ou base est une ligne tirée au sein du sujet qu'affecte cette qualité,* […] *et dont la latitude ou l'altitude est représentée par une ligne élevée sur la base qu'on a tracée* […]*".*




Oresme joint même les extrémités supérieures des différents segments et distingue diverses formes possibles de "qualité" (pour nous: *différentes formes de graphes de fonctions*). Cette "représentation graphique" lui permet d'étudier le cas où la surface est un trapèze (c'est-à-dire où *la grandeur est affine*, Oresme dit "uniformément difforme"), et d'en déduire par exemple, par un calcul qui anticipe la géométrie analytique de Descartes, *une caractérisation fonctionnelle* de la "qualité affine". Il montre aussi (bien avant Galilée) que si la vitesse d'un mouvement est “uniformément difforme” (affine), alors *la distance parcourue est représentée par l’aire du trapèze*.

Il apparaît ainsi une *conception objet* de la notion «graphe de fonction» (mot non prononcé). Mais cela semble avoir été *trop précurseur* pour l’époque. Malgré un livre et l’enseignement de la «latitude des formes» dans les universités, celle-ci a eu un écho limité dans le développement des mathématiques avant Galilée, sans doute par l’absence de formules avant la révolution symbolique de Viète et Descartes.

Par contre, le thème des variations des grandeurs dépendantes du temps a été développé par plusieurs savants entre Oresme et Galilée, et **on peut penser qu’il s’agit d’un précurseur obligé de la notion de fonction**.

Mais cette époque voit l’invention de l’imprimerie, et surtout la (re)découverte des mathématiques Grecques et arabes (arithmétique et algèbre), leur diffusion, et le développement de la théorie des équations chez les italiens. Cela suffit à occuper les mathématiciens de ce temps.

**Quand l’inconnue devient variable: un épisode de ces époques qui donne à réfléchir**

Omar Khayyâm (1048-1131) ramène des équations du 3ème degré à l’intersection d’une parabole et d’une hyperbole : au-delà de l’inconnue, un «point courant» sur les courbes apparaît… et l’inconnue y a donc diverses valeurs *variables* avant de prendre celle de l’intersection… Faut-il voir une prémisse de «grandeur fonction d’une autre»? Et du théorème des valeurs intermédiai-res? Nous y reviendrons.

## D. Le 16ème et le début du 17ème siècle: les formules symboliques, la géométrie analytique et les équations de courbes

Commençons par une transition: Jérome Cardan (1501-1576), étudiant l’équation du troisième degré $x^3+q = px^2$, trouve des valeurs de x où $x^3+q < px^2$ et d’autres où $x^3+q > px^2$ , et conclut à l’existence d’une racine. Le même argument est repris par Bombelli (1526-1572). Faut-il y voir, plus nettement qu’avec Omar Khayyâm, *le passage de l’inconnue à la variable*, et donc un début de l’idée de fonction ? Et, là aussi, du théorème des valeurs intermédiaires ?

En tout cas, au 16ème siècle, le tournant du symbolisme (François Viète, 1540-1603, René Descartes, 1596-1650) ouvre la voie à *un nouveau registre*, celui des formules algébriques, qui va permettre des ***opérations nouvelles*** (toujours au cas par cas) essentielles pour accéder au concept général de fonction, en particulier **la possibilité de *disposer de polynômes de degrés quelconques*, et de *substituer une expression* à la variable d'une formule** (Serfati 2005, 2006).

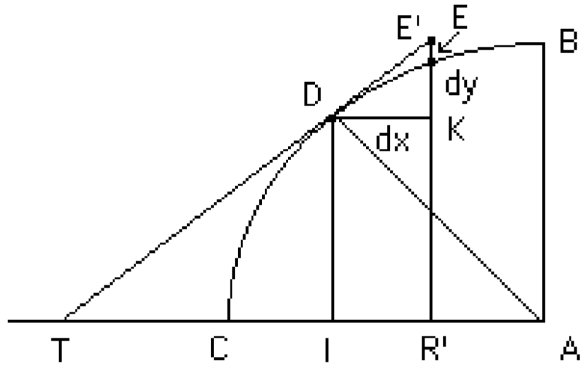
Descartes, grâce à sa géométrie analytique, introduit le concept "d'équation d'une courbe géométrique" (ou mécanique) comme *une expression algébrique correspondant à une courbe.* On voit donc apparaître *un double registre algébrique-graphique, qui a un caractère général de méthode*. Pas encore de fonction, mais Descartes dit que l'équation “géométrique” P(x,y) = 0 permet de déterminer la valeur de y si on se donne l'abscisse x (on a là la notion de variable).

***Du point de vue épistémologique, la conjonction de la substitution et du double registre formules-courbes semble un autre précurseur nécessaire à la constitution d'un premier concept de fonction*.**

La plupart des fonctions introduites aux 16° et 17° siècle sont *étudiées en tant que courbes*, elles-même souvent introduites au moyen de *mouvements* : pour Roberval, Barrow, Newton, une courbe est *la trajectoire d'un point mobile*. On retrouve ***ce passage apparemment obligé par le mouvement et le temps*.** Par exemple, le logarithme est défini par Neper au moyen de la coordination de deux mouvements sur deux droites…

## E. Le 17ème siècle, le calcul infinitésimal et le début de la conception unitaire des fonctions comme formules algébriques

L'invention du calcul infinitésimal permet d'étudier de nombreux problèmes physiques ou de géométrie des courbes (tangentes, normales, sous-tangentes, cercles osculateurs, etc). Les méthodes sont encore géométriques. Ainsi, la similitude d'un triangle lié à la courbe avec un «triangle infinitésimal», le «triangle caractéristi-que» de Leibniz, fournit la sous-tangente (Irem de Basse Normandie 1999).




On confond le point E sur la courbe et le point E’ sur la tangente.
La similitude des triangles DKE’ et TID donne la relation

dy / d x = DI / IT , donc IT = y/y’

(on a AI = x et ID = y).

Il apparaît à cette époque *une claire notion générale de fonction*. James Gregory (1638-1675) parle ainsi

«***d’une quantité obtenue à partir d’autres quantités par les quatre opérations élémentaires, la racine carrée***»… ou “***par toute autre opération imaginable***”, ce dernier aspect anticipant sur Euler et le 18° siècle.

Isaac Newton (1643-1727) conçoit les fluentes et les “fluxions” (avec le lien fait avec la notion physique de vitesse) comme des fonctions, ou plutôt comme des “quantités corrélées et des quantités reliées qui en dépendent”.

Gottfried W. Leibniz (1648-1716) introduit le mot “fonction” en 1673 dans son texte “La méthode inverse des tangentes ou au sujet des fonctions”.

**F. Le passage au numérique et les fonctions à la base de l’analyse et des sciences exactes, la première conception d’Euler comme “expression analytique”**

Euler s’émancipe du cadre géométrique et du cadre cinématique ou physique: ***les fonctions deviennent des objets à étudier pour eux-mêmes***, et forment la base du calcul infinitésimal. Il s’agit de «fonctions numériques d’une variable numérique» au plein sens du terme. Youschkevitch dit ainsi:

“*Tous les concepts initiaux du calcul perdent leur carapace géométrique et mécanique, prennent une formulation arithmétique ou algébrique et commencent à être appréhendés comme précédant logiquement les concepts semblables des autres sciences exactes*”.

Jean Bernoulli dit en 1718: "***On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes***". On notera l'usage encore en vigueur du mot "grandeur", alors que clairement il s'agit de plus en plus de nombres… mais au statut loin d'être encore clair. Et **une fonction est donc une formule de calcul**.

**Commentaire**: *cette définition des fonctions par Bernoulli, comme celle déjà donnée par Gregory, recouvre* ***toutes les fonctions que des élèves peuvent rencontrer de 15 à 17 ans****.*

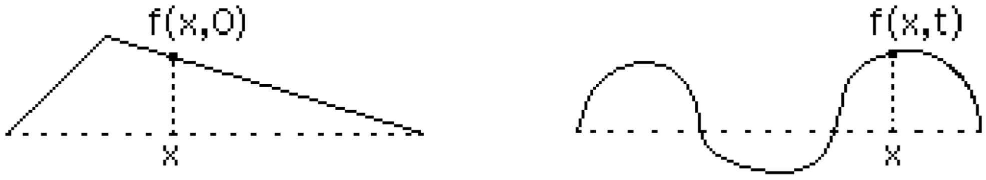
Mais il est probable que Bernoulli admettait aussi les sommes de séries. Et comme Euler a utilisé nombre de développement en séries et d'intégrales, sa **première définition** intègre cet aspect, et il introduit ***une notion générale de fonction conçue comme une expression analytique combinant calculs algébriques et opérations de l'analyse (le passage à la limite: suites, séries, intégrales)*****.**

**Commentaire**: **les fonctions rencontrées de 15 ans à la deuxième année d'université entrent dans ce cadre**, à condition d'emprunter au 19ème siècle un langage précisé de la notion de limite, et de mettre en place le théorème des valeurs intermé-diaires, faisant le lien fonctions-équations.

## G. La résolution par d'Alembert du problème des cordes vibrantes et la deuxième conception des fonctions chez Euler

Au 18° siècle, l'analyse permet de définir de nombreux concepts de la physique, et de résoudre de nombreux problèmes. D'Alembert établit l'équation des cordes vibrantes $f''_{t2} - c^2 f''_{x2} = 0$.

Il trouve des solutions sous la forme $f(x,t) = g(x + ct) - g(x - ct)$, avec une fonction g presque "arbitraire". Mais il faut, lorsque $t = 0$, admettre une forme de la corde par exemple triangulaire (corde pincée), et ainsi "discontinue" au sens de l'époque.




Un pas supplémentaire est motivé par Daniel Bernoulli qui donne en 1755 une solution sous forme de *série trigonométrique*, et on se demande alors si une forme initiale "quelconque" de la corde peut ainsi être la somme de fonctions aussi régulières que des sinus.

Cela amène Euler à définir une **"deuxième" notion de fonction**, où ***une quantité est fonction d'une autre si elle change si cette dernière change***. Sont ainsi admises des fonctions données par le dessin de leur graphe seulement (le "tracé libre de la main" dit Euler), et des fonctions "discontinues" (mais continues en notre sens actuel, et définies par des formules analytiques différentes sur des intervalles différents).

**Commentaire**: *le grand rôle joué par les solutions d'équations de la physique* (corde vibrante, chaleur) données sous la forme de séries trigonométriques, à la fois pour le concept général de fonction et pour des notions portant sur les fonctions (convergence simple, convergence uniforme…) est évidemment inutilisable avant la deuxième année d'université.

## H. La suite de l'histoire, en trois mots

La deuxième moitié du 18° siècle et la première moitié du 19° siècle voient **une tension entre ces deux conceptions d'Euler des fonctions**: différents mathématiciens s'affrontent à ce sujet (Lagrange, Cauchy, Laplace, Condorcet, Fourier, Dirichlet, Riemann, Hermite…) et cette tension a même lieu au sein de certains d'entre eux, amenés à changer d'avis.

Le courant "de la rigueur" du 19° siècle aide à dépasser le problème. Par ailleurs Riemann introduit le premier une *classe* de fonctions définie comme telle (les fonctions Riemann-intégrables), avant lui continuité, dérivabilité… sont des propriétés d'une fonction donnée (même notée symboliquement f); c'est le développement de l'intégration qui imposera la notion d'espace fonctionnel.

Enfin, les travaux de Cantor (lui aussi motivé initialement par des problèmes portant sur les séries trigonométriques) permettent de dégager, au sein de sa théorie "naïve" des ensembles, la notion d'application entre ensembles. La définition par graphe dans le produit finit de formaliser la notion de fonction.

## II. PREMIERES QUESTIONS EPISTEMOLOGIQUES/DIDACTIQUES

### A. Equations numériques, courbes géométriques, inconnues et variables, langage symbolique et algébrique: passages obligés vers la notion de fonction?

Reprenons l'exemple de Omar Khayyâm: résoudre une **équation numérique** de degré > 2 (sans algorithme arithmétique, algébrique ou géométrique de résolution) par la géométrie peut demander d'introduire **des points variables sur des courbes**, et de chercher une intersection. L'introduction de coordonnées et **d'équations de courbes**, à la Descartes, semble le moyen obligé de rendre possible et simple ce type d'argument (qui était certainement difficile, et géométrique, du temps d'O. Khayyâm). Et alors, sur une courbe $P(x, y) = 0$, il y a **covariation** de x et y.

*Réinterprétons* l'exemple d'Omar Khayyâm: l'équation $x^3 = px+q$ peut s'écrire $x^2 = p+q/x$. Il faut alors introduire les points *de coordonnées variables* (x, y) et (x', y') tels que $y = x^2$ et $y' = p+q/x'$. Trouver un x inconnu solution de l'équation, c'est trouver un point (x, y) tel qu'on ait à la fois $y = x^2$ et $y = p+q/x$, c'est-à-dire un point d'intersection de deux courbes (parabole et hyperbole). Et sur ces courbes, (x, y) et (x', y') sont **variables**, avant de coïncider avec un point d'intersection dont l'abscisse sera la valeur cherchée de **l'inconnue**.

Il y a donc *échange entre les deux types d'équations*: numérique, avec une **inconnue** x, et équation de courbe géométrique, avec deux **variables qui covarient**, sont liées par cette équation.

Bien sûr, une telle approche, si on n'est pas Omar Khayyâm ou Jérome Cardan, demande de **disposer du calcul algébrique avec les notations**

**symboliques** de Viète et Descartes, et la possibilité de faire des calculs compliqués, en particulier les substitutions.

Inversement, quand on demande aux élèves de réduire des expressions du type $3x+4x^2–x+2x^2–5$, pourquoi ne pas réduire $2x^2–x$ en $4x–x = 3x$ ? Il n'y a que 2 possibilités pour ce qui est compris par les élèves comme une interdiction arbitraire :

- introduire des polynômes formels où 1, x, $x^2$, … désignent des *places symboliques* ; guère possible avant l'université !
- considérer que x, $x^2$, $x^3$, … **ne varient pas de la même façon quand x varie**, c'est-à-dire utiliser une notion -même fruste- de fonction : si on donne à x les valeurs 1, 2, 3, …x et $x^2$ ne prennent pas les mêmes valeurs. Il y a là aussi **un passage de l'inconnue à la variable**, car l'introduction du symbolisme algébrique dans les classes (et dans l'histoire) est liée à la résolution des équations, donc x est a priori une inconnue : le calcul sur les lettres sert à résoudre des problèmes difficiles à résoudre par l'arithmétique.

**Une première hypothèse**

On peut faire l'hypothèse qu'un accès efficace à la notion de fonction demande une bonne **articulation** entre les thèmes:

- symbolisme et calcul algébrique, et passage de l'arithmétique à l'algèbre,
- équations numériques,
- inconnues,
- variables,
- covariation de variables sur des courbes géométriques définies par des équations simples.

Nous verrons plus loin quelles questions didactiques pose cette hypothèse.

### B. La covariation de grandeurs physiques et géométriques, le rôle du temps et des mouvements, préalable nécessaire?

La première hypothèse est en un certain sens ***interne aux mathématiques***, les points qu'il s'agit d'articuler sont des concepts ou des pratiques mathématiques.

Mais nous avons vu que, de l'astronomie motivant l'invention des fonctions trigonométriques, en passant par l'invention des graphes par N. d'Oresme pour étudier divers types de mouvements, et jusqu'à Leibniz et Newton pour qui la variable est souvent le temps, selon lequel un point décrit une courbe qui définit une fonction, ***les variations de grandeurs physiques, et en particulier celles dépendant du temps, ont été un passage vers l'idée de fonction***.

D'où une deuxième hypothèse.

**Une deuxième hypothèse**

* L'étude de phénomènes temporels et l'usage de la variable temps peuvent être un précurseur fondamental de la prise de conscience de la numérisation d'une grandeur variable et de la notion de grandeur fonction d'une autre grandeur, ou de l'existence de relations fonctionnelles entre grandeurs.

* Cette étude, combinée avec l'articulation proposée dans la première hypothèse, peut mener les élèves à une bonne conception de la notion de fonction, analogue à celle proposée par Gregory, d'abord, puis à l'une ou l'autre des conceptions développées par Bernoulli et ensuite par Euler.

Mais cela pose divers problèmes didactiques à étudier.

## III. QUESTIONS ET PROBLEMES DIDACTIQUES ET CURRICULAIRES

### A. Quelles notions de fonction choisir d'enseigner?

Comme je l'ai annoncé déjà par certains commentaires, la notion de fonction développée par Gregory et Bernoulli recouvre tout ce qu'on peut faire avec les élèves de 14 à 16 ans, et la première conception d'Euler permet d'aller jusqu'en deuxième année d'université. Une fonction est en premier lieu un programme de calcul par une formule algébrique, puis ensuite on y ajoute les opérations simples de l'analyse associées à l'idée de limite. Mais bien entendu la notion de variable, d'une part, et tout ce que permet l'usage du symbolisme algébrique, de l'autre, jouent un rôle essentiel dans les pratiques associées à ces notions de fonction, et peuvent s'intégrer dans des activités d'introduction, éventuellement inspirées de l'histoire.

**Qu’est ce que cela exclut?**

Essentiellement tout ce qui va au-delà de la première définition d’Euler: sa deuxième conception, celle de Cantor, et la *définition* moderne par graphe (même si les graphes sont bien sûr inclus dans tout champ conceptuel raisonnable contenant les fonctions).

Cela exclut aussi, dans les premières années d’étude des fonctions, les notions d'images, d'antécédents ou d'images réciproques, qui n'ont rien à voir avec les premières formes apparues de fonctions. Ces concepts ne vont être vraiment motivés que par la considération d'équations, en particulier par la recherche de fonctions réciproques et la recherche de bijections entre ensembles (Cantor) qui ne sont pas IR. L’introduction de la continuité au sens de Cauchy peut par contre tirer parti de ces notions, mais il s’agit du niveau universitaire.

De même, la modélisation de problèmes d’analyse dans l’algèbre linéaire en première année d’université peut tirer un avantage net des notions d’image et antécédent, en les reliant aux notions d’injectivité et de surjectivité, elles-mêmes fondamentalement motivées par la notion d’équations.

**Peut-on parler de notion FUG pour les fonctions?**

S’agissant des fonctions au sens de Cantor (et de Bourbaki a fortiori), ou même au deuxième sens d’Euler, la réponse est oui, car clairement il s’agit d’une *généralisation formelle qui unifie* des pratiques antérieures sur les fonctions. Par suite, choisir de parler d’aspects des fonctions qui d’emblée relèvent de ces niveaux introduit une composante FUG qui, on le sait, peut poser des problèmes didactiques difficiles.

Mais si on se borne, en particulier jusqu’à 17-18 ans, à n’enseigner qu’une notion de fonction qui ne dépasse pas la première définition d’Euler, alors on peut imaginer de nombreuses approches du type dialectique outil/objet, s’inspirant des deux hypothèses précédentes.

**B. Articulations didactiques**

L'articulation didactique des différents points évoqués dans les deux hypothèses ne va pas de soi, elle semble devoir être très complexe. Aussi je vais me borner à énumérer et développer diverses possibilités de thèmes, en essayant de préciser des liens possibles entre-eux.

**(1) L'introduction du calcul algébrique avec une lettre x représentant l'inconnue d'un problème, dans le but de donner un moyen plus puissant de résolution que l'arithmétique.**

De nombreuses études didactiques que je ne reprends pas ont été conduites sur ce sujet difficile. Citons, entre autres, en France: Y. Chevalard, M.-J. Perrin-Glorian, B. Grugeon-Allys ; en Italie : l'école de P. Buero ; au Canada : L. Radford; et plusieurs chercheurs travaillant dans le cadre du Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre (SFIDA).

Je rappelle ici que le début du calcul algébrique est l'occasion, à propos de l'irréductibilité des puissances 1, x, $x^2$, $x^3$, …, d'introduire la notion de «variable» avec un premier « point de vue fonctionnel » sur les expressions algébriques [**lien n°1**].

**(2) L'idée d'équation d'une courbe géométrique avec une première approche des coordonnées dans le plan.**

- Première approche des coordonnées par l'idée de covariation de grandeurs physiques ou géométriques (voir plus loin [**lien n°2**]), et rôle de la géométrie dans cette approche.
- Des *inconnues* aux *variables* via l'équation d'une courbe.

<u>Premier exemple</u>. Peut-on construire un rectangle (de côtés *inconnus* x et y) connaissant son périmètre 2p et son aire S ? On regarde *tous* les points (x, y), variables, vérifiant l'une ou l'autre des deux relations x+y = p et xy = S. On passe donc aux courbes définies par ces équations, qu'on écrit y = p–x et y = S/x, en référence à des exemples rencontrés lors de la covariation de grandeurs [**lien n°3**]. On cherche l'intersection d'une droite et d'une hyperbole, introduites ici ou déjà vues (voir l'herbier et l'étude de la droite, [**liens n°4, 5**]).

<u>Deuxième exemple</u>. Celui d'Omar Khayyâm, plus subtil au départ car il faut dissocier les deux membres de $x^2$ = p+q/x : *l'enseignant doit introduire une inconnue*

*supplémentaire* y vérifiant $y = x^2$ et $y = p+q/x$. Il apparaît de nouvelles courbes : parabole et translatée d'une hyperbole (on renvoie à des exemples tirés de la physique ou de la géométrie [**lien n°6**] et aux transformations simples sur les courbes [**lien n°7**]).

Les *liens entre courbes (avec une équation) et graphes de fonctions* ne vont pas de soi, il n'est pas exclu que les courbes P(x, y) = 0 soient, en même temps qu'un précurseur obligé, un obstacle ultérieur, on à ce sujet voir (Gaudin 2002).

**(3) L'accès progressif à un petit herbier de courbes et leurs équations, mais assez tôt pour varier la notion de fonction.**

- Les droites sont les seules fonctions développées au début en France, les nouveaux programmes de São Paulo sont plus ouverts.
- Les hyperboles y = a/x et y = a/x+b sont utiles et le lien avec des grandeurs inversement proportionnelles est à faire [**lien n°8**].
- Les paraboles $y = ax^2$, à relier aux expressions x, $x^2$ [**lien n°9**] et à des covariations de grandeurs physiques ou géométriques (aires du carré, du disque, énergie cinétique [**lien n°10**]).
- L'équation du cercle…et le théorème de Pythagore.

Un problème délicat (qu'on retrouve à l'université !) est de comprendre qu'une équation P(x, y) = 0 d'une courbe C est une *condition nécessaire et suffisante* pour qu'un point M = (x, y) *appartienne* à la courbe C (sous-ensemble du plan), et que vérifier deux équations signifie être *à l'intersection des courbes*. Il y a là ***un peu de logique et de théorie des ensembles***, qui peut poser des problèmes. Mais on a un éclairage possible par le lien avec l'idée de *système de deux équations à deux inconnues* [**lien n°11**].

**(4) L'étude des droites, de leurs équations, des fonctions affines, des systèmes de deux équations affines à deux inconnues.**

C'est en principe le cœur du début de l'étude des fonctions. Mais nos deux hypothèses signifient que, isolée des autres points que ces hypothèses évoquent, ***cette étude ne peut à elle seule aboutir à la notion de fonction***, il faut en plus la grande variété des liens et articulations avec les autres points de vue que nous avons vus à l'œuvre dans l'histoire.

- Bien sûr, tout le travail de R. Duval et de ses élèves sur les conversions entre le registre graphique et celui de l'expression algébrique d'une fonction affine est à prendre en compte (mais il y manque, sauf erreur, le rapport avec le registre de l'équation ax+by+c = 0). De plus, il y a dans le cas des droites une trop grande simplicité qui permet une *algorithmisation de la conversion* très particulière (en fait, la vision globale est inutile, la pente est la même partout). *On ne peut ainsi de cette seule activité limitée aux droites tirer la conceptualisation de l'idée de fonction*.
- De plus, je pense que Duval a tort lorsqu'il affirme « *La présentation d'un phénomène physique, économique ou biologique donne peut-être un intérêt plus grand pour les graphiques, mais cette présentation ne facilite pas l'appréhension du fonctionnement sémiotique d'un registre, elle la présuppose au contraire* ». On ne peut attendre que les conversions de registres soient bien établies chez les élèves pour seulement alors *appliquer* les fonctions affines à la physique, par exemple.
- Les notions de vitesse, de débit, …sont *constitutives* du concept de pente d'une droite et non une simple *application* de mathématiques préexistantes, elles *éclairent* au contraire ce concept, lui donnent un contenu concret, permettent des *extensions* ultérieures (la notion de taux d'accroissement instantané, de dérivée, par exemple), ce n'est pas un simple nombre a dans une relation algébrique y = ax+b.
- De plus, ***il est certainement réducteur de faire comme si le sens et la conceptualisation ne pouvaient provenir que du jeu sémiotique***.
- Dans aucun manuel ou programme le lien n'est fait entre, le théorème de Thalès et sa réciproque, et l'équation d'une droite dans le plan muni d'un repère. C'est pourtant *essentiel*, car cela fait le pont entre la notion de proportionnalité de grandeurs, la caractérisation des fonctions affines y = ax+b (les accroissements de y et de x sont proportionnels), l'équation d'une

droite, et les sens concrets du concept de pente (rapport de proportionnalité entre les accroissements de deux grandeurs) [**liens n°12 à 15**].

- L'interprétation d'un système de deux équations affines à deux inconnues comme la recherche de l'intersection de deux droites renvoie aux cas plus généraux associés à deux courbes, avec les exemples développés plus haut [**lien n°16**].
- De plus, il paraît intéressant d'associer à la fonction linéaire la fonction $y = a/x$, comme exprimant une proportionnalité inverse [**lien n°17**].
- Enfin, on peut parfaitement envisager de faire travailler les élèves sur le théorème d'Oresme et Galilée, exprimant la distance parcourue par un mobile à vitesse fonction linéaire ou affine du temps comme l'aire d'un triangle ou d'un trapèze [**lien n°18**], voir (Rogalski 2001).

**(5) L'exploitation du symbolisme algébrique, avec la possibilité de substitution dans les formules.**

Cette possibilité est très sous-utilisée dans les manuels, alors que c'est l'un des avantages essentiels du symbolisme algébrique (voir Serfati 2005, 2006).

- La substitution à x dans une expression algébrique d'une autre expression comportant x, mais d'un certain type général, permet de faire des prévisions, parfois contraires aux croyances des élèves. Quelques exemples.

* Sachant que l'aire du disque est $\pi R^2$ et que son périmètre est $2\pi R$ (formules admises très tôt), que se passe-t-il si on double le rayon? On peut faire le rapport avec l'irréductibilité de $x$ et $x^2$ [**lien n°19**], et comparer avec le doublement du côté d'un carré (interprétation géométrique par découpage, impossible pour le cercle).

* La distance d'arrêt d'un véhicule étant proportionnelle à son énergie cinétique donnée par $(1/2)mv^2$, que se passe-t-il si on double sa vitesse?

Ce type d'activité avec les élèves est à mettre en rapport avec la comparaison des graphes des fonctions $y = ax$ et $y = ax^2$ [**lien n°20**], et par exemple leur «rapidité de croissance» quand x tend vers $+\infty$.

- Autres exemples, substituer $x–a$ et/ou $y–b$ aux variables de l'équation d'une courbe $P(x, y) = 0$ a quelle signification géométrique (translation) ? Même problème pour les substitutions par □x et □y, à relier aux changements d'échelles dans les cartes ou aux changements d'unités dans les axes du repère, et aussi aux problèmes de changement d'unités dans la numérisation des grandeurs [**lien n°21**]. Des exercices classiques sur cet aspect figurent maintenant dans de nombreux manuels, et au début on peut se borner à opérer sur les courbes du petit herbier cité plus haut.

**(6) Les rapports entre registre graphique et registre des formules symboliques pour les fonctions.**

Au-delà de certains exemples cités, et des conversions détaillées mais algorithmisables dans le cas des droites, et à un niveau plus avancé (17-18 ans et à l'université) on trouve d'une part des travaux théoriques (Rogalski 1984), et de l'autre des activités mettant en valeur *le sens plus difficile* (mais utilisé dans divers domaines) *du graphe vers la formule*, développées à l'origine à l'université de Lille.

**(7) La covariance de grandeurs et son interprétation graphique, le cas des mouvements**

De nombreux exemples existent en physique élémentaire, en sociologie ou en économie, ou dans la vie courante, exploitant les notions de vitesse, débit, taux d'accroissement, lorsqu'ils sont constants, puis variables, de proportionnalité et de proportionnalité inverse. Bien sûr, de la covariation à la fonction, il y a une distance pas toujours aisée à franchir, voir (Passaro 2009).

*Concernant les mouvements, de nombreux problèmes d'interprétation existent*. C. Janvier a étudié à ce propos divers obstacles à la description graphique par les élèves de phénomènes décrits en langage naturel ; nous renvoyons à ses travaux, et à quelques autres (Crépault 1979, Janvier 1981, 1983, 1993). Citons juste une confusion classique entre représentation graphique de l'équation d'un mouvement rectiligne à vitesse constante et droite physique sur lequel a lieu ce mouvement. Par exemple, des étudiants de Lille ont été incapables d'étudier le «risque de collision» entre deux navires, faute d'utiliser le temps pour décrire les trajectoires, considérées seulement d'un point de vue géométrique. Ces difficultés de modélisation exigent encore de nombreuses recherches didactiques.

## IV. CONCLUSIONS?

- A l'issue d'un survol historique nécessairement un peu sommaire, nous avons essayé de dégager quelques aspects épistémologiques du développement de la notion de fonction. Le constat nous a amené à proposer deux hypothèses exprimant une traduction possible au plan didactique des constats épistémologiques faits.
- Puis nous avons discuté de la notion de fonction raisonnablement enseignable, excluant au début une conception trop moderne, susceptible d'engendrer des difficultés de compréhension inutiles compte-tenu des problèmes visés aux niveaux d'enseignement concernés.
- Enfin, nous avons essayé, à partir des deux hypothèses faites, d'évoquer le réseau des articulations entre registres, cadres et champs conceptuels différents, et surtout points de vue variés, qui pourrait permettre une organisation mathématique et didactique étalée sur 2 ou 3 ans pour enseigner les fonctions. Mais bien sûr, tout reste à faire pour établir l'éventuelle viabilité d'un tel projet : ingénieries longues, situations didactiques possibles, prévision des obstacles…

## REFERENCES

Bell, A. et Janvier C. (1981). The Interpretation of Graphs Representing Situations. *For the Learning of Mathematics*, 2(1), 34-42.

Comine, E. (2005) Variables et fonctions, du collège au lycée. Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel. *Petit x*. Vol 67. pp 33-61.

Commission inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques (1987). *Mathématiques au fil des* âges (collectif), Gauthiers-Villars, Paris.

Crépault, J. (1979). Organisation et genèse des relations temps, espace et vitesse. In : *Du temps biologique au temps psychologique*. Symposium de l'association de psychologie scientifique de langue française. Paris : Presses Universitaires de France.

Dahan-Dalmenico, A. et Peiffer J. (1986). *Une histoire des mathématiques*, Seuil collection points science, Paris.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7-2, 5-31.

Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky. *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, No. 28, 85-106

Duval, R. (1988). Graphiques et équations : l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. IREM de Strasbourg, *1*, 57-74.

Gaudin, N. (2002). Conceptions de fonction et registres de représentation, étude de cas au lycée. *For the Learning of Mathematics* 22/2, 35-47.

Hitt F. (1998). Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (1), 123-134.

IREM de Basse-Normandie, Cercle d'Histoire des sciences (1999). *Aux origines du calcul infinitésimal*. Ellipses Paris.

Janvier, C. (1981). Les graphiques cartésiens comme mode de représentations : rôle du langage et naturedes traductions. *Séminaire de didactique et pédagogie des mathématiques*, Grenoble : IMAG, Université Joseph Fourier, *25*, 1-17.

Janvier, C. (1993). Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques. Les Sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle. In J. Baillé et S. Maury. (Éds), *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation*, *1-3*, 17-37.

Janvier, C. (1984). Constructing the Notions of Variable Using History and Bottles. In : J. Moser (Ed), *Proceeding of the Sixth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Madison, Wisconsin.

Janvier, C. (1983), Représentation et compréhension, Un exemple : le concept de fonction. *Bulletin de l'AMQ,* Association Mathématique du Québec.

Janvier, C., Charbonneau, L., René de Cotret, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variables, perspectives historiques. In : N. Bednarz et C. Garnier (Eds), *Construction des savoirs*. Agence d'ARC, 227-285.

Malik, M.A. (1980). Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of Function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 11*-4, 489-492.

Passaro, V. (2009). Obstacles à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, volume 14, p. 61 – 77., IREM de Strasbourg.

René de Cotret, S. (1985). *Etude historique de la notion de fonction : analyse épistémologique et expérimentation didactique.* Université du Québec.

Rogalski, J. (1984). Représentations graphiques dans l'enseignements : concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonctions. In : Giordan, A. et Martinand, J.L. (Eds), *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation scientifique. 6ème Journées Internationales sur l'Education Scientifique*. Paris : UER de Didactique des Disciplines de Paris VII, P. 379-388.

Rogalski, M. (2001). *Carrefours entre analyse algèbre géométri.* Avec la collaboration de Pouyanne N. et Robert A. Ellipses, Paris.

Rogalski, M. (2008). *Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques*, in : Didactique, épistémologie et histoire des sciences (sous la direction de L. Viennot), PUF, p.61-87.

Serfati, M. (2005). *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Ed. Petra, Paris.

Serfati, M. (2006) La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Symbolique et invention, *Gazette des Mathématiciens*,n° 108, p. 101-118 (Publ. de la Société Mathématique de France).

Vandebrouck, F. (2011). Points de vue et domaines de travail pour l'étude des fonctions, Annales des Sciences Cognitives et Didactiques, vol.

Youschkevitch, A. (1986). *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXème siècle*. Fragments d'histoire des mathématiques. T. 1. p. 7-68. Brochure de l'APMEP (Bellemin Jean-Marc. Trad.).

Submitted: December 2012

Accepted: March 2013