DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2022v15n3p314-326

Uma Proposta de Ensino das Estruturas da Álgebra Inspirada Numa Concepção Fenomenológica da Construção de seu Conhecimento

A Proposal for Teaching the Algebra Structures Inspired by a Phenomenological Conception of its Knowledge Construction

Verilda Speridião Kluth*[a]; Paola Andrea Gaviria Kassama[a]; Tiago Nunes Castilho[a]; Carlos Alberto T. D. Filho[b]

[a]Unifesp. SP. Brasil.
[b]Prefeitura Municipal de São Paulo. SP, Brasil.
*E-mail: kluth.verilda@unifesp.br

Resumo

Este artigo tem a intenção de apresentar uma proposta de ensino das estruturas da álgebra inspirada em uma concepção fenomenológica sobre a construção de seu conhecimento. Fará parte da apresentação o posicionamento fenomenológico sobre a construção desse conhecimento, do ponto de vista da Matemática, da Filosofia da Educação Matemática mesclados a aspectos advindos da História da Matemática, assim como com a lógica subjacente e o modo como a teoria matemática desenvolve suas demonstrações. A atividade apresentada neste artigo inicia-se no momento da construção das estruturas da álgebra, quando cada uma delas é tomada como *objeto de estudo* buscando pela sua definição, por suas propriedades operacionais e pelas possíveis articulações entre elas, quando expressas por propriedades operacionais advindas da Aritmética. À essa etapa do desenvolvimento da atividade nomeamos de *Apresentação e interpretação da estrutura dos anéis.* A partir daí passamos à segunda etapa intitulada *Compreender a utilização das propriedades de anéis: Fundamentos para a extensão desta estrutura* onde é tratada a articulação entre demonstrações e lógica clássica. A última etapa trata da *Extensão da estrutura de anéis para a estrutura de corpo.* Ao final, os autores voltam-se para a experiência vivida como professor ao estudarem os pressupostos e desenvolverem a atividade proposta.

Palavras-chave: Fenomenologia. Estruturas da Álgebra. Ensino.

Abstract

This article intends to present a proposal for teaching the structures of algebra inspired by a phenomenological conception of its knowledge construction. The phenomenological position on the construction of this knowledge will be part of the presentation, considering the point of view of Mathematics, the Philosophy of Mathematics Education mixed with aspects arising from the History of Mathematics, the underlying rationale and how the mathematical theory develops its demonstrations. The activity presented begins when the structures of algebra were built, when each one of them was taken as an object of study, searching for their definitions, their operational properties, and the possible articulations between them, while expressed by operational properties arising from the Arithmetic. This stage of the activity development is named Presentation and interpretation of the rings structure. Thereafter, the second stage entitled Understanding the use of rings properties: Fundamentals for this structure extension was introduced, where the articulation between demonstrations and classical logic is treated. The last step introduces the Extension from the ring structure to the field structure. Finally, the authors focus on the experience lived as a teacher when studying the assumptions and developing the proposed activity.

Keywords: *Phenomenology. Algebra Structures. Teaching.*

1 Introdução

A trajetória de estudos que embasa este artigo tem sua origem na frequente dificuldade apresentada pelos alunos em apreender o significado matemático das definições de estruturas da álgebra e do uso de propriedades operacionais no desenvolvimento de suas teorias, que se apresentam entrelaçadas à lógica nas suas demonstrações.

É recorrente que nós, professores, ao sermos indagados pelos alunos: *para que serve a álgebra abstrata? Onde uso isto?,* tenhamos o impulso de falar da aplicabilidade das estruturas ou ainda, frente à incompreensão do aluno sobre as nuanças próprias das estruturas da álgebra, apelamos para exemplos numéricos, que são pontuais e privilegiam, na maioria das vezes, um pensamento técnico que deixa encoberta a autoctonia das estruturas da álgebra, de como elas vão despontando no corpo do conhecimento matemático e de como elas vão sendo expressas em sua teorização.

Em concordância com Kluth (2005, 2017), assumimos, no desenvolvimento da proposta aqui apresentada sobre o ensino das estruturas da álgebra, uma postura que busca radicalmente pelas ideias originárias, pelas suas transmissibilidades, em seus modos de ser e ir sendo, pelos modos de organização advindos de processos científicos e cognitivos que as constituíram/construíram/produziram, explicitados em camadas de objetivação.

Como educadores, estamos cientes de que a busca pela radicalidade da transmissibilidade da gênese das estruturas da álgebra não se restringe somente ao ensino das estruturas algébricas no Ensino Superior, mas que deve permear todo o programa de ensino da álgebra na trajetória escolar, como nos mostram Kluth; Bicudo (2020), ao abordarem a passagem do pensamento aritmético ao pensamento algébrico, exemplificando-o no contexto numérico. Afirmam as autoras:

> Pretendemos abrir possibilidades para que o aluno perceba as regularidades na passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. O movimento das atividades de ensino e aprendizagem é promovido à medida que avançamos do pensamento calculista para o pensamento meditativo. Ou seja, por exemplo, tomamos a propriedade distributiva e trabalhamos no sentido de esclarecer a forma como ela é operada, então, buscamos entender o que ela diz, quais ideias estão sendo trabalhadas. (Kluth & Bicudo, 202, p.221, tradução nossa)

Deixar aberta a possibilidade de o aluno realizar a passagem do pensar calculador ao pensar meditativo[1] é também nossa meta, mesmo que estejamos nos referindo às finalidades das propriedades operacionais, quando situacionalizadas no âmbito das Estruturas da Álgebra e o modo como elas se mostram em suas teorias. Esses aspectos serão explicitados nos próximos itens deste artigo, bem como suas intersecções com a atividade desenvolvida para fins educacionais.

2 A Construção do Conhecimento das Estruturas da Álgebra: uma Visão Fenomenológica

Edmundo Husserl (1859-1983) em um anexo datado de 1936, intitulado Die Urstiftung und das problem der dauer. Der Ursprung der Geometrie – O estabelecimento e o problema da duração - A origem da geometria -, explicita uma filosofia histórica sobre a Matemática e a construção/constituição de seu conhecimento. Sua reflexão busca restituir o autêntico sentido de *objetividade* não contemplada pela ciência natural, mostrando que a mais simples vivência de evidência tem a ver com a objetividade e que a Matemática, assim como todas as ciências, deve ser vista como tradição.

> As disciplinas matemáticas vistas como tradição, são realizações humanas, têm sua origem estabelecida ao ter sido uma primeira aquisição originada de uma primeira atividade subjetiva criadora possibilitada por uma evidência originária que tem como solo o Lebenswelt[2]. (Kluth, 2005, p.46)

Todavia a primeira aquisição, ao ser interrogada, torna-se sujeita a um dinamismo realizador de sínteses, formando uma cadeia de aquisições que revelam uma totalidade historicamente construída, onde o sentido das aquisições anteriores fica preservado, embora aberto a novas aquisições. Desta forma, todas as aquisições remetem-se a uma mesma evidência originária, que poderá ser vivida em qualquer tempo e lugar em suas características constituintes, propiciando às aquisições uma singular atemporalidade e não independência, pois as realizações necessitam de alguém para realizá-las. Fica assim definida, no âmbito da fenomenologia, a *objetividade ideal* em contraste com a *objetividade real,* que é temporal e independente por estar à mercê de sua própria natureza. ¨Assim, a objetividade ideal, como componente do horizonte de mundo é veiculada, compartilhada e mantida no corpo linguístico que a carrega com seu sentido (Sinn) e significado (Bedeutung)¨ (Kluth, 2005, p.49)

Através do entendimento possibilitado pela linguagem, há o reconhecimento da aquisição primeira, por ser a mesma para todos os humanos, bem como o produto de atos subjetivos por ela desencadeados em processo de repetição. No entanto Husserl alerta: ¨A formação repetida e produzida torna-se consciente na unidade de uma comunidade de/para comunicação de várias pessoas, não como igual mas como universal¨ (Husserl, 1936, p.445). Com isto, o autor quer dizer que a repetição de pessoa a pessoa não se dá por comparação, mas sim que a repetição se dá mediante aquilo que está e é nuclear em qualquer variação, mesmo aquelas de que não tenhamos conhecimento. O nuclear das variações é que vai constituir a intersubjetividade.

Por tudo que foi dito até agora e para atingir o propósito do desenvolvimento de atividades sobre as estruturas da álgebra, precisamos considerar que a *objetividade* de uma formação ideal, por exemplo como essas, se dá no decorrer de um tempo – individual e coletivo – que vai além da temporalidade das existências individuais, mas que suplanta o obstáculo temporal ao ser veiculada pela linguagem, que transmite sua trajetória perpassando as evidências, as aquisições, transmitindo em cada uma das suas sínteses o nuclear que as constitui e suas possibilidades de avanço.

Kluth (2005, 2017) investiga a construção do conhecimento das estruturas da álgebra, levando em conta o exposto até aqui sobre a concepção de Matemática implícita no pensar fenomenológico sobre ciência. Os resultados de sua pesquisa orientaram a elaboração da atividade aqui proposta. Passaremos a tecer o emaranhado das ideias fenomenológicas sobre as estruturas da álgebra e o modo como subjazem e compõem a atividade.

Ao analisarmos as estruturas da álgebra em sua dinâmica de construção/constituição, deparamos com certas modificações que são expressas em torno de seu nuclear, ou seja, em seus invariantes estruturais, que vão delineando modos de doação das estruturas da álgebra que se cristalizam em camadas de objetivação. A palavra doação designa os modos como as estruturas da álgebra se fazem presentes na sua duração, entendidos como processo de maturação, permanência no corpo do conhecimento matemático e sua transmissão

1 Segundo Kluth (2017), o pensamento calculador não está fundamentado necessariamente nos números. Esse pensamento caracteriza-se muito mais pela atitude humana frente aos dados, do que com a natureza dos dados. O pensamento calculador nunca para; ele ocorre de prospecto para o seguinte. Nunca recolhe. O pensamento meditativo é reflexivo e busca compreensão. Ele não tem pressa, sabe aguardar sua oportunidade com a mesma singeleza que o agricultor espera o nascimento e amadurecimento da semente.

2 Sobre Lebenswelt, mundo-vida, ver Kluth (2020). Lebenswelt apresenta-se como uma primeira determinação intencional em busca do conceito; é o solo no qual toda experiência acontece. (Kluth, 2005)

mediada pela linguagem.

Nos trabalhos de Evariste Galois (1811-1832) e Richard Dedekind (1831-1916), segundo Kluth (2005), as estruturas apresentam-se como *noções estruturais* que cumprem a finalidade de articular propriedades numéricas e princípios da Aritmética, apresentando-se como um recurso para o desenvolvimento de novos métodos, por exemplo: na decomposição das raízes de uma equação em termos de seus coeficientes. Emana desse modo de ser inicial das estruturas da álgebra um caráter de *delineador de fronteiras* e *integrador,* mediado por princípios operacionais. Wussing (1989), ao referir-se ao trabalho de Galois, afirma que este teria reorientado a Matemática com o modo de simplificação por ele apresentado. Essa afirmação do historiador matemático deixa claro o impacto gerado pelo trabalho de Galois.

Na análise fenomenológica sobre a construção do conhecimento das estruturas da álgebra, o que ocorre neste momento é que os números se doam de outra maneira ao serem percebidos em outras características do que aquela da contagem, do cálculo e das medidas. Eles são vistos pela mediação de seus estruturantes, pelo que os constitui enquanto números ou números de uma determinada classe numérica. Galois lança um novo olhar ao já conhecido que engloba o que já se conhece, ou seja, essa nova visão não contradiz o que já se conhecia sobre os números, não nega as propriedades numéricas conhecidas. Esta é uma etapa muito importante a ser trabalhada pelo ensino para que depois o aprendiz esteja apto a entender a *objetividade ideal* expressa nas definições de estruturas, que cristalizam um outro modo de doação das estruturas, por exemplo, quando cada uma delas passa a ser *objeto de estudo* e teorização nos trabalhos matemáticos.

Há, nesse momento, um início de uma inversão importantíssima, não só para a construção do conhecimento das estruturas da álgebra em direção às estruturas da Matemática, mas também quando o assunto é seu ensino. “As propriedades e leis que delineiam a estrutura, gerando as noções estruturais, são tomadas como axiomas que podem ser articulados por um sistema lógico.” (Kluth, 2005, p.146). Vemos, nesse momento, que a Álgebra se lança na direção de novos territórios do conhecimento humano, a lógica formal e a lógica dos sistemas de axiomas, a tal ponto que, para algumas concepções filosóficas, os axiomas são o começo do conhecimento das estruturas da álgebra.

Nas noções estruturais, as propriedades e leis referiam-se diretamente ao campo numérico. No entanto as estruturas da álgebra, tomadas como *objeto de estudo* em seu caráter integrador, têm o propósito de reunir todos os possíveis tipos de uma determinada estrutura, mesmo que para isto tenha sido necessário o recurso de extensão em termos da ideia de inclusão de propriedades. Com isto, muitas vezes, as propriedades não são mais tomadas como numéricas, mas propriedades operacionais, onde as operações, em si, e a natureza dos elementos operados não exercem qualquer papel, ou seja, não expressam mais, necessariamente, os números ou a pertença a uma determinada classe de números. Neste momento da construção do conhecimento das estruturas da álgebra, como *objetos de estudo*, são priorizadas somente as relações entre os elementos de conjuntos, centradas nas propriedades operacionais.

Nesse quesito, é bastante conhecido o trabalho de Steinitz (1950), que afirma no início de seu livro: “O objetivo deste trabalho é obter uma visão geral de todos os possíveis tipos de corpos e identificar suas relações entre si em suas características básicas.” (Corry, 1996, p.195). Interessante observar que o matemático intitula sua obra de Teoria Algébrica dos Corpos, embora o seu pano de fundo fosse a Aritmética e tivesse como objeto de estudo corpos numéricos. Este comportamento que evidencia o *vir a ser* de uma idealidade matemática pode ser observado até hoje nos livros de matemáticos que colocam os exemplos numéricos, ou não, depois da definição formal das idealidades matemáticas. Na concepção trabalhada na atividade aqui proposta, os exemplos são o solo propulsor das estruturas da álgebra.

No momento da construção do conhecimento algébrico sobre as estruturas da álgebra, Steinitz, assim como outros, seguiram o mesmo modo de construção do conhecimento algébrico calçado em objetos matemáticos conhecidos; embora considerassem a álgebra independente das interpretações e das limitações aritméticas, eles utilizaram um conjunto de axiomas abstraídos da Aritmética.

Milies (2004, p.29) comenta, ao analisar os trabalhos de Augustus de Morgan (1806-1871) e Geroge Peacock (1791-1858):

> Eles não perceberam que a escolha poderia ser feita livremente, tornando a álgebra independente da experiência aritmética, tal como a geometria não Euclidiana tinha se tornado independente da experiência sensorial, com a adoção de axiomas que não são “verdades evidentes”.

Mas podemos afirmar que já havia, no entanto, indícios de esvaziamento de sentido numérico, ao se estudarem as estruturas da álgebra.

Esse momento é crucial na construção do conhecimento das estruturas da álgebra, a tal ponto que Wussing (1989) considera o trabalho de Ernst Steinitz (1871-1928) como fim da axiomatização da Álgebra Clássica e ponto de partida para outros trabalhos matemáticos vindouros. O que, antes, eram propriedades emanadas de objetos conhecidos passa a ser axiomas, “propriedades despidas do sentido numérico” a serem verificadas em objetos de conjuntos quaisquer. É uma inversão fantástica e enganosa, porque nos leva a pensar que os axiomas, quando verificados, é que geram a estrutura e esta é que gera o conjunto, quando estamos tratando de estruturas da álgebra, campo genuinamente matemático.

A atividade que pretendemos apresentar neste artigo inicia-se neste momento da construção das estruturas da álgebra, quando cada uma delas é tomada como *objeto de estudo* buscando pela sua definição, por suas propriedades operacionais e pelas possíveis articulações entre elas, quando expressas por propriedades operacionais advindas da Aritmética.

Nessa fase de seu desenvolvimento, o elemento fundante de suas definições é sempre o conjunto munido de operações e propriedades operacionais, ou como Mac Lane (1986) prefere ao definir grupo como um conjunto equipado de três regras. Notem que aqui não são as regras que, quando satisfeitas, definem uma estrutura, como se a estrutura fosse descolada do seu fundo, o conjunto. Mas a estrutura é um conjunto; o que nos faz pensar que, nessa fase do desenvolvimento algébrico, há uma simbiose entre o conjunto e a estrutura que ele comporta e que ao mesmo tempo o constitui. Essa simbiose revela sentidos matemáticos originários de cada um dos conceitos, deixando um rastro de compreensões matemáticas que agora se unem em uma definição.

Podemos observar, no percurso do desenvolvimento das definições das estruturas da álgebra, esse rastro de compreensões matemáticas que, ao se articularem, revelam novas facetas expressas em novas linguagens, que muitas vezes, sintetizam ideias, camuflam seus pressupostos ou, em outras palavras, camuflam sentidos originários, fatos que levam o aprendiz a se ancorar em técnicas operatórias realizadas mecanicamente e, na pior das hipóteses, a limitar seu horizonte de compreensão da Matemática.

Uma das propriedades presentes nas definições atuais de corpo que mais nos chama atenção no quesito da camuflagem é a existência do inverso multiplicativo, porque ela traz em seu bojo os conceitos da lei do cancelamento, da não divisão por zero e da equivalência entre os dois.

A compreensão desses conceitos é de tal valia para o desenvolvimento das definições, que, segundo Milies (2004) em 1914, Abraham Fraenkel (1891-1965), em seu artigo "On the Divisor of Zero and the Decomposition of Rings", introduziu uma primeira caracterização axiomática da definição de anel, discutindo as propriedades dessa estrutura em termos de elemento regular. De acordo com Fraenkel,

> /.../ um anel é um conjunto sujeito a dez condições. As primeiras quatro, r1-r4, simplesmente especificam a respeito da operação dada "+" (chamada adição), é um grupo. A comutatividade da adição não é assumida. As seis condições restantes são:
> r 5 Há uma operação * chamada multiplicação;
> r 6. A multiplicação é uma operação associativa;
> r 7. contém o elemento identidade 1 a direita para a multiplicação;
> r 8. Elementos regulares de (ver abaixo) tem inversos multiplicativos;
> r 9. Para quaisquer existem elementos regulares e tal que e
> r. 10 A multiplicação satisfaz a propriedade distributiva à direita e esquerda sobre a adição. (Buton, Van, & Denovan, 1995, p.244, tradução nossa).

Chamamos a atenção para o item r 8 da definição de anel retroapresentada, onde é mencionado o elemento regular, compreendido como elementos do anel, que aludem à lei do cancelamento e que têm inverso multiplicativo. Entendemos que a compreensão dos sentidos matemáticos originários desses conceitos é importantíssima para a compreensão da extensão da estrutura de anel à estrutura corpo. Dessa forma, a atividade aqui apresentada foi construída buscando ressaltar os sentidos matemáticos, levando o aluno a compreender o processo de construção do corpo do conhecimento matemático, de como os conceitos vão se encaixando um nos outros como numa sinfonia orquestrada pelos sentidos matemáticos originários arquitetados pelos princípios da lógica.

3 A Construção do Conhecimento das Estruturas da Álgebra do Ponto de Vista da Lógica Clássica

A lógica, como entendida na Matemática, trabalha com *proposições* (asserções). Neste contexto, o que importa são os modos como elas podem ser produzidas e como podem denotar possíveis articulações de conceitos ou ideias matemáticas, assim como os modos como podem ser combinadas para preservar a verdade lógica e como essa pode ser validamente obtida de deduções a partir de hipóteses. A lógica escolhida irá estruturar a linguagem adotada para se referir a um domínio.[3] As suas suposições, em particular sobre os seus princípios, refletem-se em suposições sobre o domínio.

A lógica da Matemática aqui tratada é a *lógica clássica,* onde são válidos os três princípios para proposições: *Identidade*, *Não Contradição* e *Bivalência*.[4] Isso significa que uma proposição é uma asserção com a propriedade de ser igual a si mesma e para a qual podemos atribuir um, e apenas um, dos seguintes valores: ou verdadeiro ou falso, sem nenhuma outra possibilidade. Desse modo, o que se espera dos objetos nos domínios da Matemática é que: 1) se um objeto matemático tem uma certa propriedade, então essa propriedade se mantém; 2) se um objeto matemático tem uma certa propriedade, então não pode, simultaneamente, não a ter; e 3) se é possível que um objeto matemático tenha certa propriedade, então, decididamente, ou ele tem essa propriedade ou não a tem, sem outra possibilidade.

Partindo desses princípios, quando podemos afirmar *decididamente* se uma proposição é ou verdadeira ou falsa? Para *decidir* se uma proposição matemática é verdadeira ou falsa, é preciso de um *domínio de referência*, um *domínio matemático*, onde a proposição possa ser verificada. Para isso, é preciso que haja uma *teoria* sobre esse domínio, onde é estabelecida uma série de proposições postuladas como

3 Um domínio é uma coleção de objetos, aos quais a teoria em questão se refere. Para uma discussão mais pormenorizada do que será abordado, ver em Silva (1999) e Silva (2017).

4 Veja Mortari (2001). *Princípio da Identidade*: se uma proposição é verdadeira, então ela é verdadeira. Formalmente, pp. Ou, numa outra versão: todo objeto é idêntico a si mesmo, p(p=p). *Princípio de não contradição*: dada uma proposição e sua negação, pelo menos uma delas é falsa. Ou seja, ¬(p¬p). *Princípio da bivalência***:** toda proposição é ou verdadeira ou falsa. *Princípio do terceiro excluído*: dada uma proposição, pelo menos uma delas é verdadeira. Isto é, p ¬p. O princípio da bivalência implica o do terceiro excluído, mas a recíproca não é verdadeira em geral.

verdadeiras (*axiomas da teoria*) a partir das quais, novas proposições podem ser *deduzidas logicamente,* usando de regras lógicas preestabelecidas. Por exemplo, a proposição simples "A raiz de 2 é irracional" é uma proposição matemática acerca dos números (*o domínio estruturado*) e é uma proposição que podemos verificar ser *verdadeira,* já que, a partir dos axiomas da Aritmética (*a teoria*), pode ser *deduzida,* usando de regras oriundas da *lógica clássica* (*lógica*). Quando isso ocorre, diz-se que a proposição é um teorema da teoria.[5] Mais precisamente, um *teorema de uma teoria T* é entendido como sendo uma proposição que é uma conclusão de um argumento válido (comumente se diz também que é todo o argumento), sendo que as hipóteses desse argumento são proposições deduzidas dos axiomas da teoria. A explicitação dos passos dessa inferência é uma *demonstração*, cujo desenvolvimento se dá tão somente por meio de regras lógicas preestabelecidas e de proposições validadas pela teoria.

Ocorre na Matemática que certos domínios são estruturados. Por exemplo, o conjunto dos inteiros, , munido com uma soma "", determina um domínio estruturado . Também o conjunto das classes de restos, , munido com uma soma "", determina um domínio estruturado . Partindo tanto de , quanto de , um mesmo domínio formal , chamado grupo, pode ser formalmente abstraído, sendo "" uma operação binária satisfazendo certas propriedades que dizem respeito à estrutura em comum abstraída.[6] A teoria de grupo formal G do domínio formal é a coleção de todas as proposições verdadeiras sobre , expressas na linguagem matemática e deduzidas, a partir dos axiomas, pela lógica estabelecida. Do mesmo modo, notando por exemplo que os conjuntos e também podem ser munidos de um produto "", um mesmo domínio formal , chamado anel, pode ser formalmente abstraído, agora com duas operações binárias "" e "". A coleção de todas as proposições verdadeiras sobre o domínio formal , também expressas na linguagem matemática e deduzidas, a partir dos axiomas, pela lógica estabelecida, é a teoria formal de anel A.

Alguns desenvolvimentos da Matemática contemporânea tratam de questões sobre domínios formais mais gerais, que poderiam definir uma formalização em comum para e , assim como sobre teorias formais mais gerais que poderiam definir uma formalização em comum para G e A.[7] A noção central é que os domínios matemáticos e as teorias sobre eles sempre podem ser formalizados. Ou seja, os domínios e as teorias formais são eles próprios objetos de estudo, sendo a *formalização*, portanto, o ato predominante na construção do corpo do conhecimento matemático.

No que segue, será discutida uma demonstração de um conhecido teorema matemático, o qual foi utilizado ao se desenvolver as etapas da atividade descrita neste artigo, tal como explicitado na terceira etapa da atividade, item 2.5. O objetivo da discussão é esclarecer os aspectos formais que estão na base da argumentação matemática, assim como explicitar o próprio processo de formalização da linguagem e dos domínios na Matemática, mais especificamente dentro do contexto das estruturas algébricas. Com isso em vista, começamos explicitando algumas definições.

Um anel é um domínio munido com operações binárias "" (a "adição") e "" (o "produto") satisfazendo: (a) é fechado para adição; (b) a adição é comutativa; (c) a adição é associativa; (d) existe um elemento neutro com relação à adição; (e) para cada elemento existe um elemento que é inverso aditivo; (f) é fechado para o produto; (g) o produto é associativo; (h) o produto é distributivo (à direita e à esquerda) em relação à adição.

A partir dos axiomas, é possível demonstrar que: (a') para todos , se então ; (b') para todo , e ; (c') para todos . Esses são resultados oriundos da definição e dos axiomas, ou seja, das proposições na teoria de anel, e são demonstrados usando a linguagem matemática ancorada na lógica clássica.[8]

Para um anel , caso se possa verificar a propriedade de comutatividade para a multiplicação, se diz que é *anel comutativo*; caso se possa verificar a existência do elemento neutro da multiplicação, se diz que é *anel com unidade*; e caso se possa verificar que não existem divisores de zero, se diz que é *domínio de integridade*. Um elemento não nulo de é *regular* quanto à multiplicação, quando o resultado da operação produto dele com qualquer outro elemento do conjunto é único.

Proposição (*). Seja um anel[9] comutativo com unidade. O anel é um anel de integridade se, e somente se, todo elemento não nulo de é regular quanto à multiplicação.

() Suponha que o anel comutativo, com unidade é um domínio de integridade. Seja um elemento não nulo. Mostraremos que é um elemento regular. Sejam . Então

5 A noção de *dedução* pressupõe uma definição de valoração sobre as proposições, que depende de como elas se conectam e de como podem ser operadas. Como se sabe, os conectivos lógicos usuais da lógica clássica são "*não*", "*e*", "*ou*" e "*Se...então...*". A partir desses conectivos, formam-se as proposições compostas, cujos possíveis valores-lógicos dependem das possíveis combinações dos valores-lógicos das proposições moleculares que se conectam e que as compõem. A noção de *inferência* (ou de *consequência lógica*, ou ainda, de *argumento válido*) tem por base a condicional "Se... então..." onde se acrescenta que, se for verdade o condicionante, então o condicionado também é verdade, independentemente dos valores-lógicos das proposições moleculares. Por exemplo, o *Modus Ponens* ou qualquer uma das suas interpretações: Se p e p → q então q.

6 "Os números inteiros, por exemplo, têm uma estrutura de grupo. No entanto, não é um domínio formal, esse diz respeito às relações de objetos que independem da natureza do objeto."

7 Por exemplo, a Álgebra Universal, a Teoria dos Modelos e a Teoria das Categorias. Veja Kluth (2015).

8 As duas últimas proposições estão demonstradas na segunda etapa da atividade elaborada.

9 Notemos que usualmente nas definições refere-se ao anel A e não à terma (A, +,.).

$x \cdot y = x \cdot z \;\Rightarrow\; x \cdot y + (-x \cdot z) = x \cdot z + (-x \cdot z)$ (por (a'))
$\Rightarrow\; x \cdot y + (-x \cdot z) = 0$ (por (e))
$\Rightarrow\; x \cdot y + x \cdot (-z) = 0$ (por (c'))
$\Rightarrow\; x \cdot (y + (-z)) = 0$ (por (h))
$\Rightarrow\; x = 0$ *ou* $y + (-z) = 0$ (pois A é um domínio de integridade)
$\Rightarrow\; y + (-z) = 0$ (pois, por hipótese, $x \neq 0$)
$\Rightarrow\; y + (-z) + z = 0 + z$ (por (a'))
$\Rightarrow\; y = z$ (por (d) e (e))

Temos demonstrado que "dado um elemento não nulo , quaisquer que sejam , se então ". Analogamente, demonstra-se que "dado um elemento não nulo , quaisquer que sejam , se então ". Portanto, é regular quanto à multiplicação.

() Suponha que todo elemento não nulo de é regular quanto à multiplicação. Seja não nulo. Seja . Então

$x \cdot y = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot y = x \cdot 0$ (por (b'))
$\Rightarrow\; y = 0$ (pois x é regular)

Temos demonstrado que "dado um elemento não nulo , qualquer que seja , se então ". Analogamente, demonstra-se que "dado um elemento não nulo , qualquer que seja , se então ". Portanto, é um domínio de integridade.

Outras estratégias para a demonstração, claro, podem ser usadas. Por exemplo, uma vez que é comutativo, as demonstrações omitidas (indicadas como análogas) não precisam ser desenvolvidas da mesma maneira, pois basta comutar os produtos e o caso se reduz ao anterior.

O Quadro 1 pode ser adequado para compreensão mais didática das passagens. Por exemplo, suponha que é um domínio de integridade (Hipótese H). Deduzimos via tabela que todo elemento de é regular.

Quadro 1 - Inferência da Lógica na Demonstração Matemática

Proposições	**Justificativa**	**Tipo**
Sejam $x \in A - \{0\}$ e $y, z \in A$ tais que $x \cdot y = x \cdot z$.		P_1
Se $x \cdot y = x \cdot z$ então $x \cdot y + (-x \cdot z) = x \cdot z + (-x \cdot z)$;	por (a')	$P_1 \to P_2$
Então $x \cdot z + (-x \cdot z) = x \cdot z + (-x \cdot z)$	M.P.	P_2
Se $x \cdot y + (-x \cdot z) = x \cdot z + (-x \cdot z)$ então $x \cdot y + (-x \cdot z) = 0$	por (e)	$P_2 \to P_3$
Então $x \cdot y + (-x \cdot z) = 0$	M.P.	P_3
Se $x \cdot y + (-x \cdot z) = 0$ então $x \cdot y + (x \cdot (-z)) = 0$	por (c')	$P_3 \to P_4$
Então $x \cdot y + (x \cdot (-z)) = 0$	M.P.	P_4
Se $x \cdot y + (x \cdot (-z)) = 0$ então $x \cdot (y + (-z)) = 0$	por (h)	$P_4 \to P_5$
Então $x \cdot (y + (-z)) = 0$	M.P.	P_5
Se $x \cdot (y + (-z)) = 0$ então $x = 0$ ou $y + (-z) = 0$	por H	$P_5 \to P_6$
Então $x = 0$ ou $y + (-z) = 0$	M.P.	P_6
Se $x = 0$ ou $y + (-z) = 0$ então $y + (-z) = 0$;	por P_1	$P_6 \to P_7$
Então $y + (-z) = 0$;	M.P.	P_7
Se $y + (-z) = 0$ então $y + (-z) + z = 0 + z$	por (a')	$P_7 \to P_8$
Então $y + (-z) + z = 0 + z$	M.P.	P_8
Se $y + (-z) + z = 0 + z$ então $y + (-z) + z = z$	por (d)	$P_8 \to P_9$
Então $y + (-z) + z = z$	M.P.	P_9
Se $y + (-z) + z = z$ então $y = z$	por (e)	$P_9 \to P_{10}$
Então $y = z$;	M.P.	P_{10}

Fonte: os autores.

Nas passagens, em cada passo, foi usado o *Modus Ponens* (M.P.): P_i   (P_i→P_(i+1)) P_(i+1)

Cada condicional é verdadeira ou segundo a teoria, ou segundo proposições já demonstradas no esquema demonstrativo ou segundo as hipóteses. Segue que, supondo que seja um domínio de integridade, tem-se u seja, se e são tais que , então , em outras palavras, todo elemento não nulo de é regular.

Considerando apenas os aspectos formais, evitando ao máximo o uso de conteúdos materiais na linguagem das proposições, e usando o simbolismo que é muito difundido na Matemática, é possível repetir as definições e os enunciados acima, assim como a demonstração da Proposição (*), usando uma linguagem puramente formal. A seguir, será apresentado o enunciado dessa Proposição numa linguagem mais formal.

Seja **A,** a teoria associada ao anel comutativo com unidade , ou seja, a coleção de todas as proposições verdadeiras sobre deduzidas pelas regras lógicas (da lógica clássica) a partir dos axiomas dados . As proposições e , por exemplo, são proposições em . Demonstrar uma condicional é demonstrar que a tese pode ser deduzida das hipóteses por meio das regras lógicas e por proposições em **A.** Simbolicamente, se é o tal conjunto de hipóteses e é a tal tese, então se denota por **A** que, quando do conjunto de proposições A é possível inferir a proposição , ou seja, se existe uma demonstração para , isto é, uma sequência de proposições deduzidas a partir de A tal que (ou na notação). As noções de integridade e regularidade, na linguagem formal, são dadas respectivamente por:

$$\psi :\; \forall yz(y \cdot z = 0 \;\rightarrow\; y = 0 \;\vee\; z = 0)$$
$$\phi :\; (\forall x \in A - \{0\})(\forall yz)(x \cdot y = x \cdot z \rightarrow y = z)$$

Com essas notações, a Proposição (*) acima pode ser enunciada assim:

$$\mathrm{A} \cup \{\psi\} \vdash \phi \quad \text{e} \quad \mathrm{A} \cup \{\phi\} \vdash \psi$$

Como se nota, a teoria A associada ao anel comutativo com unidade, , acrescida de hipóteses, fornece uma teoria mais ampla, onde novas proposições são verdadeiras.

Uma demonstração pode privilegiar a linguagem formal ou a linguagem natural. No entanto uma demonstração pode ser adequada a uma mistura de ambas as linguagens de modo a não omitir os aspectos formais (pelo uso excessivo da linguagem natural) e nem ser incompreensível ao leigo em Matemática (pelo uso excessivo da linguagem formal e a omissão de passagens).

4 Descrição da Atividade e seus Fundamentos Matemáticos

A atividade apresentada neste trabalho como anexo visa um contato gradativo do aluno da licenciatura com algumas das estruturas algébricas; partindo-se da estrutura de anéis, a teoria progride lentamente até chegar à estrutura dos corpos. Assim, a atividade foi organizada em três etapas: Apresentação e interpretação da estrutura dos anéis; Compreender a utilização das propriedades de anéis: Fundamentos para a extensão desta estrutura; Extensão da estrutura de anéis para a estrutura de corpo.

Para a primeira e a segunda etapa, optamos pelas definições de Herstein (1988) e Gonçalves (2012). A escolha foi pautada no fato de que ambos os livros desses autores fazem parte da ementa dos cursos de Licenciatura em Matemática, além de apresentarem definições que permitem explorar uma ampla gama de exemplos que podem facilitar a compreensão da definição das estruturas algébricas pelos alunos, contribuindo na edificação teórica que parte da estrutura de anel até a estrutura de Corpo.

Cientes de que na literatura encontram-se diversos modos de definir a estrutura de anel, que se diferem na composição do conjunto de axiomas, para nossa proposta, foi muito importante a escolha da definição, pois dependendo dos axiomas exigidos por ela, conjuntos de grande interesse para a formação matemática do licenciando, como Zn; as matrizes e os quatérnios não seriam um anel, caso fosse exigida a regra da cumulatividade e do elemento unidade da multiplicação, como acontece na definição dada por Lang (2002) e Hefez (2014). Pondo a referência, não é importante para nosso trabalho a definição, pois não vamos utilizá-la.

A etapa Apresentação e interpretação *da* estrutura dos anéis nos itens 1); 2); 3); 4); 5); 6); 7) 8); e 9) compõe-se do preenchimento de várias tabelas sobre as propriedades operacionais dos conjuntos numéricos naturais, inteiros, N, Z e de perguntas que suscitam reflexões sobre a incidência das operações nos diversos conjuntos no sentido de que o aluno possa compreender que, apesar de serem os conjuntos cujos elementos tenham natureza numérica diferente, algumas propriedades operacionais são comuns e outras distintas. No item 10), apresentamos a definição de anel de Herstein (988). No item 11), do mesmo modo que adotado anteriormente, a atividade propicia situações e coloca perguntas que suscitam uma reflexão direcionada à compreensão da definição, ressaltando que o foco dessa reflexão não se funda na natureza dos elementos do conjunto, mas sim em suas propriedades operacionais e, mais ainda, que se pode falar da propriedade operacional sem conhecer seu *modus operandi.* Dessa forma, desloca-se o foco, tanto da natureza do elemento, quanto do modo como ele opera. Basta saber que as operações existem no conjunto.

Na etapa dois, intitulada ¨Compreender a utilização das propriedades de anéis: Fundamentos para a extensão desta estrutura¨, pretende-se, em primeiro lugar, que o aluno perceba os modos de expressar ideias matemáticas, comparando a definição dada anteriormente com um novo modo de definir a estrutura de anéis dada por Gonçalves (2012), que introduz o conceito de operação como função, no qual está implícita a lei do fechamento presente na definição anterior. Faz também parte dessa etapa o uso das regras de anéis para a sua teorização e extensão. Ou seja, que com base nas regras (propriedades para alguns, axiomas para outros), pode-se chegar a novas afirmações reveladoras que confirmam procedimentos conhecidos pelos alunos somente em seus aspectos técnicos operacionais. Como por exemplo: Seja (A, +, .) um anel, qualquer que seja a, b pertencente a A; a.0 = 0; -(-a) = a;a.(-b)=-(a.b) etc.

Dessa forma, a partir dos axiomas, se exibem as propriedades definidoras da estrutura de anel, que por sua vez, servem como base para acrescentar novas propriedades e expandir essa estrutura, levando a classificar as estruturas de anel de acordo com as propriedades que as satisfazem. Assim, por exemplo, anel com divisores de zero, anel sem divisores de zero, anel com divisão etc.

Todas estas definições preparam o cenário para a terceira etapa intitulada "Extensão da estrutura de anéis para a estrutura de Corpo" que, entre outras finalidades, esclarecerá o caminho matemático para chegar à lei do cancelamento e às condições iniciais nela implícita, que se escondem na sua usual expressão, no entanto perpassam estudos da junção de anéis comutativos, anéis com unidade e o conceito fundamental que diz respeito a anéis comutativos sem divisores de zero. Todas essas passagens do desenvolvimento matemático são trabalhadas na atividade e fica então estabelecida uma via de esclarecimento da inclusão de axiomas na definição de anéis que se estende à definição de corpo.

5 Considerações Finais

Ao refletirmos sobre o processo de estudos e pesquisa vivido por nós, autores da atividade apresentada, nos surpreendemos ao depararmos com conceitos adormecidos em nossas lembranças, pois, ao se adotar um livro para a condução de uma disciplina, passamos, quase que inadvertidamente, a segui-lo em sua organização, de certa forma, anestesiados pela certeza de que ali estão registradas verdades, sem nos preocuparmos com os aspectos escondidos na articulação linguística e no ´como´ essa linguagem está impregnada de uma lógica que rege, não somente à permanência de verdades, mas que também conduz as articulações entre as afirmações matemáticas, embora carregadas e transmissora de conhecimento matemático.

Percebemos que o preparo de um conteúdo matemático a ser ensinado não se reduz definitivamente à apresentação de definições, à explicação de passos de uma demonstração e à escolha de exercícios que promovam o entendimento do já dito, é preciso ir além. É preciso tomar consciência da finalidade matemática do objeto matemático para o desenvolvimento desse corpo de conhecimento.

Desvelamos, nesse quesito, a importância de se conhecer a finalidade da demonstração neste momento de formalização matemática, quando a estrutura anel é tomada como um objeto de estudo da própria álgebra, porque é por meio dela que se tece uma rede de sustentação que conserva a permanência de verdades matemáticas no avanço das teorias e na articulação entre elas. A demonstração, assim compreendida, pode levar a uma compreensão mais ampla da estrutura anel. Esta traz em seu bojo a centelha de seu porvir, de sua articulação com outras estruturas algébricas. Podemos assim afirmar que a teoria se formaliza também através dela, apoiada na lógica tida como uma sintaxe de uma linguagem plena de sentido matemático.

Entendemos que a construção da atividade, ao considerar aspectos do desenvolvimento da própria teoria, proporcionou situações de ensino abertas a compreensões próprias do corpo do conhecimento matemático e de como seus resultados são articulados. A atividade direciona a compreensão da definição das estruturas por uma vereda onde fica exposta uma possível origem das estruturas da álgebra apoiada nas propriedades operacionais dos números e dos domínios que ali vão sendo revelados.

Para além disto, ao se esmiuçarem as demonstrações em termos do uso das propriedades operacionais que realizam as passagens de uma asserção a outra, conservando os sentidos matemáticos, abre-se a possibilidade de o aluno perceber o como se dá a junção lógica clássica e matemática.

Essa abertura propiciada pela historicidade do objeto estrutura da álgebra pode levar o aluno a uma compreensão sobre Matemática que o liberte do pensamento calculista para um pensamento meditativo, que não só se aplica no fazer matemática do matemático, como também pode ter sua imagem no ensinar Matemática, ação executada pelo professor de Matemática, na intenção de que o aluno apreenda o pensar matemático de forma genuína.

Para concluir, o processo vivenciado durante o estudo, a pesquisa e a elaboração da atividade possibilitaram rever, repensar e refletir sobre aspectos relevantes, tanto no que diz respeito ao objeto de estudo, quanto aos sujeitos que participarão da atividade. Uma jornada que se abre já descortinando futuras dificuldades relativas ao cumprimento de ementas elaboradas com outros propósitos como aqueles direcionados num fazer técnico.

Depois desse passeio pela historicidade matemática das estruturas da álgebra, ficam-nos muitas perguntas latentes, que só poderão vir à tona, quando nos defrontarmos com o que essa atividade pode despertar, de fato, no aluno. Esta será nossa próxima empreitada.

Referências

Corry, L. (1996) Modern algebra and the rise of mathematical structures. Berlin: Birkhäuser.

David, M. Burton & Denovan, H. Van Osdol. (1995) Toward the definition of an abstract ring. In: F., Swetz, J., Fauvel, O. Bekken, B. Johansson. & V. Katz. Learn from the masters! (p. 241-252 Cambridge University Press.

Gonçalves, A. (2012). Introdução à álgebra*.* Rio de Janeiro: IMPA.

Hefez, A. (2014). Curso de álgebra. Rio de Janeiro: IMPA.

Herstein I.N. (1988) Álgebra Abstracta. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Husserl, E. (1997) Die Urstiftung und das problem der dauer. Der Ursprung der Geometrie. In: Steiner, Uwe C. Husserl. (p.437-464) Munchen: Diederichs.

Kluth, V.S**.** & Bicudo, M.A.V. (2020). Research procedures to understand algebraic structures: a hermeneutic approach. Mathematics Teaching, 12, 211-224.

Kluth, V.S. (2017) Estrutura da álgebra: uma investigação fenomenológica. Saarbrücken: Novas Edições Acadêmicas.

Kluth, V.S. (2005) Estruturas da álgebra - Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento*.* Rio Claro: Unesp. Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Kluth, V.S. (2000). A Rede de Significados: Imanência e transcendência: a Rede de Significação. In: M.A.V., Bicudo. Fenomenologia: Confrontos e avanços. (pp.105-140) São Paulo: Cortez.

Lang, S. (2002) Álgebra. New York: Springer.

Mac Lane, S. (1986). Mathematics form and function. New York: Springer.

Milies, F.C.P. (2004). Breve história da Álgebra Abstrata. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática-SBM. Salvador, Universidade Federal da Bahia.

Mortari, C.A. (2001*).* Introdução à lógica, São Paulo: UNESP.

Silva, J.J. (1999). Husserl's Conception of Logic. Manuscrito, 2, 367-397.

Silva, J.J. (2017). Mathematics and its applications, a transcendental-idealist perspective. Springer.

Wussing, H. (1989). Lecciones de historia de las matemáticas. México: Siglo XXI de España.

Propriedades dos números complexos	Soma α,β,γ∈C; α=**a+bi; β=c+di; β=e+fi**	Produto ∀a,b,c∈C
Fechamento	*a,b ∈ C implica que a+b ∈ C*	*a,b ∈ C implica que a.b ∈ C*
Associativa	(α+β)+γ = α+(β+γ)	(α.β).γ = α.(β.γ)
Elemento neutro	*∃(0+0i) ∈ C denotado por **(0+0i)**= O tal que : a + O = O + a = a*	
Comutatividade	*(α+β)=(β+α)*	
Elemento Inverso aditivo	$\forall \alpha \in C\ \exists\ \beta \in C$*único, denotado por* $\beta=(-\alpha)$ *tal que:* $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$	
Distributiva à esquerda e à direita	α(β+γ)=αβ+αγ (β+γ)α=βα+γα	

Propriedades dos números inteiros	Soma ∀a,b,c∈Z	Produto ∀a,b,c∈Z
Fechamento	*a,b ∈ Z implica que a+b ∈ Z*	*a,b ∈ Z implica que a.b ∈ Z*
Associativa	*(a+b)+c=a+(b+c)*	*(a.b).c = a.(b.c)*
Elemento neutro	*∃0∈Z tal que a + 0= 0 + a = a*	
Comutatividade	*(a+b) = (b+a)*	
Elemento inverso	$\forall a \in Z\ \exists\ b \in$ *Z único, denotado por* $b=(-a)$ *tal que:* $a + (-a) = (-a) + a = 0$	
Distributiva à esquerda e à direita	*a.(b+c)= a.b +a.c (b+c).a = b.a +c.a*	

Propriedades dos inteiros módulo n	Soma $\forall \underline{a},\underline{b},\underline{c} \in Z_n$	Produto $\forall \underline{a},\underline{b},\underline{c} \in Z_n$
Fechamento	$\underline{a},\underline{b} \in Z_n$ *implica que* $\underline{a}+\underline{b} \in Z_n$	$\underline{a},\underline{b} \in Z_n$ *implica que* $\underline{a}.\underline{b} \in Z_n$
Associativa	$(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c} = \underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$	$(\underline{a}.\underline{b}).\underline{c} = \underline{a}.(\underline{b}.\underline{c})$
Elemento neutro	$\exists\ \underline{0} \in Z_n$ *tal que* $\underline{a}+\underline{0} = \underline{0}+\underline{a} = \underline{a}$	
Comutatividade	$(\underline{a}+\underline{b}) = (\underline{b}+\underline{a})$	
Elemento inverso	$\forall \underline{a} \in Z_n\ \exists\ \underline{b} \in Z_n$*único, denotado por* $\underline{b}=(-\underline{a})$ *tal que:* $\underline{a}+(-\underline{a}) = (-\underline{a})+\underline{a} = \underline{0}$	
Distributiva à esquerda e à direita	$\underline{a}.(\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a}.\underline{b}+\underline{a}.\underline{c}$ $(\underline{b}+\underline{c}).\underline{a} = \underline{b}.\underline{a}+\underline{c}.\underline{a}$	

10) Pelo fato de que conjuntos diversos, não só os numéricos, podem satisfazer um mesmo grupo de propriedades, dizemos que esses conjuntos têm uma mesma estrutura, por exemplo, a estrutura de anel. Dessa forma, ao se definir a estrutura de anel, nos referimos a um conjunto com duas operações, que satisfaz certas propriedades com relação a essas operações. Por abuso de linguagem, dizemos que o conjunto é um anel. Leia a definição de anel: um anel é um conjunto não vazio A, no qual podem se definir duas operações "+" e "." Tais que: (i) a,b ∈ A implica que a+b ∈ A; (ii) a+b = b+a, para a,b ∈ A; (iii) (a+b)+c = a+(b+c), para a,b,c ∈ A; (iv) Existe um elemento 0 ∈ A tal que a + 0 = a para todo a ∈ A. (v) Dado a ∈ A, existe b ∈ A tal que a+b = 0 (b será denotado por -a); (vi) a,b ∈ A implica que a.b ∈ A; (vii) (a.b).c = a.(b.c), para a,b,c ∈ A ; (viii) a.(b+c) = a.b + a.c e (b+c).a = b.a + c.a para a,b,c ∈ A.
Observação: Costuma-se denotar as operações do conjunto A, pelos símbolos usuais " +" , ". " , porém, no conjunto A, podem ser definidas duas operações diferentes das usuais, assim por exemplo, no conjunto dos reais, podemos definir a operação "+ " como a soma usual de reais e a operação "." como sendo $a.b = a^2b$, para a, b reais.
11) Responda às seguintes perguntas referentes à definição acima:

a) O que significa para você a frase da definição: ¨Seja um conjunto não vazio?”
b) Considere o conjunto A formado pelos reais e defina, em A, as operações de “+"," ."onde “+” é a soma usual entre reais e “.” é definida como $a.b = a^2 b$ para a, b reais, podemos concluir que A não é um anel. Qual propriedade você acha que não é satisfeita? Por quê?
c) Posso definir uma operação sem ela estar relacionada a um conjunto? Por quê?
d) Na definição de anel, qual é a propriedade que diz respeito ao conceito de um conjunto fechado com relação às operações nele definidas?
e) Leia a expressão matemática: (a + b) + c = a + (b + c) p/ a, b e c pertencentes ao conjunto A. O que essa expressão diz para você em termos operacionais?
f) O que significa a expressão a + 0 = a?
g) Você saberia explicitar a importância da existência do 0 para a operação de soma e suas propriedades?
h) Considere a veracidade das expressões: a. (b + c) = a.b + a.c, (a + b) . c = a.c + a.b . Como você interpreta a expressão pensando nas operações e suas propriedades?
i) Sendo $\alpha = a + bi$ um elemento dos complexos, qual é seu inverso aditivo?
j) Depoimento do aluno sobre suas vivências nesta fase:
Descreva com palavras e expressões matemáticas como chegou às respostas das perguntas, destacando as articulações e os procedimentos que utilizou.

II - COMPREENDER A UTILIZAÇÃO DAS PROPRIEDADES DE ANÉIS: FUNDAMENTOS PARA A EXTENSÃO DESSA ESTRUTURA

1) Como já visto, a estrutura de anel é composta por um conjunto não vazio, no qual possam ser definidas duas operações, a partir das quais, os elementos do conjunto satisfazem a propriedade do fechamento e determinadas propriedades operacionais. Como os anéis se referem a vários tipos de conjuntos, ou seja, não são somente aplicáveis aos conjuntos numéricos e suas operações de soma e produto, nos referimos às operações como funções que conservam a propriedade do fechamento, independentemente da lei que rege a operação, agora pensada como função, conforme a definição que segue. Definição: seja A um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, as quais chamaremos de soma e produto em A e denotaremos (como em Z) por + e .
Assim, + : AxA → A. (x,y) então a+b
Chamamos (A, +, .) um anel, se as seguintes seis propriedades são verificadas quaisquer que sejam $a, b, c \in A$.
A1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa da soma)
A2) $\exists\ 0 \in A\ tal\ que\ a + 0 = 0 + a = a$ (existência de elemento neutro para a soma)
A3) $\forall\ x \in A\ existe\ um\ único\ y \in A, denotado\ por\ y = -x, tal\ que\ x + y = y + x = 0$
(existência de inverso aditivo)
A4) $a + b = b + a$ (comutatividade da soma)
A5) $a.(b.c) = a.(b.c)$ (associativa de produto)
A 6) $a.(b + c) = a.b + a.c$; $(a + b)c = a.c + b.c$ (distributiva à direita e à esquerda)
(Gonçalves, 1999, p.34)
2) Leia a definição com atenção e compare-a com a definição dada anteriormente (item 10). Você nota alguma diferença? Qual?
3) Leia as afirmações e suas demonstrações, justifique as passagens solicitadas.
3.1) Seja (A, +, .) um anel . $\forall\ a \in A$, tem-se que a.0 = 0
Dica: Como $a \in A$ e (A, +,.) é anel, todas as propriedades operacionais são válidas, portanto, podemos usá-las para demonstrar a afirmação.
Demonstração:
Como $a.0 + a.0 =^1 a(0 + 0) =^2 a.0 =^3 a.0 + 0$.
Comparando o primeiro e o último termo da cadeia de igualdades acima, temos que
$a.0 + a.0 = a.0 + 0$ segue que ^{4} a.0 = 0
Justifique as passagens, indicando as propriedades de anel.
$=^1$ foi utilizada a propriedade ....;
$=^2$ foi utilizada a propriedade ....;
$=^3$ foi utilizada a propriedade ....;
$=^4$ foi utilizada a propriedade ....
3.2) Leia a demonstração de: - (-a)=a.
O inverso aditivo de um inteiro a é o inteiro (único) x que satisfaz a equação
$a + x = 0$, e x é denotado por $-a$, isto é, $x = -a$.
Observe que a satisfaz a equação (*)$(-a) + a = 0$, portanto, a é o inverso aditivo de (-a), porém o inverso aditivo de (-a) é o inteiro que satisfaz a equação (-a) + x = 0, denotado por x= -(- a), isto é,
(**)$(-a) + (-(-a)) = 0$
Segue então das equações (*) e (**) e da unicidade do elemento oposto que

- (-a)=a.

3.3) Se (A, +, .) é anel, então, $\forall a, b \in A$ tem-se $a.(-b) = (-a).b = -(a.b)$

Temos de mostrar que:

1) $a.(-b) = -(a.b)$

Da equação $(a.b) + a(-b) =^1 a.(b + (-b)) =^2$ a. $0 =^3 0$

Segue que $a(-b)$ é o inverso aditivo de $(a.b)$, ou seja,

$a.(-b) = -(a.b)$

Justifique

$=^1$...............

$=^2$ ....

$=^3$ ....

2) $(-a).b = -(a.b)$

Da equação $(a.b) + (-a).b =^1 (a + (-a)).b =^2 0.b =^3 0$

Segue que $(-a).b$ é o inverso aditivo de $(a.b)$, ou seja

$(-a).b = -(a.b)$

Justifique

$=^1$...............

$=^2$ ....

$=^3$ ....

Conclua a demonstração pelos itens 1) e 2)

3.4) Se A, +, . é anel, então, $\forall a.b \in A$ tem-se $(-a)(-b) = ab$

Agora é com você. Demonstre.

Dica: agora, não só as propriedades que definem uma estrutura de anel podem ser utilizadas, mas também os resultados decorrentes delas.

4) Aos anéis são acrescentadas outras propriedades que vão alargando o domínio da estrutura de anéis. Vejam as definições subsequentes:

4.1) Seja (A, +,.) um anel, caso possa ser verificada a propriedade de comutatividade da multiplicação, dizemos que (A, +, .) é *anel comutativo*. $\forall\, x, y \in A, x.y = y.x, dizemos\ que\ o\ anel$ é $comutativo$ *(Gonçalves, 1999, p. 34)*

4.2) Seja (A, +,.) um anel, caso possa ser verificada a existência do elemento neutro da multiplicação, dizemos que (A, +, .) é *anel com unidade 1*.

$\exists\, 1 \in A,\ 1 \neq 0,\ tal\ que\ x.1 = 1.x = x\ \forall x \in A.$ *Dizemos que (A, + , .) é um anel com unidade 1. (Gonçalves, 1999, p. 34)*

4.2.1) Leia as afirmações e suas demonstrações e justifique as passagens solicitadas.

4.2.1.1) Seja (A, +, .) um anel com unidade 1. Então para todo $a \in A$, $(-1)a = -a$

Dica: para demonstrar o lema, parta da expressão $a + (-1)a =$ .... Desenvolva a expressão utilizando-se das seguintes propriedades de (A, +,.): elemento unidade; distributiva; elemento neutro da soma. Você chegará à seguinte expressão: $a + (-1)a = 0$; o que implica que $(-1)a$ é o oposto aditivo de a e portanto: $(-1)a = -a$

Agora é sua vez. Demonstre.

4.2.1.2) Seja (A, +, .) é anel com unidade, elemento unidade 1, então $(-1)(-1) = 1$

Dica para demonstrar: utilize-se da demonstração acima (3.4) e faça-a para o caso particular a=b=(-1).

Lembrete: a abordagem das estruturas nos possibilita operar com números negativos e o zero com uma grande liberdade, pois esclarece a validade das famosas regras dos sinais que conhecemos desde sempre.

4.3) Leia as definições seguintes:

4.3.1) (A, + , ·) é um anel comutativo se para todo $x, y \in$ A, $x.y = y.x$

4.3.2) Se (A, + , ·) é um anel comutativo, então a$\neq 0 \in (A, +, \cdot)$ $é\ dito\ um\ divisor\ de\ zero\ se\ existe\ um\ b \neq 0, tal\ que\ ab = 0.$

Caso esta afirmação não seja válida, temos que o anel comutativo não tem divisores de zero. (Tópicos de álgebra. i. Herstein, 1964, pág. 107)

5) Depoimento do aluno sobre suas vivências nesta fase:

Descreva com palavras e expressões matemáticas como chegou às respostas das perguntas ou dos desafios colocados, destacando as articulações e procedimentos que utilizou para compreendê-los e resolvê-los.

III - EXTENSÃO DA ESTRUTURA DE ANÉIS PARA A ESTRUTURA DE CORPO

Introdução: para compreendermos a expansão da estrutura de anéis a outras estruturas mais abrangentes em termos de propriedades operacionais, é necessário aprofundarmos os estudos da junção de anéis comutativos, anéis com unidade e o conceito fundamental que diz respeito a anéis comutativos sem divisores de zero. Ou seja: $(A, +, .)$ é $anel.\ \ Se\ x, y \in A,\ \ x.y = 0, então\ x = 0\ ou\ y = 0.$

$Neste\ caso, dizemos\ que\ (A, +, .)\ é\ um\ anel\ sem\ divisores\ de\ zero.$ (GONÇALVES, 1999, p. 34)
1) Leia a definição consecutiva e responda às perguntas:
Definição: um anel A, comutativo e com unidade, onde é verdadeira a seguinte frase
$(\forall a, b\ \in A)(a.b = 0\ \rightarrow a = 0\ ou\ b = 0)$ recebe o nome de anel de integridade. (HIGINO, 1982, p. 140) Observação: Anel de integridade também é conhecido como domínio de integridade.
1.1) $(\forall a, b\ \in A)(a.b = 0\ \rightarrow a = 0\ ou\ b = 0\ )$ é sempre verdadeira nas estruturas de anel? Para responder, procure exemplos no anel Z_n.
1.2) Considerando o anel A= Z_n, a condição de A ser um anel sem divisores de zero é necessária na definição de anel?
1.3) Você conhece algum conjunto numérico no qual a condição: anel sem divisores de zero, é válida?
2) Considere o anel dos inteiros Z: (i) Lembre que este anel é comutativo; (ii) com unidade 1; (iii) $(\forall a, b\ \in A)(a.b = 0\ \rightarrow a = 0\ ou\ b = 0)$, **
Esta última propriedade garante que todo elemento em Z é regular, isto é,
$(\forall\ \ a \in\ Z)(\ a \neq 0\ e\ ab = ac\ \rightarrow\ b = c)$. Mostremos que todo elemento em Z é regular: Seja $a \neq 0, a \in Z$, se $ab = ac$ então $ab - ac = 0$, segue da propriedade distributiva que $a(b - c) = 0$, como $a \neq 0$ da propriedade** segue que $(b - c) = 0$ logo $b = c$
3) Estude o enunciado da proposição que segue:
Proposição: um anel A, comutativo com unidade, é um anel de integridade se, se somente se, todo elemento não nulo de A é regular quanto à multiplicação, isto é,
$(\forall\ , a \in A\ )(\ a \neq 0\ e\ ab = ac\ \rightarrow b = c)$.
2.1) Como você entende o enunciado da proposição?
2.2) A demonstração terá ida e volta? Por quê?
2.3) Qual é a condição inicial (hipótese) para se demonstrar a ida do teorema?
2.4) Qual é a condição inicial para se demonstrar a volta do teorema?
2.5) Estude a seguinte demonstração, completando ou explicitando o solicitado.
Proposição: um anel A, comutativo com unidade, é um anel de integridade se, se somente se, todo elemento não nulo de A é regular quanto à multiplicação, isto é, $(\forall\ a \in A\ )(\ a \neq 0\ e\ ab = ac\ \rightarrow b = c)$
Observação: note que a proposição é uma equivalência ("se, e somente se"), portanto, é necessário mostrar uma "ida" que denotaremos por ($\Longrightarrow$) e uma "volta"que denotaremos por ($\Longleftarrow$) . Demonstração: ($\Longrightarrow$) Veja a demonstração feita no item (2) e reproduza a demonstração para este caso. Neste caso, a hipótese (isto é, o que assumimos como verdadeiro) será: A é um anel de integridade; e a Tese (o que precisamos mostrar como verdadeiro): todo elemento não nulo de A é regular quanto à multiplicação, isto é, $(\forall a \in A\ )(\ a \neq 0\ e\ ab = ac\ \rightarrow b = c)$
($\Longleftarrow$) hipótese (isto é, o que assumimos como verdadeiro): todo elemento não nulo de A é regular quanto à multiplicação, isto é,

$$(\forall a \in A\ )(\ a \neq 0\ e\ ab = ac\ \rightarrow b = c)$$

Tese: (onde precisamos chegar): A é um anel de integridade.
Pela definição dada em (1) um anel A comutativo e com unidade é um domínio de Integridade, se satisfizer a propriedade :
$(\forall a, b\ \in A)(a.b = 0\ \rightarrow a = 0\ ou\ b = 0)$ *
Desta forma, nosso objetivo será mostrar que A satisfaz a propriedade *, pois já foi dado que A é comutativo e tem unidade.
Vamos mostrar * por absurdo.
Responda: o que você entende por realizar uma demonstração por absurdo?
Demonstração: Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, tal que ab=0 então segue que ab = a.0 (justifique essa passagem).................................. , segue que b=0, absurdo
3) Leia a definição: Se um domínio de integridade (A, +, .) satisfaz a propriedade:
$A10)\ \forall x \in A, x \neq, \exists\ y\ \in A\ tal\ que\ x.y = y.x = 1, dizemos\ que\ A, +, .\ é\ um\ corpo.$ (Gonçalves, 1999, p. 35)
3.1) Compare as proposições seguintes.
$(\forall\ , a, b\ \in A\ )(\ a \neq 0\ e\ ab = ac\ \rightarrow b = c)$ E $\forall x \in A, x \neq 0, \exists\ y\ \in A\ tal\ que\ x.y = y.x = 1$
O que significa cada uma delas?
3.2) Assumindo que o conjunto dos reais R é um anel com as operações usuais de adição e multiplicação de reais, mostre que R é um corpo.
4) Depoimento do aluno sobre suas vivências nesta fase:
Descreva com palavras e expressões matemáticas como chegou às respostas das perguntas, destacando as articulações e os procedimentos que utilizou para compreender e resolver os desafios propostos.