DOI: https://doi.org/10.17921/2176-5634.2022v15n3p354-363

Conhecimento e Ensino sobre Operações Aritméticas com Frações: Revisão Sistemática de Literatura

Knowledge and Teaching about Arithmetics Operations with Fractions: Systematic Literature Review

Camila Augusta do Nascimento Amaral*[a]; Maria Alice Veiga Ferreira de Souza[a]; Edmar Reis Thiengo[a]

[a]Instituto Federal do Espírito Santo. ES, Brasil.
*E-mail: cam.amaral@yahoo.com.br

Resumo

Reconhecida a importância da construção do conceito de frações e de suas operações aritméticas como nuclear para desenvolvimento da matemática mais avançada como a Álgebra, objetivamos identificar, no contexto mundial, por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL), conhecimentos demonstrados por professores que ensinam matemática na educação básica sobre operações aritméticas com frações e estratégias didático-pedagógicas divulgadas pela comunidade científica específica para o ensino desse conteúdo. A investigação, de caráter qualitativo, bibliográfico e descritivo, foi conduzida a partir de um protocolo com descritores na língua inglesa, aplicados em bases com extenso acervo científico na área de Ensino e Educação – Scientific Electronic Library Online (Scielo); International Publisher Science Technology, Medicine (Springer); Science Direct; Scopus; Web of Science; Educational Resources Information Center (Eric); e Directory of Open Access Journals (Doaj) – e sem limites temporais. Foram identificados cinco trabalhos cujos resultados indicaram carência conceitual de professores da educação básica em operações aritméticas com frações, bem como estratégias didático-pedagógicas apoiadas em procedimentos desligados de compreensão conceitual. Ademais, considerando a importância do tema para a Educação Matemática, recomendamos mais investigações que busquem compreender os conhecimentos do conteúdo das operações com frações e a prática de ensino de professores visando à subsidiar formações que tragam ao primeiro plano desenvolvimento conceitual, sobretudo em aspectos alinhados com a perspectiva de medição, como indicado pela comunidade científica específica.

Palavras-chave: Operações Aritméticas com Frações. Educação Básica. Conhecimento de Professores. Estratégias Didático-Pedagógicas.

Abstract

Recognized the importance of building the concept of fractions and their arithmetic operations as a core for the development of more advanced mathematics such as Algebra, we aim to identify, in the world context, through a Systematic Literature Review (RSL), knowledge demonstrated by teachers who teach mathematics in elementary education on arithmetic operations with fractions and didactic-pedagogical strategies disseminated by the scientific community specifically for teaching this content. The investigation of a qualitative, bibliographic, and descriptive character, was conducted from a protocol with descriptors in English, applied in bases on an extensive scientific collection in the area of Teaching and Education – Scientific Electronic Library Online (Scielo); International Publisher Science Technology, Medicine (Springer); Science Direct; Scopus; Web of Science; Educational Resources Information Center (Eric); and Directory of Open Access Journals (Doaj) – and without time limits. Five works were identified whose results indicated a conceptual lack of elementary education teachers in arithmetic operations with fractions and didactic-pedagogical strategies supported by procedures disconnected from conceptual understanding. Furthermore, considering the importance of the theme for Mathematics Education, we recommend further investigations that seek to understand the knowledge of the content of operations with fractions and the teaching practice of teachers in order to subsidize training that brings conceptual development to the fore, especially in aspects aligned with the measurement perspective, as indicated by the specific scientific community.

Keywords: *Arithmetic Operations with Fractions. Elementary School. Knowledge of Teachers. Strategies Didatic-Pedagogical.*

1 Introdução

O estudo de frações e de suas operações aritméticas é nuclear para desenvolvimento e sustentação da Matemática, de modo geral (Nmap, 2008). Mais especificamente, pesquisas científicas revelam que o entendimento de frações influencia no desempenho futuro de alunos em matemática mais avançada, a depender de como é ensinado (Siegler et al., 2012, Booth & Newton, 2012). Para Behr et al. (1983), o conceito de número racional está entre as ideias matemáticas mais complexas e importantes que as crianças encontram durante o ensino básico. Para esses autores, a importância desse conteúdo pode ser evidenciada sob três panoramas: prático, psicológico e matemático. Pelo prático, a manipulação das interpretações de número racional contribui para o desenvolvimento da capacidade de compreender e resolver problemas da realidade. Pelo psicológico, acreditam que a compreensão dos números racionais auxilia na ascensão intelectual das crianças, expandindo as estruturas mentais necessárias ao seu desenvolvimento. E, pelo matemático, compreendem que o entendimento dos números racionais constitui uma base para o domínio das operações algébricas elementares.

Essa relação de ensino e aprendizagem levou pesquisadores das áreas de Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva a investigar a construção do conceito e operações aritméticas, bem como as estratégias didático-pedagógicas, de números racionais cujos resultados revelaram ser um desafio para professores de todo o mundo nas últimas décadas (Brousseau, 1983, Ma, 1999, Siegler et al., 2012, Vamvakoussi et al., 2012, Christou, 2015, McMullen et al., 2015, Van Hoof et al., 2018). Alguns fatores que apoiaram essa convicção são (1) a carência conceitual de frações apresentada por professores que, de fato, muitas vezes realizam operações com frações desligadas dos sentidos de seus algoritmos (Ball, 1990, Ma, 1999, Ni, 2001, Yoshida & Sawano, 2002, Newton, 2008, Nunes & Bryant, 2009, Lin et al., 2013) e, (2) o ensino orientado singularmente ou prioritariamente em uma perspectiva de partição (Brasil, 2017, Scheffer & Powell, 2019, Souza & Powell, 2021).

Na perspectiva de partição, a existência de frações emerge da divisão de coisas divisíveis – uma unidade igualmente subdividida a certa quantidade distinta dela (Powell, 2018). Nessa ideia são apresentadas, por exemplo, as interpretações de parte-todo, quociente, razão, operador multiplicativo e medida (Kieren, 1976) de modo discreto. Doyle et al. (2016, p.26) apontam com bases nas definições de Charalambous e Pitta-Panzini (2007) que

> (1) O subconstructo parte/todo interpreta a noção simbólica p/q para representar a partição de algo inteiro em *q* partes iguais e, em seguida, retirar *p* das *q* partes; (2) O subconstructo quociente interpreta p/q como o resultado obtido quando *p* quantidades são divididas em *q* partes iguais. Essa ideia apoia a interpretação dupla de p/q como o número de partes iguais obtidas quando uma quantidade *p* é dividida em *q* partes de mesmo tamanho; (3) A interpretação de p/q no subconstructo razão envolve uma comparação entre duas quantidades *p* e *q*; (4) O subconstructo operador é sinônimo com o processo de tomar uma fração de alguma quantidade portanto, essa interpretação de p/q envolve multiplicação por *p* e divisão por *q*; (5) A unidade no subconstructo medida é repartida em *q* partes iguais e a subunidade resultante 1/n é iterada *p* vezes.

De maneira diversa, a perspectiva de medição explora o conteúdo de frações de modo contínuo, favorecendo compreensões como as de frações impróprias, por exemplo. Neste caso, a ontologia das frações surge de problemas de medir quantidades, que é a comparação multiplicativa de pares de magnitudes (Caraça, 1951; Aleksandrov, 1963; Escolano, 2007; Powell, 2018). Simbolicamente,

> [...] para saber a extensão de uma distância □, em comparação com uma unidade de medida *u*, nem sempre era o caso de □ ser exatamente □ unidades de medida □, onde □ é um número inteiro. Ou seja, não é garantido que □, medido por □, seja exatamente igual a □ × □. [...] Em geral, se □ não for igual a um múltiplo exato de □, poderá existir uma subunidade da medida □, de modo que □ seja igual a exatamente □ subunidades de □, isto é, □=□×□; e □ é igual a exatamente □ subunidades de □, ou seja, □=□×□, o que implica que □=1/□×□. Como □ = □ × □, então □=□×1/□×□; isto é □=□/□×□. Assim, a distância □ é igual à razão □ enésimos (ou □ um-enésimo) da unidade de medida □, onde □□ é uma fração. Essa expressão—□=□/□×□— representa uma comparação multiplicativa entre as duas quantidades mensuráveis □ e □ (Powell, 2019, p.706-708).

Tendo em vista as diferentes perspectivas e abordagens de se ensinar o conteúdo de frações, objetivamos identificar, no contexto mundial e por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura, (1) conhecimentos demonstrados por professores que ensinam matemática na educação básica sobre operações aritméticas com frações e, (2) estratégias didático-pedagógicas utilizadas em propostas apontadas pela comunidade científica específica para o ensino das operações aritméticas com frações.

2 Conhecimento de Professores e o Ensino de Frações

Desde já, é útil esclarecer que o interesse maior nesta investigação consiste no conhecimento do conteúdo e de ensino de professores que ensinam frações. Entretanto, é inevitável – e de certo modo uma redução perigosa – deixarmos de mencionar a aprendizagem de alunos como consequência de ações docentes. Assim, iniciamos nossa escrita convidando o leitor a refletir: Que conhecimentos são necessários à profissão de professor? É *sine qua non* que o professor domine o assunto a ensinar que transcenda o conhecimento matemático comum, ou seja, aquele mais utilitário (Ma, 1999, Shulman, 1986, Ball et al., 2008). Ao contrário, o professor deve se apropriar de conhecimentos que o abasteça das razões do ensino e de como funcionam aspectos mais internos da matemática, tornando-o mais especializado. À guisa de ilustração, não é bastante saber realizar a operação de 1/2+1/3 – conhecimento algoritmizado –, mas de compreender a necessidade de um múltiplo comum para obter frações equivalentes e, com elas, realizar a operação desejada relacionando a magnitude das duas frações. Mais ainda, Santana et al. (2020) afirmam que além de considerar as ideias fundamentais do tópico, como conceitos, representações, procedimentos e técnicas matemáticas, o professor deve avaliar os conhecimentos prévios e posteriores dos alunos, tal como em uma história que somente se interrompe pelo sistema seriado dos anos escolares.

Shulman (1986) define três categorias de conhecimento que o professor deve reunir para exercer sua prática docente: (1) conhecimento específico do conteúdo que busca compreender a estrutura da disciplina. Esses conhecimentos devem ser capazes de explicar e aprofundar um assunto, compreender o domínio dos aspectos relacionados a conceitos, procedimentos, notações e representações do conteúdo; (2) conhecimento curricular que se refere ao entendimento de uma série de programas e materiais elaborados para ensinar temas e tópicos específicos em determinado nível de ensino, e a capacidade de refletir criticamente sobre as indicações e contraindicações do uso desses programas e materiais; (3) conhecimento pedagógico do conteúdo que surge por meio da compreensão do professor acerca do conteúdo a ser ensinado. Esses conhecimentos fornecem ao professor maneiras mais úteis e direcionadas de representação de determinadas ideias, analogias mais esclarecedoras, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações, ou seja, um modo de representar e formular os conteúdos a serem trabalhados em sala de aula como algo compreensível para os alunos.

Posteriormente, Shulman (1987) reformulou seu modelo apresentando sete categorias que seriam base do conhecimento do professor para promover a compreensão dos alunos:

> 1) Conhecimento do conteúdo; 2) Conhecimento pedagógico geral, com referência especial para aqueles princípios amplos e de estratégia de direção e organização da sala de aula que parece ultrapassar o assunto da disciplina propriamente dita; 3) Conhecimento curricular, com particular compreensão dos materiais e programas que servem como "ferramentas de ofício" para os professores; 4) Conhecimento pedagógico do conteúdo, aquele amálgama especial de conteúdo e pedagogia que é ligado unicamente à função do professor, a sua própria forma de entendimento profissional; 5) Conhecimento dos alunos e suas características; 6) Conhecimento do contexto educacional, envolvendo desde os trabalhos do grupo ou da sala de aula, administração das escolas, as características gerais e culturais das comunidades; 7) Conhecimento dos fins educacionais, propósitos e valores e sua filosofia e fundamentos históricos (Shulman, 1987, p.8).

Embora estudos na área da formação inicial e continuada de professores revelem que a compreensão e a segurança dos professores em relação ao conteúdo matemático afetem a qualidade de seus ensinos (Ball & Bass, 2004), é possível reconhecer dificuldades epistemológicas e de estratégias de ensino que professores enfrentam no dia a dia quando estão inseguros ou não familiarizados com o conteúdo a ser ensinado, e em particular sobre frações (Brousseau, 1983, Lin et al., 2013).

Como exemplo, Eisenhart et al. (1993, p.23) descrevem o caso de uma professora que, ao ser questionada por um aluno sobre o porquê do algoritmo *inverte e depois multiplica* para divisão de frações, tentou criar um problema matemático para três quartos divididos pela metade: "qual porção de uma parede poderia ser pintada se 1/4 da parede já foi pintada e você tem tinta suficiente para cobrir apenas 1/2 da área restante?". Ao desenhar um retângulo para representar a parede e começar a ilustrar o problema, ela percebeu que algo não estava certo, abortou o problema e sua explicação, orientando o aluno a apenas realizar o algoritmo. Ainda que esta professora possua formações em cálculo, álgebra moderna e ciência da computação, ela não foi capaz de oferecer uma explicação e(ou) representação viável para a esclarecer a divisão de frações para além da algoritmização do *inverte e depois multiplica*. Na verdade, o problema proposto pela professora deveria ser resolvido por uma multiplicação de 3/4 por 1/2, em vez de uma divisão entre essas frações, como era sua ideia inicial.

A respeito desse tipo de equívoco, Brousseau (1983) afirma que o lapso pode evidenciar o obstáculo, ou seja, uma obstrução que se manifesta a partir do erro, sendo considerado como um conhecimento e não como a falta dele. Esse autor elenca três tipos de obstáculos: os de origem didática, ontogênica e epistemológica. Os obstáculos de natureza didática são os que dependem de opções do docente ou de um projeto do sistema educativo. Os entraves surgidos pela estratégia de ensino escolhida, propicia o surgimento de bloqueios ao entendimento e desenvolvimento de alguns conceitos (Brousseau, 1983). Por exemplo, o aluno ao ouvir do professor que o produto de dois números naturais não nulos é maior ou igual a cada um deles tenta concluir que o mesmo ocorre no campo dos números racionais, o que não acontece, provocando erros (Almouloud, 2007).

Os obstáculos ontogênicos, por sua vez, aparecem pelas limitações (neurofisiológicas entre outras) do sujeito em um dado momento de seu desenvolvimento (Brousseau, 1983). Geralmente surgem quando a aprendizagem está deslocada em relação à maturidade conceitual do sujeito. Uma ilustração desse obstáculo é o uso correto da linguagem e dos símbolos matemáticos que se tornam difíceis de desenvolver quando o indivíduo se encontra no estágio das operações concretas (Almouloud, 2007). Por fim, os obstáculos epistemológicos são aqueles que fazem parte da construção do conhecimento que ocorre ao longo da história e da construção cognitiva do aluno (Brousseau, 1983).

Em relação ao ensino e aprendizagem do conceito de frações, Silva (1997) aponta cinco obstáculos epistemológicos. O primeiro se refere à representação simbólica identificado quando as crianças reproduzem o símbolo sem entender seu significado. Esse obstáculo ocorre geralmente pelo fato de as crianças não serem requisitadas na escola a obter efetivamente a representação da situação a que está submetida, por meio da linguagem natural e da exploração de processos que possam dar significado às representações de fração. Esse fator demonstra o porquê, por exemplo, de as crianças terem maior facilidade ao trabalharem com frações unitárias.

O segundo obstáculo se refere à negação da necessidade das quantidades fracionárias. Podemos identificá-lo quando os alunos, em algumas situações, se negam a aceitar os "números quebrados" como resultado. De acordo com Silva (1997), essa negação ocorre provavelmente porque os alunos não são expostos a situações que os façam perceber a necessidade desse tipo de número como na medição por unidades não usuais.

O terceiro obstáculo diz respeito à dificuldade em aceitar as frações como número. Não raramente, Silva (1997) conta que alunos interpretam uma fração como um par de dois números naturais indissociáveis e não como um número que representa certa quantidade. Essa dificuldade ocorre devido ao número fracionário ser de natureza diferente da dos números naturais. Ele não surge simplesmente de um processo de contagem, mas sim de uma comparação multiplicativa de pares de magnitudes.

O conhecimento dos números naturais constitui em si o quarto obstáculo para a aprendizagem dos números fracionários, descrito por Silva (1997). Quando o aluno tem o conhecimento da magnitude dos números naturais tão bem definidos, este o leva a pensar que apenas os números naturais têm o *status* de número e, com isso, cometem equívocos ao tentarem transpor conhecimentos da magnitude dos números naturais para os números racionais. Por exemplo, ao compararem a fração 1/2 com a fração 1/3 dizem que 1/2 é menor que 1/3 pelo simples fato de 2 ser menor que 3. Por último, o quinto obstáculo encontra-se no modelo de referência. O professor ao adotar o modelo discreto para o ensino das frações oportuniza alguns obstáculos pois, nesse caso, os alunos são levados a contar as partes perdendo o sentido do inteiro inicialmente considerado. Além disso, a discretização pode provocar a ideia de que a fração é, unicamente, o número de partes da unidade.

Em suma, investigadores da Educação Matemática revelam que a carência conceitual de frações que muitos professores apresentam (Ball, 1990, Ma, 1999, Ni, 2001; Yoshida & Sawano, 2002, Newton, 2008, Nunes & Bryant, 2009, Lin et al., 2013) pode tornar o ensino desafiador e comprometer a aprendizagem dos alunos. Ademais, a literatura científica apresentada deixa a mensagem que o professor necessita se apropriar do conteúdo de frações e suas operações de modo amplo e profundo (vide categorias de conhecimento de Shulman, 1986), além de superar obstáculos didáticos, ontogênicos e epistemológicos (vide Brousseau, 1983). Por essas razões, pesquisas científicas têm se debruçado em revelar conhecimentos demonstrados por professores acerca de frações e suas operações aritméticas e, experimentar estratégias para o ensino desses conteúdos com intuito de contribuir para a formação de professores e de alunos. É nessa direção que propomos elencar conhecimentos e estratégias didático-pedagógicas por meio de uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL) que inaugura o próximo tópico.

3 Revisão Sistemática de Literatura

A RSL, de caráter qualitativo, bibliográfico e descritivo (Bogdan & Biklen, 1994, Gil, 2002, Triviños, 1987), sobre conhecimentos demonstrados por professores sobre as operações aritméticas de frações e de estratégias didático-pedagógicas para o seu ensino, visa contribuir para avanços em novas investigações na área da Educação Matemática, sobretudo na formação inicial e continuada de professores.

A revisão foi levada a efeito em um levantamento de dissertações de mestrado, teses de doutorado, artigos e textos científicos publicados em periódicos nacionais e internacionais e em anais de eventos, por meio de descritores na língua inglesa aplicados em bases com amplo acervo científico na área de Ensino e Educação, tais como Scielo, Springer, Science Direct, Scopus, Web of Science, Eric e Doaj. Os descritores eleitos estão intrinsecamente relacionados ao objetivo e metas de pesquisa, que combinados formaram *strings* com uso de operadores lógicos *OR* entre os sinônimos e o operador *AND* com o restante das palavras-chaves. São eles: fraction operation, arithmetic, measure*, partition*, construct*, instruction, teach*, learn*, knowledge e elementary school.

Não objetivamos utilizar nesta pesquisa limitação temporal por acreditarmos, ao lado de educadores matemáticos e psicólogos cognitivistas, que o ensino de frações sempre foi tema que requereu atenção em nível escolar, científico e acadêmico, a exemplo das pesquisas apresentadas ao longo deste artigo que datam desde Caraça (1951). Apesar da ampla temporalidade empreendida nesta RSL, apenas 38 documentos de livre acesso vieram ao primeiro plano e foram submetidos a critérios de inclusão. Dos 38 trabalhos, foram removidos dez por não terem sido revisados por pares. Os 28 restantes seguiram para leitura dos resumos, ou de mais partes textuais, com objetivo de verificar se tratavam do ensino ou aprendizagem de, pelo menos, uma operação aritmética básica com frações. Após essa análise, verificamos que 12 não correspondiam ao critério adotado e, portanto, apenas os 16 restantes (A1, A2, ..., A16) – 15 artigos científicos e uma tese de doutorado – seguiram para submissão a uma avaliação por três professores e pesquisadores da área de Educação Matemática. Os avaliadores precisaram responder se cada trabalho: (Q1) apontava conhecimento do conteúdo do professor de, pelo menos, uma das operações aritméticas com frações; (Q2) sugeria estratégias didático-pedagógicas para o ensino de, pelo menos, uma das operações aritméticas com frações. Os trabalhos indicados pelos três pareceristas estão informados na tabela 1 quanto à: codificação (A1, ..., A16), base, ano de publicação, título, autor(es), periódico ou instituição, média aritmética e desvio-padrão (DP), além de retomar o objetivo da RSL.

Quadro 1 – Artigos científicos selecionados para avaliação por pares e suas respectivas notas de elegibilidade

Objetivo da RSL: Identificar, no contexto mundial, conhecimentos demonstrados por professores que ensinam matemática na educação básica sobre operações aritméticas com frações e estratégias didático-pedagógicas utilizadas apontadas pela comunidade científica para o ensino deste conteúdo.

	Base	Ano	Título	Autor(es)	Periódico / Instituição	Média	DP
A1	Springer	2001	Audrey's acquisition of fractions: a case study into the learning of formal mathematics	Ronald Keijzer e Jan Terwel	Educational Studies in Mathematics	1,50	0,76
A2	Eric	2004	A developmental scale of mental computation with part-whole numbers	Rosemary Callingham e Jane Watson	Mathematics Education Research Journal	1,50	0,50

	Base	Ano	Título	Autor(es)	Periódico / Instituição	Média	DP
A3	Gale	2006	Algebra students' difficulty with fractions: an error analysis	George Brown e Robert J. Quinn	Australian Mathematics Teacher	2,33	0,75
A4	Springer	2007	Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions	Charalambos Y. Charalambous e Demetra Pitta-Pantazi	Educational Studies in Mathematics	1,17	0,37
A5	Wiley Online Library	2013	Preservice teachers conceptual and procedural knowledge of fraction operations: a comparative study of the United States and Taiwan	Cheng-Yao Lin, Jerry Becker, Mi-Ran Byun, Der-Ching Yang e Tsai-Wei Huang	School Science and Mathematics	2,00	0,82
A6	Wiley Online Library	2013	Fractions as Subtraction: An Activity-Oriented Perspective from Elementary Children	Marcy B. Wood , Amy M. Olson , Elizabeth J. Freiberg e Ruby I. Vega	School Science and Mathematics	1,83	0,90
A7	Springer	2013	Pre-Service Primary Teachers' Free Problem-Posing Performances in the Context of Fractions: An Example from Turkey	Çiğdem Kılıç	The Asia-Pacific Education Researcher	1,50	0,76
A8	Springer	2014	Model breaking points conceptualized	Rozy Vig, Eileen Murray e Jon R. Star	Educational Psycology Review	2,50	0,76
A9	Springer	2015	Working at the intersection of teacher knowledge, teacher beliefs, and teaching practice: a multiple-case study	Charalambos Y. Charalambous	Journal of Mathematics Teacher Education	2,00	1,00
A10	Eric	2017	Preservice elementary teachers understanding of operations for fraction multiplication and division	Ashley N. Whitehead e Temple A. Walkowiak	International Journal for Mathematics Teaching and Learning	2,67	0,75
A11	Gale	2018	Pre-service primary Mathematics teachers' understanding of fractions: an action-process-object-schema perspective	Ifunanya J. A. Ubah e Sarah Bansilal	South African Journal of Childhood Education	1,83	0,69
A12	Eric	2019	Preservice teachers making sense of fraction concepts and operations in a mathematics education content course	Deksiyos Demissie Desta	Illinois State University	1,83	0,89
A13	Rei	2020	Didactic transposition of rational numbers: a case from a textbook analysis and prospective elementary teachers mathematical and didactic knowledge	Zetra Hainul Putra	Journal of Elementary Education	2,50	0,76
A14	Springer	2021	Teachers conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers	Yasemin Copur-Gencturk	Educational Studies in Mathematics	2,67	0,75
A15	Springer	2021	Teachers attention to and flexibility with referent units	Yasemin Copur-Gencturk e Ibrahim Burak Olmez	International Journal of Science and Mathematics Education	2,00	1,00
A16	Springer	2021	On the alignment of teachers' mathematical content knowledge assessments with the common core state standards	Yasemin Copur-Gencturk, Erik Jacobson e Richard Rasiej	Journal of Mathematics Teacher Education	1,17	0,37

Fonte: Dados da pesquisa.

Os três avaliadores atribuíram para os questionamentos Q1 e Q2 uma pontuação – 1 = "discordo", 2 = "nem concordo, nem discordo" e 3 = "concordo totalmente" – com intuito de diagnosticar a relevância e adequação dos trabalhos aos objetivos da investigação. Foram selecionados os trabalhos que obtiveram média aritmética maior ou igual a 2,10 e desvio-padrão menor ou igual a 0,88. Essa etapa resultou na seleção de cinco dos 16 trabalhos (A3, A8, A10, A13, A14), como último filtro, sobre os quais apresentaremos os resultados no próximo tópico.

4 Apresentação dos Cinco Trabalhos

Apesar de a construção do conceito e de operações aritméticas, bem como os desafios de ensino de números racionais – representados na forma fracionária ou decimal – serem investigados nas últimas décadas, no que diz respeito à discussão sobre os conhecimentos e estratégias didático-pedagógicas que professores que ensinam matemática na educação básica demonstram sobre operações aritméticas com frações, percebemos ser um tema debatido em termos científicos relativamente recente (a partir de 2001). Observamos que em países, como o Brasil, não há muitos estudos na área, embora educadores matemáticos venham colocando em relevo os mesmos problemas relatados por autores de outros países (*e.g.*, Sheffer & Powell, 2019, Souza & Powell, 2021). Assim, nos resta trazer ao primeiro plano os cinco trabalhos que atenderam ao desenho do protocolo alinhado com o objetivo da RSL. E que estão organizados em dois tópicos sobre operações aritméticas com frações: (1) conhecimentos de conteúdo e, (2) estratégias didático-pedagógicas para o ensino.

- Quanto aos conhecimentos demonstrados por professores que ensinam matemática na educação básica sobre operações aritméticas com frações

Os artigos selecionados nesta RSL reforçam o discurso de pesquisas nas áreas de Educação Matemática e da Psicologia Cognitiva sobre a carência conceitual de operações aritméticas com frações por professores na formação inicial e continuada. Essa carência conceitual pode ser destacada tanto por intermédio de erros comuns cometidos por professores ao realizarem operações aritméticas com frações (A3–Brown & Quinn, 2006) quanto quando eles sabem realizá-las de maneira procedimental sem compreenderem o conceito dos algoritmos (A10–Whitehead & Walkowiak, 2017; A13–Putra, 2020; A14–Copur-Gencturk, 2021).

Brown e Quinn (A3–2006) buscaram investigar erros padrões que emergem enquanto 143 professores estadunidenses em formação inicial tentavam responder um teste de 25 questões com o objetivo de examinar o conhecimento conceitual e a fluência computacional desses professores sobre frações e suas operações aritméticas. Para a questão de soma de frações (5/12+3/8), cerca de 48% dos professores não foram capazes de achar uma soma correta. Os erros mais comuns eram: seis professores demonstraram compreensões equivocadas relacionadas a frações equivalentes (*e.g.*, 3/8 tornou-se 7/12 adicionando 4 ao numerador e denominador) e 27 professores (cerca de 20%) não foram capazes de declarar um denominador comum, sendo que destes, 19 adicionaram numeradores e denominadores indiscrimidamente. Para a questão de subtração (3/5–8) essa quantidade foi maior, 67% dos professores forneceram uma resposta incorreta. Os principais equívocos foram: 21 professores declararam não saber o mmc, 16 professores reescreveram a questão para 8/5–3/5 ou 3/5–8/5 e, 16 professores subtraíram os numeradores e denominadores indiscriminadamente. Na questão de multiplicação de fração (1/2×1/4), 58% dos professores, não acharam o produto correto, pois não aplicaram o algoritmo padrão[1] para multiplicação. Desses, 8 adicionaram os denominadores e multiplicaram os numeradores. Outros 8 acharam o mmc antes de multiplicar.

Whitehead & Walkowiak (A10–2017) aplicaram uma avaliação com quatro questões para 48 professores estadunidenses em formação inicial com o objetivo de avaliar seus conhecimentos conceituais a respeito das operações aritméticas com frações, antes e depois de uma intervenção didática. Para isso, os autores utilizaram a estrutura da taxonomia de resultados de aprendizagem observados (SOLO; Biggs, 1999). A aprendizagem do aluno é examinada pela taxonomia SOLO de um nível inferior de compreensão (Pré-operacional) até um nível de compreensão mais avançado (Abstrato) passando pelos níveis Uniestrutural, Multiestrutural e Relacional. Duas questões na pré-avaliação pediam que os professores explicassem porque os algoritmos de multiplicação (2/3×1/2) e divisão (5/8÷1/2) de fração funcionam. O resultado mostrou que cerca de 69% e 65% dos professores apresentaram um nível de conhecimento pré-operacional, ou seja, não souberam explicar ou explicaram de maneira incorreta os algoritmos de multiplicação e divisão, respectivamente; 15% e 33% apresentaram um nível de conhecimento Uniestrutural, em outras palavras, apresentaram apenas uma explicação literal dos algoritmos de multiplicação e divisão, respectivamente; 10% e 2% expressaram um nível de conhecimento Multiestrutural, isto é, ofereceram explicações parcialmente conceituais de casos particulares para multiplicação e divisão, respectivamente e; 6% e 0%, um nível de conhecimento relacional, ou seja, explicações totalmente conceituais para casos particulares sobre os significados dos algoritmos de multiplicação e divisão de fração, respectivamente. Whitehead e Walkowiak

1 Chamaremos de algoritmos padrões aqueles necessários à realização de uma sequência de procedimentos desvinculados do seu significado conceitual. Como a regra do *inverte e depois multiplica* para divisão de fração e, de multiplicar numerador com numerador e denominador com denominador para multiplicação de fração. Em relação à adição e subtração de fração, pode-se considerar um algoritmo padrão aquele que tanto a realização do mmc quanto das frações equivalentes ocorre de forma procedimental.

(A10–2017) observaram, ainda, que nenhum dos professores apresentou nível de conhecimento Abstrato, ou seja, que conseguissem elaborar provas conceituais generalizadas para os algoritmos apresentados na pesquisa.

Copur-Gencturk (A14–2021) também buscou capturar a compreensão conceitual de 303 professores estadunidenses em formação continuada por meio de duas tarefas que solicitavam explicações sobre os conceitos das operações de adição e divisão de frações. Desses professores, 19,8% forneceram uma explicação incorreta, nenhuma ou que narravam passos para o algoritmo de adição de fração e 58,1% para divisão de fração. As respostas parcialmente incorretas corresponderam a 24,6% e 15,8% para os algoritmos de adição e divisão, respectivamente. Foram consideradas parcialmente incorretas duas explicações: a ideia da operação não estava explícita (mesmo comprimento ou partição igual para a adição e, a necessidade de fornecer a unidade de referência) ou os exemplos fornecidos não estavam precisos. Em contrapartida, cerca da metade (55,6%) dos professores explicaram a necessidade matematicamente de um denominador comum e incluíram respostas corretas para adição de frações com denominadores diferentes, enquanto 26,1% dos professores forneceram uma explicação conceitual para o procedimento de divisão. A diferença nas respostas dos professores foi estatisticamente significante, indicando que os professores eram aptos a fornecer uma explicação mais específica para o algoritmo de adição do que para o algoritmo da divisão.

Inferimos destas pesquisas, o predomínio do uso de algoritmos durante a resolução de operações aritméticas com frações desvinculados do seu significado conceitual pelos professores em formação inicial e continuada de diversos países, ainda que essa estratégia possa trazer respostas não lógicas e acarretar erros. Esse fator também pode ser observado em Putra (A13–2020) ao analisar o conhecimento conceitual de 32 professores indonésios de ensino básico em formação continuada sobre adição e subtração de frações. A ideia era examinar a praxeologia matemática e didática dos professores que surgiam durante a realização de tarefas hipotéticas de maneira individual e colaborativa. As tarefas pediam que os professores realizassem operações de adição (*e.g.*, 2/3+1/2) e subtração de frações (*e.g.*, 4/7–1/3). Em seguida, eles deveriam interpretar métodos utilizados por alunos que responderam incorretamente às operações 2/3+1/2 = 3/5 e 4/7–1/3=3/4, e como eles poderiam inferir nesses casos.

Dos 32 professores, 30 resolveram corretamente as tarefas de operações de adição e subtração de frações propostas pela pesquisa e, destes, todos optaram pela utilização de algoritmos para sua resolução. Em relação às interpretações sobre as respostas equivocadas de alunos para essas operações, nove disseram que os alunos aplicaram propriedades dos números inteiros e realizaram a adição e subtração dos numeradores e denominadores indiscriminadamente. Três professores escreveram que os alunos não sabem o significado ou o conceito de frações. Ao serem perguntados como poderiam inferir nesses casos, 26 professores escreveram que os alunos precisam compreender apenas os algoritmos para adicionar e subtrair frações e, apesar de outros dois professores dizerem que é preciso explicar situações contextuais ou com uso da reta numérica, eles não forneceram explicações de como empregar essas técnicas didáticas. Somente um professor do grupo sugeriu apresentar o significado das operações de adição e subtração de frações usando modelos retangulares, contudo, apresentou apenas exemplos de operações com frações de mesmo denominador.

A compreensão conceitual dos professores na formação inicial e continuada sobre as operações aritméticas de frações desempenha um papel fundamental na qualidade de ensino que eles podem fornecer, assim como na aprendizagem que os alunos podem desenvolver neste conteúdo. Os erros comumente cometidos por professores como revelados na pesquisa de Brown e Quinn (A3–2006) reforça essa carência conceitual. Os impactos que dessa carência podem ser observados nas pesquisas de Whitehead e Walkowiak (A10–2017), Putra (A13–2020) e Copur-Gencturk (A14–2021) ao relatarem que professores muitas vezes não sabiam explicar os algoritmos das operações aritméticas de frações. Essa questão se reflete em suas práticas de ensino que se resumem, prioritariamente, em aspectos procedimentais em relação a aspectos conceituais, comprometendo, possivelmente, a aprendizagem dos alunos.

Todas as pesquisas sugerem, portanto, a necessidade de mais formações para que professores desenvolvam aspectos conceituais fundamentais das operações de frações. Afirmam, ainda, a necessidade de os alunos compreenderem o conceito de fração antes de iniciarem a construção do conhecimento das operações.

- Quanto às estratégias didático-pedagógicas utilizadas pelos professores que ensinam matemática na educação básica para o ensino das operações aritméticas com frações

A carência conceitual de professores, identificadas por pesquisas científicas e descritas anteriormente, também são refletidas nas estratégias didático-pedagógicas para o ensino das operações com frações e, em livros didáticos que se baseiam prioritariamente no uso de procedimentos ou de modelos de área seguindo uma perspectiva de partição (A8–Vig, Murray & Star, 2014; A13–Putra, 2020; A14–Copur-Gencturk, 2021).

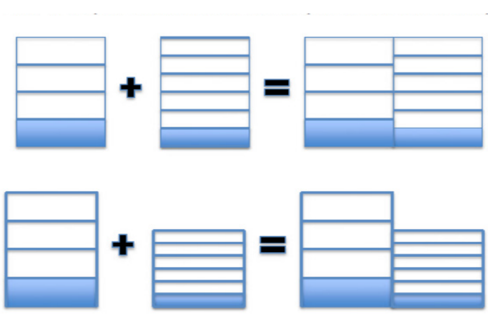
Putra (A13–2020) analisou a praxeologia das quatro operações aritméticas de números racionais a partir de um livro didático indonésio de matemática. Em relação à adição e à subtração de frações, o livro inicia com tarefas matemáticas que apresentam, por meio de modelos de área retangular, a soma de duas frações com mesmo denominador, seguidas da soma de frações com denominadores diferentes e de frações mistas, ambas de forma procedimental.

Em relação à multiplicação de frações, o livro didático apresenta três tipos de tarefas matemáticas: multiplicação de um número inteiro por uma fração, multiplicação de duas frações e multiplicação de um inteiro por uma fração mista utilizando modelos de área retangular de forma procedimental. Para a divisão de fração, as tarefas matemáticas promovidas pelo livro didático se referem à: divisão de um inteiro por uma fração, divisão de uma fração por um inteiro e divisão de uma fração por outra fração. Para o primeiro caso, foram utilizadas técnicas de modelo de área retangular e algébrica que foi demonstrada de maneira generalizada para ser utilizada nos demais casos de divisão de frações. De modo geral, o livro apresenta estratégias didático-pedagógicas para o ensino das operações aritméticas com frações baseadas nos algoritmos padrões salvo em casos específicos que os modelos de área foram utilizados.

A tentativa de utilizar modelos de área para o ensino das operações aritméticas com frações também foi refletida em Copur-Gencturk (A14–2021) quando professores estadunidenses tentavam explicar os conceitos dos algoritmos padrões para adição e divisão de frações. A pesquisa apontou que 74% dos professores em formação continuada tentaram explicar o algoritmo de adição de fração por meio de modelos de área, enquanto 52,6% usaram dessa mesma estratégia para explicar o procedimento de divisão de fração.

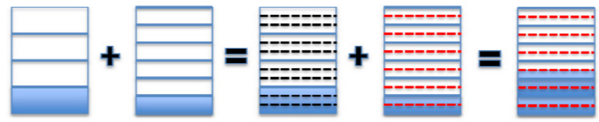
Embora os modelos de área serem frequentemente abordados em livros didáticos como modelo para o ensino de operações aritméticas com frações – e, por conseguinte, adotados por professores em formação inicial e continuada como estratégia didático-pedagógica para justificar ou substituir o uso dos algoritmos padronizados -, estes apresentam algumas limitações. Vig, Murray e Star (A8–2014) expõem algumas dessas limitações ao utilizarem modelo de área para adição de frações nos casos em que: (a) ambas estão entre 0 e 1 (*e.g.*, 1/6 + 1/4) e, (b) uma das duas ser maior do que 1 (*e.g.*, 1/4+3/2). Modelo de área para esses autores é uma representação visual de área (geralmente na forma de retângulo) que destaca a relação de parte-todo de uma fração. Vig, Murray e Star (A8–2014) registram que ao se optar por essa estratégia didática deve-se levar em consideração a criação de inteiros de mesmo comprimento e garantir que as partes de cada uma das frações sejam do mesmo comprimento (Figura 1), a fim de evitar possíveis erros (Figura 2).

Figura 1 – Duas Possíveis (Mas, Incorretas) Formas De Utilizar Modelo De Área Para 1/4 + 1/6.



Fonte: Vig, Murray e Star (A8 – 2014, p.81).

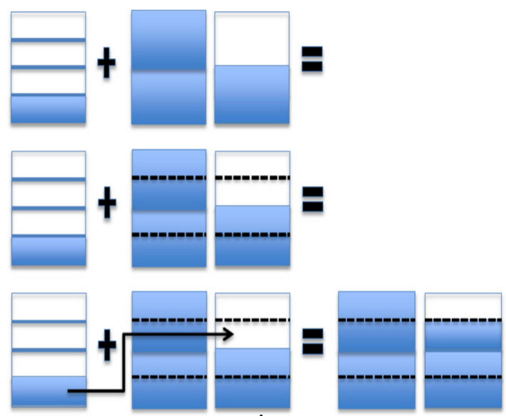
Figura 2 – Uma construção correta de modelo de área de 1/4 + 1/6 = 3/12 + 2/12 = 5/12.



Fonte: Vig, Murray e Star (A8 – 2014, p.83).

Vig, Murray e Star (A8 – 2014) destacam que a opção pelo modelo de área para as operações aritméticas com frações é significantemente mais complexa, particularmente quando o tamanho relativo das partes é menor, e as partes não compartilham uma relação multiplicativa com a outra (*e.g.*, 1/2 + 1/4 *vs* 1/8 + 1/9). Ou ainda, quando o problema envolve a soma de frações maiores do que 1 (*e.g.*, 1/4 + 3/2 – Figura 3) pois, nesses casos, há necessidade de representar mais de dois modelos de área para cada fração imprópria.

Figura 3 – Um modelo de área correto de 1/4 + 3/2 = 1/4 + 6/4 = 7/4



Fonte: Vig, Murray e Star (A8–2014, p.83).

Assim sendo, quando o problema de adição de fração abrange frações impróprias, o modelo se torna mais complexo em termos de base conceitual, tendendo a um obstáculo processual para a operação com sucesso. Em outras palavras, o modelo perde seu valor de iluminar importantes ideias conceituais relacionadas à operação. Nesse caso, em vez de desdobramentos conceituais, reveste-se de um dispositivo meramente computacional e mecanizado, podendo, inclusive, deixar o "sabor" de um processo inócuo e tedioso, com maior probabilidade de ocorrência de erros.

Inferimos dos trabalhos desta subseção a necessidade de pesquisas científicas que estudem mais profundamente o conhecimento de professores acerca de aspectos conceituais de operações aritméticas com frações. Os professores priorizam aspectos procedimentais algoritmizados e de modelos de partição, como o modelo de área, em detrimento de estratégias didático-pedagógicas baseadas em aspectos conceituais (*e.g.*, reta numérica e barras de Cuisenaire) e baseadas em uma perspectiva de medição.

5 Considerações Finais

A importância das operações aritméticas com frações para o ensino básico e, o papel relevante do professor no processo de aprendizagem de alunos, nos motivou a investigar conhecimentos deste conteúdo matemático e de estratégias didático-pedagógicas de professores que ensinam Matemática por meio de uma revisão sistemática a partir da literatura mundial emersa da comunidade científica das áreas de Ensino e Educação.

Não obstante a importância do tema, apenas cinco trabalhos científicos estudados neste artigo, atenderam integralmente os dois objetivos da revisão. O primeiro sobre conhecimentos de professores em formações inicial e continuada sobre operações aritméticas com frações: os trabalhos apontaram que, além da predominância do uso de aspectos procedimentais em relação a aspectos conceituais para resolução de operações aritméticas com frações, professores ainda cometem uma série de erros conceituais relacionados à aplicação de algoritmos. O segundo sobre as estratégias didático-pedagógicas adotadas no ensino: percebemos que, apesar da tentativa de utilizar modelos de área para apresentar as operações aritméticas com frações como alternativa ao aspecto procedimental, essa estratégia é utilizada, em sua maioria, para casos particulares de operações aritméticas com frações seguida dos algoritmos padrões para sua generalização. Além disso, por estarem apresentadas de maneira particionada, as estratégias se afastaram de aspectos conceituais relacionados às operações aritméticas com frações.

Esse cenário leva a crer na necessidade de mais investigações sobre conhecimento do conteúdo e de práticas de ensino que evidenciem aspectos conceituais relacionados às operações aritméticas com frações, sobretudo alinhados com uma perspectiva de medição.

Referências

Aleksandrov, A.D. (1963). A general view of mathematics. In: A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, & M.A. Lavrent'ev. *Mathematics: Its content, methods, and meaning*. (pp.1- 64) Cambridge: Massachusetts Institute of Technology.

Almouloud, S.A. (2007). *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR.

Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132- 144.

Ball, D.L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Ball, D.L. & Bass, H. (2004). A Practice-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching: the case of mathematical reasoning. In: Simmt, E. & Davis, B. (Eds.). *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group.* Queens: Cmesg, 3-14.

Behr, M.J., Lesh, R., Post, T.R. & Silver, E.A. (1983). Rational number concepts. In: R. Lesh, R. & Landau M. *Acquisition of mathematics concepts and processes,* (pp.91-126). New York: Academic Press.

Biggs, J. (1999). What the student does: teaching for enhanced learning. *Higher Education Research & Development, 18*(1), 57-75.

Bogdan, R. & Biklen, S.K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Booth, J. L. & Newton, K. J. (2012). Fractions: Could they really be the gatekeeper's doorman? *Contemporary Educational Psychology*, *37*(4), 247-253.

Brasil, Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(2), 165-198.

Brown, George & Quinn, Robert, J. (2006). Algebra Students' Difficulty with Fractions: An Error Analysis. *Australian Mathematics Teacher*, *62*(4), 28-40.

Caraça, B.J. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa: Tipografia Matemática.

Charalambous, C. & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics 64*, 293-316.

Christou, K. P. (2015). Natural number bias in operations with missing numbers. *ZDM Mathematics Education***,** *47*(5), 747-758. doi: http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0675-6.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics, 107*(3), 525-545.

Doyle, K., Dias, O., Kennis, J., Czarnocha B., & Baker W. (2016). The rational number subconstructs as a foundation for problem solving. *Adults Learning Mathematics: An International Journal, 11*(1), 21-42.

Eisenhart, M., Borko, H., Underhill, R., Brown, C., Jones, D., & Agard, P. (1993). Conceptual knowledge falls through the cracks: complexities of learning to teach mathematics for understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(1), 8-40.

Escolano, R. V. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde modelos de medida y cociente.* Tese (Doutorado em Matemática), Universidad de Zaragoza.

Gil, A.C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.

Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations os rational numbers. In: lesh, R. (Org.). *Number and measurement: papers from a research workshop***.** Ohio: Eric/Smeac, 101-144.

Lin, C., Becker, J., Byun, M., Yang, D., & Huang, T. (2013). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: a comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics***,** *113*(1), 41-51.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Lawrence Erlbaum Associates.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). *Learning and Instruction***,** 37(5), 14–20. doi: http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2013.12.004.

Newton, K.J. (2008). An extensive analysis of pre-service elementary teachers: Knowledge of fractions. *American Educational Research Journal*, *45*(4), 1080-1110.

Ni, Y. (2001). Semantic domains of rational numbers and the acquisition of fraction equivalence. *Contemporary Educational Psychology*, *26*(3), 400-417.

National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: Final report of the national mathematics advisory panel.* Washington, DC: US Department of Education.

Nunes, T. & Bryant, P. (2009). Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. In: *Key understanding in mathematics learning* (chap.3). Nuffield Foundation.

Powell, A.B. (2018). Reaching back to advance: Towards a 21st-century approach to fraction knowledge with the 4A Instructional Model. *Perspectiva*, *36*(2), 399-420.

Powell, A.B. (2019). How does a fraction get its name? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática*, *3*(3), 700-713.

Santana, E., Ponte, J., & Serrazina, L. (2020). Conhecimento didático do professor de matemática à luz de um processo formativo. *Bolema, 34*(66), 89-109. doi: http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a05.

Scheffer, N.F., & Powell, A.B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop, 1*(3), 476-503.

Shulman, L.S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(4), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-23.

Siegler, R.S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, K., Claessens, A., Engel, M., Susperreguy, M.I., & Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement. *Psychological Science*, *23*(7), 691-697.

Silva, M.J.F. (1997). Sobre a introdução do conceito de número fracionário [Dissertação de Mestrado em Ensino da Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo].

Souza, M. A. V. F. de, & Powell, A. B. (2021). How do textbooks from Brazil, the United States, and Japan deal with fractions?. *Acta Scientiae, 23*(4), 77-111.

Triviños, A. N. S. (1987). *Introdução à Pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em Educação.* São Paulo: Atlas.

Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2012). Naturally biased? In search for reaction time evidence for a natural number bias in adults. *The Journal of Mathematical Behavior, 3*1(3), 344-355. doi: http://dx.doi.org/doi:10.1016/j.jmathb.2012.02.001.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel L., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differen*ces, 61(1), 99–108. doi: http://dx.doi.org/doi:10.1016/j.lindif.2017.11.010.

Vig, R., Murray, E. & Star, R. (2014). Model Breaking Points Conceptualized. *Educational Psychology Review, 26*(1), 73-90.

Whitehead, A. & Walkowiak, T. (2017). Preservice Elementary Teachers' Understanding of Operations for Fraction Multiplication and Division. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 18*(3), 293-317.

Yoshida, H., & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, *44*(4), 183-195.

Zetra, P. (2020). Didatic transposition of rational numbers: a case from a textbook analysis and prospective elementary teachers' mathematical and didatic knowledge. *Revija Za Elementarno Izobrazevanje Journal of Elementary Education, 13*(4), 365-394.